Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2006/07

**Analysis I**
**Serie 3**

1. Seien $M$ und $N$ Mengen und sei $f : M \to N$ eine Funktion.
   (a) Sei $A \subset M$. Welche Inklusion gibt es zwischen den Mengen $A$ und $f^{-1}(f(A))$? Unter welchen Voraussetzungen an $f$ gilt $f^{-1}(f(A)) = A$?
   (b) Sei $B \subset N$. Untersuchen Sie analog zu (a) die Beziehung zwischen den Mengen $B$ und $f(f^{-1}(B))$.

2. Zeigen Sie, dass für $k, n \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq k < n$ die Gleichung
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$
gilt. Folgern Sie hieraus die Binomische Formel: Ist $K$ Körper, $a, b \in K$ und $n \in \mathbb{N}$, so gilt
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

3. Beweisen Sie Satz 1.5.2 der Vorlesung.

4. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung
$$2(\sqrt{n+1} - 1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$$
gilt.

Die Lösungen der ersten beiden Aufgaben sind bis zum Freitag, dem 10.11.2006, 10.00 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen. Die Lösungen der dritten und vierten Aufgabe sind dem Übungsleiter nach Terminabsprache in dessen Sprechstunden zu erläutern.