Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2006/07

Analysis I
Serie 12

1. Beweisen Sie die Quotientenregel (Satz 4.1.3, (iv), der Vorlesung).

2. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie ihre Ableitung:

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{\sin x} \cos x$

   (b) $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \arctan(\sqrt{\ln x})$

   (c) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$

3. Berechnen Sie eine Lösung der Gleichung $x^3 = 6x + 2$. (Die auftretenden Werte der trigonometrischen und inversen trigonometrischen Funktionen müssen nicht vereinfacht werden.)
   Hinweis: Nach §1.9 der Vorlesung ist mit $y = \sqrt[3]{1 + \sqrt{-7}}$ eine Lösung durch $x = y + 2/y$ gegeben, *vorausgesetzt, dass der Ausdruck* $\sqrt[3]{1 + \sqrt{-7}}$ *mit Sinn erfüllt werden kann.*

4. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ und $g_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) = xe^{-nx}$ und $g_n(x) = nxe^{-nx}$.
   Zeigen Sie, dass (f_n) gleichmäßig gegen 0 und dass (g_n) punktweise aber nicht gleichmäßig gegen 0 konvergiert.

Die Lösungen der ersten beiden Aufgaben sind bis zum Freitag, dem 26.01.2007, 10.00 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen. Die Lösungen der dritten und vierten Aufgabe sind dem Übungsleiter nach Terminabsprache in dessen Sprechstunden zu erläutern.