Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2006/07

Analysis I
Serie 8

1. Sei (a_n) reelle Zahlenfolge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Zeigen Sie, dass eine Zahlenfolge (e_n) existiert, wobei $e_n = 1$ oder $e_n = -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so dass
$$\sum_{n=1}^{\infty} e_n a_n$$
konvergiert.

2. Untersuchen Sie die Reihen
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1} \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$$
auf Konvergenz.

3. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Für $n \in \mathbb{N}$ sei
$$a_n^+ := \max\{a_n, 0\} \text{ und } a_n^- := \max\{-a_n, 0\}.$$
Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen:

   (a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist genau dann absolut konvergent, wenn die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergieren.

   (b) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bedingt konvergent, so gilt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.

4. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 3^n}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{3}{n!}}{\sqrt{n}\sqrt[n]{n}}.$$

Die Lösungen der ersten beiden Aufgaben sind bis zum Freitag, dem 15.12.2006, 10.00 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen. Die Lösungen der dritten und vierten Aufgabe sind dem Übungsleiter nach Terminabsprache in dessen Sprechstunden zu erläutern.