Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2011/12

Analysis I
Serie 3

1. Beweisen Sie Satz 1.4.2 der Vorlesung.

2. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung
$$2(\sqrt{n+1}-1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$
gilt.

3. Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $P \subset K \setminus \{-1\}$ mit folgenden Eigenschaften:
   (a) $\forall x, y \in P$: $x + y \in P$,
   (b) $\forall x, y \in P$: $x \cdot y \in P$,
   (c) $\forall x \in K$: $x \in P \vee -x \in P$.

   Die Relation $\prec$ auf K sei durch $x \prec y \Leftrightarrow y - x \in P$ definiert. Zeigen Sie, dass $(K, +, \cdot, \prec)$ ein angeordneter Körper ist.

4. Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $k < n$ die Gleichung
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$
gilt. Folgern Sie hieraus die Binomische Formel: Ist K Körper, $a, b \in K$ und $n \in \mathbb{N}$, so gilt
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Die Lösungen der ersten beiden Aufgaben (für Zwei-Fächer-BSc) bzw. der ersten drei Aufgaben (für Ein-Fach-BSc) sind bis zum Montag, dem 14.11.2011, 8.10 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen.