5. Lösen Sie folgende Schulbuchaufgaben. (Dabei gehört zu einer Funktionsuntersuchung die Bestimmung des maximalen Definitionsbereiches, der Monotonie- und Konvexitätsintervalle sowie die Untersuchung des Verhaltens an den Rändern des Definitionsbereiches, etwa Grenzwerte für $x \to \pm\infty$.)

Führen Sie eine Funktionsuntersuchung durch und zeichnen Sie den Graphen.

a) $f(x) = x - e^x$ b) $f(x) = e \cdot x + e^{-x}$ c) $f(x) = x - \ln(x)$ d) $f(x) = x + \ln\left(\frac{2}{x}\right)$

e) $f(x) = (x-2) \cdot e^x$ f) $f(x) = x \cdot e^{-2x} + 2$ g) $f(x) = 4 \cdot x^2 \cdot e^{-x}$ h) $f(x) = 3 \cdot e^{-x^2}$

i) $f(x) = x^3 \cdot e^{-x}$ j) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{e^x}}$ k) $f(x) = 3 \cdot \frac{x\sqrt{x}}{e^x}$ l) $f(x) = \frac{x^2 + x}{e^x}$

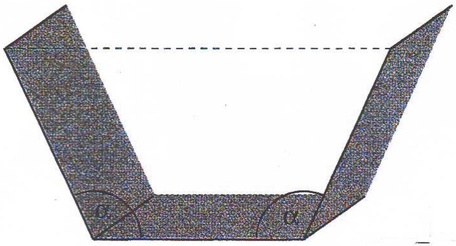

Fig. 2

Aus drei gleich breiten Brettern soll eine Rinne hergestellt werden, die oben offen ist. Fig. 2 zeigt einen Querschnitt dieser Rinne.
Wie ist der Winkel α zu wählen, damit das Fassungsvermögen der Rinne möglichst groß wird?

Ermitteln Sie Lösungen aus dem Intervall $[-\pi; \pi]$, ggf. näherungsweise mit dem NEWTON-Verfahren.

a) $\sin^2(3x) + \sin(3x) = 0$ b) $\tan\left(\frac{1}{2}x\right) = 2x$ c) $-\sin(x+3) + 2 \cdot \cos^2(x+3) = 1$

6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\arctan x}$. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(x, f, 0)$ und zeigen Sie, dass das Restglied $R_2(x) = R_2(x, f, 0)$ für $x \in [-1, 1]$ der Abschätzung

$$|R_2(x)| \leq \frac{11}{6} \exp\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot |x|^3$$

genügt.

7. Zeigen Sie, dass die Behauptung von Satz 4.3.7 der Vorlesung auch dann gilt, wenn f nur als einmal stetig differenzierbar vorausgesetzt wird (und nicht als zweimal stetig differenzierbar wie in der Vorlesung).
Zeigen Sie auch, dass es nicht reicht, f nur als differenzierbar vorauszusetzen.