Analysis I — Serie 4

1. (a) Bestimmen Sie $x, y \in \mathbb{C}$ so, dass

$$\begin{aligned}(2+i)x - (-3+i)y &= 4-3i \\ (1-4i)x + (2-3i)y &= 2-14i\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in \mathbb{C}$ die Gleichung

$$|A+B|^2 + |A-B|^2 = 2(|A|^2 + |B|^2)$$

gilt. Warum heißt diese Gleichung Parallelogrammidentität?

Bemerkung: Sowohl Teil (a) wie auch Teil (b) entstammen Schulbüchern.

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine monoton wachsende Funktion. Zeigen Sie, dass ein $p \in [a, b]$ mit $f(p) = p$ existiert.

Hinweis: Betrachten Sie die Menge $\{x \in [a, b] : f(x) \geq x\}$.

3. Eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = \sum_{j=0}^{d} a_j x^j$, wobei $d \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, ..., a_d \in \mathbb{R}$ und $a_d \neq 0$, heißt *Polynom*. Man nennt d den *Grad* und a_d den *führenden Koeffizienten* von p. Auch die Nullfunktion (d.h., die durch $x \mapsto 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definierte Funktion) wird als Polynom betrachtet, aber diese hat keinen Grad. (Manchmal wird der Grad auch als $-\infty$ definiert.) Zwei Polynome p und q heißen *teilerfremd*, wenn es keine Polynome p_0, q_0, r mit $p = p_0 r$ und $q = q_0 r$ gibt, wobei r mindestens den Grad 1 hat. Ein Polynom vom Grad d hat höchstens d Nullstellen (vgl. §1.8). Eine Funktion von $\mathbb{R} \backslash q^{-1}(0)$ nach $\mathbb{R}$ der Form $x \mapsto p(x)/q(x)$ heißt *rationale Funktion*, falls p und q teilerfremde Polynome sind und q nicht die Nullfunktion ist. Wir nennen die Darstellung $f = p/q$ *normiert*, wenn q den führenden Koeffizienten 1 hat.

Mit der natürlichen Addition und Multiplikation bildet die Menge R der rationalen Funktionen einen Körper. Die Teilmenge P von R bestehe aus der Nullfunktion 0 sowie den rationalen Funktionen $f \in R \setminus \{0\}$, bei denen in der normierten Darstellung $f = p/q$ der führende Koeffizient von p positiv ist. (Äquivalent dazu ist, dass in jeder Darstellung $f = p/q$, auch mit nicht notwendigerweise teilerfremden Polynomen p und q, die führenden Koeffizienten von p und q das gleiche Vorzeichen haben.)

Zeigen Sie, dass P die in Aufgabe 3 der Serie 3 formulierten Eigenschaften hat. Zeigen Sie weiter, dass mit der dort definierten Ordnung $\prec$ der angeordnete Körper $(R, +, \cdot, \prec)$ nicht vollständig ist.

4. Seien A, B nach oben beschränkte, nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass auch

$$A + B := \{a + b : \ a \in A, \ b \in B\}$$

nach oben beschränkt ist und dass

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

gilt. Gilt eine entsprechende Aussage auch für

$$A \cdot B := \{a \cdot b : \ a \in A, \ b \in B\}?$$

Bestimmen Sie die Menge $A + B$ für $A = [-2, 1)$ und $B = (-3, 2]$.

Die Lösungen der ersten beiden Aufgaben (für Zwei-Fächer-BSc) bzw. der ersten drei Aufgaben (für Ein-Fach-BSc) sind bis zum Montag, dem 21.11.2011, Vorlesungbeginn, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen.