Analysis I
Serie 6

1. Für $n \in \mathbb{N}$ sei
$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}.$$
Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) konvergiert.

2. Sei (a_n) konvergente Zahlenfolge. Zeigen Sie, dass dann auch die durch
$$b_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$
definierte Zahlenfolge (b_n) konvergiert und dass
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$
gilt.

3. Für $k \in \mathbb{N}$ sei a_k der Umfang des regelmäßigen $2^k 3$-Ecks, dessen Inkreis den Radius 1 hat, und es sei b_k der Umfang des regelmäßigen $2^k 3$-Ecks, dessen Umkreis den Radius 1 hat. Archimedes hat die Rekursionsformeln
$$a_{k+1} = \frac{2a_k b_k}{a_k + b_k}$$
und
$$b_{k+1} = \frac{\sqrt{2a_k}b_k}{\sqrt{a_k + b_k}}$$
gefunden. Berechnen Sie $a_1, \dots, a_5, b_1, \dots, b_5$ und zeigen Sie, dass die Folgen (a_k) und (b_k) konvergent sind und einen gemeinsamen Grenzwert haben. (Archimedes hat a_5 und b_5 berechnet bzw. durch Abschätzung der auftretenden Wurzelterme obere und untere Schranken dafür gegeben.)

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass (a_k) monoton fallend und (b_k) monoton steigend ist.

4. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge (a_n) für

   (a)
$$a_n := \frac{3i(4+5i)^n + 6^n}{7(4+5i)^{n+1} + 8 + 9i}$$

   (b)
$$a_n := \sqrt{4^n + 2^n} - \sqrt{4^n}$$

Bemerkung: Aufgabe 4(b) ist einem Schulbuch entnommen.

Die Lösungen der ersten beiden Aufgaben sind bis zum Freitag, dem 01.12.2006, 10.00 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen. Die Lösungen der dritten und vierten Aufgabe sind dem Übungsleiter nach Terminabsprache in dessen Sprechstunden zu erläutern.