TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Ferus

WS 06/07
13.2.2007

Analysis I–Klausur

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Geben Sie bei allen Antworten eine Begründung bzw. einen Beweis an.

Für die Bearbeitung der Aufgaben stehen Ihnen 90 Minuten zur Verfügung.
Ausser Stiften und Papier sind keine weiteren Hilfsmittel erlaubt (insbesondere sind Handys und Taschenrechner NICHT zugelassen).

Bitte benutzen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.

Beginnen Sie mit den Aufgaben(teilen), die Ihnen am leichtesten fallen. Die Aufgaben sind nach Themengebieten geordnet.
Die Klausur ist mit 18 Punkten bestanden.

1	2	3	4	$\sum$

1. Aufgabe

(12 Punkte)

(Thema: Folgen, Reihen)

a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch:

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

(Hinweis: Benutzen Sie das Vollständigkeitsaxiom. Sie dürfen im Beweis unbewiesen benutzen, dass die Wurzelfunktion eine streng monoton wachsende und stetige Funktion ist.)

b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

i) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{4^k}$

ii) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k-1}{4^k}$ (Geben Sie hierfür auch den Grenzwert an.)

2. Aufgabe (10 Punkte)

(Thema: Stetigkeit)

a) Bestimmen Sie ein reelles a so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x^2-1} & \text{, falls } |x| \neq 1 \\ a & \text{, falls } x = 1 \end{cases}$$

stetig wird und zeigen Sie, dass sich f in $x = -1$ nicht stetig fortsetzen lässt.

b) Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Definieren Sie folgende Begriffe:

i) f ist stetig auf I.

ii) f ist gleichmässig stetig auf I.

c) Geben Sie ein Beispiel einer stetigen, aber nicht gleichmässig stetigen Funktion auf dem halboffenen Intervall $I =]0, 1]$ an (ohne Beweis).

Geht das auch, wenn $I = [0, 1]$ ist? (mit Begründung!)

3. Aufgabe (5 Punkte)

(Thema: Taylorpolynom)

Sei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion, die die folgende Differentialgleichung löst:

$$y'(x) = x + \sin(y(x)),\ y(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3. Grades von y im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

4. Aufgabe (9 Punkte)

(Thema: Integration)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

b) $\int x^2 e^{\lambda x} dx,\ \lambda \in \mathbb{R}$

c) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$

Gesamtpunktzahl: 36