Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2006/07

Analysis I
Serie 13

1. Auf welcher Teilmenge D von $\mathbb{R}$ kann durch
$$x \mapsto 2 \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$
eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ definiert werden?
Wo ist f differenzierbar? Vergleichen Sie die Ableitung von f mit der des Arcus Sinus und des Arcus Cosinus. Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen Funktionen, vgl. Satz 4.3.1 der Vorlesung.

   Bemerkung: Diese Aufgabe ist im wesentlichen eine Schulbuchaufgabe. (Die Originalaufgabe des Schulbuches enthält auch die Berechnung eines Flächeninhalts, aber dieses Thema werden wir erst im zweiten Semester behandeln.)

2. Bestimmen Sie die lokalen Extrema der folgenden Funktionen:
   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 4\ln(\sqrt{x^2+3}) + x$
   (b) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln x + \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

3. Sei I Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und in $\operatorname{int}(I)$ zweimal differenzierbar. Es gelte $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$. Zeigen Sie, dass f streng konvex ist.

   Bemerkung: Dies ist eine der Aussagen von Satz 4.3.4.

4. In eine halbkugelförmige Schale mit dem Radius 1 wird ein Stab der Länge 2 gelegt. Bei welcher Lage des Stabes liegt sein Mittelpunkt am tiefsten?

   Bemerkung: Diese Aufgabe ist einem Schulbuch entnommen.

Die Lösungen der ersten beiden Aufgaben sind bis zum Montag, dem 05.02.2007, 10.00 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen. Die Lösungen der dritten und vierten Aufgabe sind dem Übungsleiter nach Terminabsprache in dessen Sprechstunden zu erläutern.