Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2011/2012

Klausur zu Analysis I

im Studiengang 1-Fach-Bachelor Mathematik

13. Februar 2012

Für die Bearbeitung der folgenden 8 Aufgaben werden bei vollständig richtiger Bearbeitung jeweils 10 Punkte vergeben. Wer insgesamt 32 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden. Jede Aufgabe ist auf einem separaten Blatt zu bearbeiten. Jedes Blatt ist mit Matrikelnummer und Namen zu versehen.
Viel Erfolg!

Bearbeitungszeit: 2 Stunden und 40 Minuten

1. Wie lautet
   (a) die Definition der Transitivität einer Relation?
   (b) die Definition der gleichmäßigen Konvergenz einer Funktionenfolge?
   (c) die Definition der Konvexität einer Funktion?

2. Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv. Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = f(x)g(y)$. Untersuchen Sie h auf Injektivität und Surjektivität.

3. Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{2n+3}$.

4. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n+1} z^n$.

5. Zeigen Sie, dass die Gleichung
$$\cos x = 1 - \frac{x}{\pi}$$
eine Lösung im Intervall $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ hat.

6. Bestimmen Sie die Stellen, an denen die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = 6 \arctan(\sqrt{x}) - \ln(1 + x)$$
ein lokales Minimum oder Maximum hat.

7. Bestimmen Sie $\limsup\limits_{n\to\infty} \cos(\pi n + e^{-n})$.

8. Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Zeigen Sie, dass M stetig ist.