Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2011/2012

**2. Klausur zu Analysis I**

**im Studiengang 1-Fach-Bachelor Mathematik**

**26. März 2012**

Für die Bearbeitung der folgenden 8 Aufgaben werden bei vollständig richtiger Bearbeitung jeweils 10 Punkte vergeben. Wer insgesamt 32 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden. Jede Aufgabe ist auf einem separaten Blatt zu bearbeiten. Jedes Blatt ist mit Matrikelnummer und Namen zu versehen.
Viel Erfolg!

Bearbeitungszeit: 2 Stunden und 40 Minuten

1. Wie lautet

   (a) das Wurzelkriterium für Reihen?

   (b) der Zwischenwertsatz?

   (c) der verallgemeinerte Mittelwertsatz?

2. Sei $M$ die Menge aller Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$. Auf $M$ sei eine Relation $\prec$ wie folgt definiert: Für $f, g \in M$ gelte

$$f \prec g \;\Leftrightarrow\; \exists\, x_0 \in (0,1)\; \forall\, x \in [0, x_0] : f(x) \leq g(x)\ .$$

   Ist $\prec$ transitiv? Ist $\prec$ antisymmetrisch?

3. Die Zahlenfolge $(a_n)$ sei rekursiv definiert durch $a_1 = 1$ und

$$a_{n+1} = 2\sqrt{a_n}$$

   für $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass $(a_n)$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert von $(a_n)$.

4. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n+1)!}}{n!}\, z^n\ .$$

5. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$2\cos^2 x = 1 + \sin x$$

   im Intervall $[0, 2\pi]$.

**Blatt bitte wenden, Aufgaben 6-8 auf der Rückseite!**

6. Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x(\ln x)^3 \ .$$

7. Sei $(a_n)$ eine beschränkte reelle Zahlenfolge und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass

$$f(\limsup_{n\to\infty} a_n) \leq \limsup_{n\to\infty} f(a_n) \ .$$

8. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{e^{nx}}{1 + e^{nx}} \ .$$

   Untersuchen Sie $(f_n)$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.