Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2006/07

Analysis I
Serie 10

1. Sei $A \subset M \subset \mathbb{C}$ und sei $f : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

   (a) f ist stetig in A,

   (b) $f|A$ ist stetig.

   Folgt (b) aus (a)? Folgt (a) aus (b)? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel für diese Implikationen an.

2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige und beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass ein $x \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) = x$.

3. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,
$$z \mapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{\sqrt{|z|}}, & \text{falls } z \neq 0, \\ 0, & \text{falls } z = 0. \end{cases}$$
   stetig ist.

4. Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad d, das heißt, es existieren $a_0, a_1, ..., a_d \in \mathbb{R}$ mit $a_d \neq 0$, so dass
$$p(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$$
   für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist d ungerade, so existiert $x \in \mathbb{R}$ mit $p(x) = 0$.

Die Lösungen der ersten beiden Aufgaben sind bis zum Freitag, dem 12.01.2007, 10.00 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen. Die Lösungen der dritten und vierten Aufgabe sind dem Übungsleiter nach Terminabsprache in dessen Sprechstunden zu erläutern.

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!