Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Dr. Axel Grünrock

SS 2010
28.07.2010

Klausur zu Analysis I – Lösungen

1. a) Formulieren Sie das Induktionsprinzip. (2 P.)

Lösung: Das Induktionsprinzip wurde in der Vorlesung in zwei Versionen formuliert:

1. Es seien $n_0 \in \mathbb{Z}$ und für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ eine Aussage $A(n)$ gegeben. Es gelte

(i) $A(n_0)$ ist richtig;

(ii) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$.

Dann ist $A(n)$ richtig für alle $n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$.

2. In der zweiten Version wurde (ii) ersetzt durch

(ii') $A(n_0), A(n_0+1), \ldots, A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$.

b) Zeigen Sie per Induktion über n

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

(3 P.)

Lösung: Für $n = 1$ erhält man in beiden Fällen $\frac{1}{2}$. Im Induktionsschritt hat man

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}.$$

2. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich.

a) Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist charakterisiert als ein vollständiger, archimedisch angeordneter Körper. (+2/-1 P.)

Falsch, $\mathbb{C}$ ist nicht angeordnet.

b) Zu jeder nach unten beschränkten Menge $A \subset \mathbb{R}$ existiert eine größte untere Schranke. (+2/-1 P.)

Richtig, vgl. Abschnitt 2.4 der Vorlesung, dort Satz 6 und Folgerung 3

c) Unter der Vollständigkeit der reellen Zahlen versteht man, dass jede konvergente Folge in $\mathbb{R}$ eine Cauchy-Folge ist. (+2/-1 P.)

Falsch. Vollständigkeit bedeutet, dass jede Cauchy-Folge konvergiert. Die Umkehrung (jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge) gilt stets, unabhängig von der Vollständigkeit.

d) Jede differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar. (+2/-1 P.)

Richtig, denn Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit, und jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ist integrierbar.

e) Zu jeder absolut konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ existiert eine Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}| = \infty$. (+2/-1 P.)

Falsch. Vgl. die Sätze 1 und 2 in Abschnitt 3.2 der Vorl..

3. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:
   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^2 - (n+1)^2}{n}$ (2 P.)
   b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}(\cos(x) - 1)$ (2 P.)
   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} (\dfrac{2+i}{4})^k$ (2 P.)
   d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^5}(\sin(x) - x + \dfrac{x^3}{6})$ (2 P.)
   e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$, hierbei $0 < a \leq b$. (2 P.)

   Hinweis zu e): Sandwich-Theorem

Lösung: Die richtigen Grenzwerte sind a) 2 ; b) 0 (Ableitung des cos in Null) ; c) $\frac{1}{1-\frac{2+i}{4}} = \frac{8}{5} + \frac{4i}{5}$ (geometrische Reihe); d) $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$ (Taylor'sche Formel oder wiederholte Anwendung der l'Hospital'schen Regel); e) b, da $b = \sqrt[n]{b^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2b^n} = \sqrt[n]{2}b \to b$.

4. Gegeben seien die Potenzreihen

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$$

Untersuchen Sie, für welche $z \in \mathbb{C}$ diese Reihen konvergieren, absolut konvergieren bzw. divergieren. Begründen Sie Ihre Aussagen! (Beachten Sie, dass ggf. eine spezielle Untersuchung für den Rand des Konvergenzkreises erforderlich ist.) (2/3/5 P.)

Lösung:

zu (a) Für den Konvergenzradius haben wir

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{-n}}} = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Also konvergiert die Reihe absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.

zu (b) Den Konvergenzradius berechnet man nach Cauchy-Hadamard zu

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{-2}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1.$$

Hieraus folgt, dass die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ absolut konvergiert, während sie für $|z| > 1$ divergiert. Falls $|z| = 1$ ist, gilt $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert (Vorlesung), konvergiert die Reihe absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

zu (c) Ähnlich wie in (b) ergibt sich $R = 1$ und damit absolute Konvergenz für $|z| < 1$ sowie Divergenz für $|z| > 1$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert, hieraus folgt: Die Reihe in (c) ist divergent für $z = 1$, sie ist nicht absolut konvergent für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit $|z| = 1$ konvergiert die Reihe nach dem verallgemeinerten Leibniz-Kriterium.

