Universität Hannover **25.2.2011**
Institute der Mathematik
Prof. Dr. J. Escher, Dr. V. Kasten

KLAUSUR zur ANALYSIS I

Bearbeitungszeit 90 Minuten. Mit den bekanntgegebenen Hilfsmitteln.
Die Lösungswege müssen ohne Taschenrechner nachvollziehbar sein!

Aufgabe 1: *(8 Punkte)*

Beweisen Sie mit Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2 = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$.

Aufgabe 2: *(10 Punkte)*

Die reelle Zahlenfolge (x_n) sei rekursiv definiert durch

$$x_0 = 2,\ x_{n+1} = \sqrt{2x_n - 1}\ (n \in \mathbb{N}) .$$

Beweisen Sie, dass diese Folge konvergiert und bestimmen Sie auch den Grenzwert.
Hinweis: Es gilt $x_n \geq 1$ $(n \in \mathbb{N})$ und $x_{n+1} \leq x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ (Nachweis!)

Aufgabe 3: *(a) 7 Punkte, b) 3 Punkte)*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{a)} \quad \sum_{k\geq 1} \frac{7^k}{\binom{3k}{k}}, \qquad \text{b)} \quad \sum_{k\geq 1} \cos(k\pi) \cdot \log(1 + \frac{1}{k}) \quad (\text{Hinweis:} \cos(k\pi) = \ ?)$$

Aufgabe 4: *(a) 6 Punkte, b) 6 Punkte)*

a) Zeigen Sie die Stetigkeit der Funktion $f(x) = \dfrac{(x-1)\sin x}{2 + x + x^2}$ im Punkt $x_0 = 1$ mit Hilfe der $\varepsilon - \delta$-Definition.

b) Beweisen Sie: Ist $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad ≥ 1 und ist $K \subset \mathbb{R}$ kompakt, so ist auch die Urbildmenge $p^{-1}(K)$ kompakt.

Aufgabe 5: *(a) 3 Punkte, b) 7 Punkte)*

a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + e^x$ besitzt eine differenzierbare Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (muss nicht gezeigt werden). Berechnen Sie $(f^{-1})'(1)$.

b) Beweisen Sie: Die Funktion $f(x) = \arctan(2x) - \dfrac{3}{2}x$ hat im Intervall $[\dfrac{1}{2}, 1]$ genau eine Nullstelle. Rechner dürfen bei dieser Aufgabe (etwa zur Berechnung von Funktionswerten) nicht eingesetzt werden!
Hinweis: $f(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} > 0$ (bekannt). Damit folgt $f(1) < 0$ aus dem Mittelwertsatz (wie?).

Viel Erfolg !