Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2006/07

Analysis I
Serie 4

1. Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ angeordneter Körper. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in K$ die folgenden Aussagen gelten:

   (a) $xy > 0 \Leftrightarrow (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)$,

   (b) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine monoton wachsende Funktion. Zeigen Sie, dass $p \in [a, b]$ mit $f(p) = p$ existiert.

   Hinweis: Betrachten Sie die Menge $\{x \in [a, b] : f(x) \geq x\}$.

3. Eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Polynom vom Grad* d, falls $a_0, a_1, ..., a_d \in \mathbb{R}$ mit $a_d \neq 0$ existieren, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$p(x) = \sum_{j=0}^{d} a_j x^j$$

   gilt. Auch die Nullfunktion (d.h., die durch $x \mapsto 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definierte Funktion) wird als Polynom betrachtet, aber diese hat keinen Grad. (Manchmal wird der Grad auch als $-\infty$ definiert.) Zwei Polynome p und q heißen *teilerfremd*, wenn es keine Polynome p_0, q_0, r mit $p = p_0 r$ und $q = q_0 r$ gibt, wobei r mindestens den Grad 1 hat. Ein Polynom vom Grad d hat höchstens d Nullstellen (vgl. § 1.9). Eine Funktion von $\mathbb{R} \backslash q^{-1}(0)$ nach $\mathbb{R}$ der Form

$$x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

   heißt *rationale Funktion*, falls p und q teilerfremde Polynome sind und q nicht die Nullfunktion ist.

   Mit der natürlichen Addition und Multiplikation bilden die Polynome einen Integritätsbereich und die rationalen Funktionen einen Körper. (Letzterer kann auch als Quotientenkörper des Rings der Polynome aufgefasst werden.)

   Zu jeder rationalen Funktion r existiert $x_r \in \mathbb{R}$, so dass entweder $r(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > x_r$ oder $r(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > x_r$ gilt. Auf der Menge der rationalen Funktionen sei nun eine Relation $\prec$ wie folgt definiert: Sind r und s rationale Funktionen, so sei $r \prec s$ falls $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $s(x) - r(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > x_0$.

   Zeigen Sie:

   (a) $\prec$ ist Ordnung auf der Menge R der rationalen Funktionen.

   (b) $(R, +, \cdot, \prec)$ ist angeordneter Körper.

   (c) $(R, +, \cdot, \prec)$ ist nicht vollständig.

4. Seien A, B nach oben beschränkte, nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass auch

$$A + B := \{a + b : \ a \in A, \ b \in B\}$$

nach oben beschränkt ist und dass

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

gilt. Gilt eine entsprechende Aussage auch für

$$A \cdot B := \{a \cdot b : \ a \in A, \ b \in B\}?$$

Bestimmen Sie die Mengen $A + B$ und $A \cdot B$ für $A = [-2, 1)$ und $B = (-3, 2]$.

Die Lösungen der ersten beiden Aufgaben sind bis zum Freitag, dem 17.11.2006, 10.00 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen. Die Lösungen der dritten und vierten Aufgabe sind dem Übungsleiter nach Terminabsprache in dessen Sprechstunden zu erläutern.