Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2006/07

**Analysis I**
**Serie 9**

1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Sei $r$ der Konvergenzradius der zugehörigen Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \le r \le \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

2. Für $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $k \in \mathbb{N}$ sei

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} = \prod_{j=1}^{k}\frac{\alpha+1-j}{j}$$

und

$$\binom{\alpha}{0} := 1.$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} z^k.$$

**Bemerkung:** Für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ erhält man die bereits früher definierten Binomialkoeffizienten.

3. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}z^n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}z^{n^2}.$$

4. Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)} \text{ und } |\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}\ z).$$

Die Lösungen der ersten beiden Aufgaben sind bis zum Freitag, dem 22.12.2006, 10.00 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen. Die Lösungen der dritten und vierten Aufgabe sind dem Übungsleiter nach Terminabsprache in dessen Sprechstunden zu erläutern.