5. a) Unter Verwendung der Eulerschen Formel oder der Additionstheoreme beweise man

(i) $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$ (3 P.)

(ii) $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$ (3 P.)

b) Berechnen Sie – ausgehend von $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ – die exakten Werte von $\cos(\frac{\pi}{6})$, $\sin(\frac{\pi}{6})$, $\cos(\frac{\pi}{3})$ und $\sin(\frac{\pi}{3})$. (4 P.)

Lösung zu a): Mit der Euler'schen Formel haben wir

$$\begin{aligned} \cos 3x + i \sin 3x = e^{i3x} &= (e^{ix})^3 = (\cos x + i \sin 3x)^3 \\ &= \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x. \end{aligned}$$

Zerlegung in Real- und Imaginärteil liefert

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x,$$

(wobei im letzten Schritt der Pythagoräische Lehrsatz verwendet wurde) sowie

$$\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

Etwas umständlicher ist die Verwendung der Additionstheoreme, die hier für Teil (i) dargestellt sei:

$$\begin{aligned} \cos 3x = \cos(2x + x) &= \cos(2x) \cos x - \sin(2x) \sin x \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x. \end{aligned}$$

Jetzt führt ebenfalls der Satz des Pythagoras zum Ziel.

Lösung zu b): Unter Verwendung von a) ergibt sich

$$0 = \cos \frac{\pi}{2} = \cos(3\frac{\pi}{6}) = 4 \cos^3 \frac{\pi}{6} - 3 \cos \frac{\pi}{6}.$$

Da $\cos \frac{\pi}{6} > 0$, folgt $4 \cos^2 \frac{\pi}{6} = 3$ bzw. $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Da auch $\sin \frac{\pi}{6} > 0$ folgt mit Pythagoras $\sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$. Weitere Anwendungen der Additionstheoreme liefern $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ sowie $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Bestimmen Sie alle Extremalstellen (und deren Typ) der Funktion

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \ \ x \mapsto f(x) := x^x.$$

In welchen Fällen liegt ein globales Extremum vor? (5 P.)

Lösung: Wir haben $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$ und damit $f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{e}$, also kann nur in $x = \frac{1}{e}$ ein Extremum liegen (Randextrema sind durch die Aufgabenstellung ausgeschlossen). Da auf $(0, \frac{1}{e})$ $f'(x) < 0$ gilt, ist f auf $(0, \frac{1}{e}]$ monoton fallend. Ebenso sieht man, dass f auf $[\frac{1}{e}, \infty)$ monoton wachsend ist. Die Folgerung hieraus ist, dass in $\frac{1}{e}$ ein globales Minimum vorliegt.

7. Die Logarithmusfunktion

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \ \ x \mapsto \ln(x)$$

ist als Umkehrfunktion von exp stetig. Untersuchen Sie, ob ln auf den Intervallen

(a) $[1, \infty)$ und (b) $(0, 1]$

gleichmäßig stetig ist. Formulieren Sie jeweils eine Aussage, und beweisen Sie diese. (2/3 P.)

Lösung zu a): Auf $[1, \infty)$ ist ln gleichmäßig stetig, da auf diesem Intervall $\ln'(x) = \frac{1}{x} \leq 1$ gilt. Der Schrankensatz ergibt hier Lipschitz- und damit glm. Stetigkeit.

Lösung zu b): Auf (0,1] ist ln *nicht* glm. stetig. Zum Beweis verwende man das Folgenkriterium, etwa mit $x_n = \frac{1}{n}$ und $y_n = \frac{1}{2n}$.

Die Klausur gilt mit 25 (bzw. mit 20) Punkten als bestanden.