Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2006/07

Analysis I
Serie 11

1. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= 2\sin x\cos x, \\ \cos(2x) &= 2\cos^2 x - 1, \\ \sin(3x) &= -4\sin^3 x + 3\sin x, \\ \cos(3x) &= 4\cos^3 x - 3\cos x. \end{aligned}$$

   Folgern Sie hieraus:

$$\begin{aligned} \cos\tfrac{\pi}{4} &= \sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \\ \cos\tfrac{\pi}{6} &= \sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \\ \cos\tfrac{\pi}{3} &= \sin\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

   und

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

3. Zeigen Sie, dass die Folgen (a_k) und (b_k) aus Aufgabe 3 der Serie 6 durch

$$a_k = 2^{k+1} \cdot 3\tan\left(\frac{\pi}{2^k 3}\right)$$

   und

$$b_k = 2^{k+1} \cdot 3\sin\left(\frac{\pi}{2^k 3}\right)$$

   gegeben sind. Folgern Sie hieraus, dass

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 2\pi.$$

   Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 1, dass die rechten Seiten der obigen Gleichungen die gleichen Rekursionsformeln erfüllen wie die a_k und b_k. Benutzen Sie Aufgabe 2 für die Berechnung des Grenzwerts.

4. Zeigen Sie, dass $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv ist.

Die Lösungen der ersten beiden Aufgaben sind bis zum Freitag, dem 19.01.2007, 10.00 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen. Die Lösungen der dritten und vierten Aufgabe sind dem Übungsleiter nach Terminabsprache in dessen Sprechstunden zu erläutern.