Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2011/12

Analysis I
Serie 2

1. Sei $M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und

$$R := \{(4, 1), (4, 4), (5, 5), (3, 6), (1, 5), (3, 3), (5, 4), (1, 1), (6, 6)\}.$$

   (a) Überprüfen Sie, ob die Relation R auf M reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv ist.

   (b) Welche Elemente aus $M \times M$ müssen R mindestens hinzugefügt werden, um insgesamt eine Äquivalenzrelation zu erhalten? Wie sehen dann die Äquivalenzklassen aus?

   (c) Lässt sich R durch das Hinzufügen von Elementen aus $M \times M$ zu einer Halbordnung machen?

2. Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen. Schreiben Sie die folgenden Aussagen (a) und (b) als deutschen Satz und schreiben Sie die Aussagen (c) und (d) mit Hilfe von Quantoren als Formel

   (a) $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, p \in \mathbb{P} : n < p \wedge p \leq 2n$

   (b) $\forall\, n \in \mathbb{N} : ((n \geq 4 \wedge 2|n) \Rightarrow\ \exists\, p \in \mathbb{P}\ \exists\, q \in \mathbb{P} : n = p + q)$

   (c) Jede Primzahl, die bei Division durch 4 den Rest 1 liefert, kann als Summe von zwei Quadratzahlen geschrieben werden.

   (d) Die einzigen aufeinanderfolgenden Potenzen natürlicher Zahlen sind 8 und 9.

   Dabei ist in (c) mit Quadratzahl das Quadrat einer natürlichen Zahl gemeint. Bei der Potenz in (d) soll der Exponent eine natürliche Zahl größer als 1 sein. Die Notation $m|n$ in (b) bedeutet, dass m ein Teiler von n ist.

   Zusatzfrage. Was können Sie zum Wahrheitsgehalt der obigen Aussagen sagen?

3. Sei B die Menge der lateinischen Buchstaben und $\prec$ die alphabetische Ordnung auf B. (Man vergewissere sich, dass es sich dabei auch um eine Ordnung handelt). Ein Wort ist ein n-Tupel $(b_1, \ldots, b_n)$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $b_1, \ldots, b_n \in B$ gilt. Definieren Sie eine Ordnung auf der Menge der Wörter, die die Ordnung der Wörter in einem Lexikon formalisiert.

4. Seien M und N Mengen und sei $f : M \to N$ eine Funktion.

   (a) Sei $A \subset M$. Welche Inklusion gibt es zwischen den Mengen A und $f^{-1}(f(A))$? Unter welchen Voraussetzungen an f gilt $f^{-1}(f(A)) = A$?

   (b) Sei $B \subset N$. Untersuchen Sie analog zu (a) die Beziehung zwischen den Mengen B und $f(f^{-1}(B))$.

Die Lösungen der ersten beiden Aufgaben (für Zwei-Fächer-BSc) bzw. der ersten drei Aufgaben (für Ein-Fach-BSc) sind bis zum Montag, dem 07.11.2011, 8.10 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen.