Aufgabe 1 **(3 Punkte)**

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$3 \sum_{j=1}^{n} \left(j^2 - j\right) = n^3 - n \qquad \text{für alle } n \geq 1.$$

Aufgabe 2 **(3 Punkte)**

Seien M_1, M_2, M_3 Mengen und seien $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$ Funktionen. Beweisen Sie: Sei $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, dann ist g injektiv.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) := e^x$ für $x \in \mathbb{R}$. Überprüfen Sie, ob g injektiv und surjektiv ist. Schränken Sie den Definitionsbereich und den Bildbereich so ein, dass g bijektiv wird. Achten Sie hierbei darauf, dass das Bild von g nicht verändert wird.

Aufgabe 4 **(2 Punkte)**

Zeigen Sie, dass jede konvergente, reelle Folge (a_n) beschränkt ist.

Aufgabe 5 **(3 Punkte)**

Sei (a_n) eine reelle Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = a > 0$. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert.

Aufgabe 6 **(3 Punkte)**

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert

$$a_n := \sqrt{n}\left(\sqrt{n-1} - \sqrt{n}\right), \qquad b_n := \frac{n^3 + \sin(n)}{2n^3 + 13n}.$$

Aufgabe 7 **(4 Punkte)**

Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(1-\cos x)}{x - \sin x}$.

Aufgabe 8 **(5 Punkte)**

Sei $f : [-1, 8] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1-\cos x} & \text{für } x \in [-1,8] \setminus \{0, \pi, 2\pi\}, \\ 2 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x = \pi, \\ 2 & \text{für } x = 2\,\pi. \end{cases}$$

Untersuchen Sie f auf Stetigkeit.

Aufgabe 9 **(2 Punkte)**

Geben Sie eine Definition der Begriffe „Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt“ und „Häufungspunkt einer Folge“ an.

Aufgabe 10 **(6 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x \exp(-x^2/2)$. Bestimmen Sie die Nullstellen, die Extremstellen und das Bild von f. Skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe 11 **(6 Punkte)**

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf bedingte und absolute Konvergenz:

$$A := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2}, \qquad B := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}, \qquad C := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Aufgabe 12 **(2 Punkte)**

Sei $x \in \mathbb{R}$ und seien U_1, U_2 Umgebungen von x. Zeigen Sie, dass $U_1 \cap U_2$ eine Umgebung von x ist.

Aufgabe 13 **(7 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$$\int x \, \ln x \, dx, \qquad \int \arctan x \, dx, \qquad \int \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \, dx.$$

Aufgabe 14 **(4 Punkte)**

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über die Ableitung einer Umkehrfunktion, dass

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Aufgabe 15 **(3 Punkte)**

Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ein Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert, d.h. $f_n \rightrightarrows f$. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

Aufgabe 16 **(3 Punkte)**

Zeigen Sie, dass das Cauchyprodukt der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-1/2}$ mit sich selbst nicht konvergiert.