Analysis I
Serie 14

1. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x\cos x)}{e^{2x}-1}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{\arcsin x} - \dfrac{\cosh x}{\arctan x}$

   (c) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

   (d) $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\arctan x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

   (e) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

2. Sei $t > 0$ und sei
$$f : \mathbb{R}_+ \backslash \left\{\frac{1}{t}\right\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\ln(xt)}.$$
Berechnen Sie die Tangenten an den Graphen von f, die durch den Punkt $(0, 2)$ gehen.

   Bemerkung: Diese Aufgabe war Teilaufgabe einer Abituraufgabe.

3. Berechnen Sie die lokalen Extrema der Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + \sqrt{2+x^2}\,.$$
Berechnen Sie auch die Grenzwerte
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \text{ und } \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}\,.$$
Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
Zeigen Sie, dass f unendlich oft differenzierbar ist und dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass es eine Folge (P_n) von Polynomen gibt, so dass $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt.