Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2006/07

Analysis I
Serie 5

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $I(n)$ ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte $I(n+1) \subset I(n)$. Zeigen Sie, dass

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I(n) \neq \emptyset \ .$$

Hinweis: Man betrachte $a(n) := \inf I(n)$ sowie $A = \{a(n) : n \in \mathbb{N}\}$ und zeige, dass $\sup A$ in $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I(n)$ liegt.

2. Bestimmen Sie $x, y \in \mathbb{C}$ so, dass

$$\begin{aligned} (2+i)x - (-3+i)y &= 4 - 3i \\ (1-4i)x + (2-3i)y &= 2 - 14i \end{aligned}$$

3. (a) Zeigen Sie, dass für $A, B \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|A+B|^2 + |A-B|^2 = 2(|A|^2 + |B|^2)$$

Warum heißt diese Gleichung Parallelogrammidentität?

(b) Bestimmen und skizzieren Sie die Menge

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 3\right\} \ .$$

4. Seien $u, v \in \mathbb{C}$ mit $u^2 = 3 - i2\sqrt{3}$ und $v^2 = 3 + i2\sqrt{3}$. Weiter seien

$$z_{1,2} = i\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{u}{2} \text{ und } z_{3,4} = -i\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{v}{2} \ .$$

Zeigen Sie, dass durch z_1, z_2, z_3, z_4 die Lösungen der Gleichung

$$z^4 - 3z + 3 = 0$$

gegeben sind. Berechnen Sie $\operatorname{Re} z_j$ und $\operatorname{Im} z_j$ für $j = 1, 2, 3, 4$.

Bemerkung: Die Aufgaben 2 und 3 sind Schulbüchern entnommen.

Die Lösungen der ersten beiden Aufgaben sind bis zum Freitag, dem 24.11.2006, 10.00 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen. Die Lösungen der dritten und vierten Aufgabe sind dem Übungsleiter nach Terminabsprache in dessen Sprechstunden zu erläutern.