

Analysis I
Serie 2

1. Bestimmen Sie die Menge $P(P(P(\emptyset))) \setminus P(P(\emptyset))$.
2. Sei $M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sei

$$R := \{(4, 1), (4, 4), (5, 5), (3, 6), (1, 5), (3, 3), (5, 4), (1, 1), (6, 6)\}.$$

- (a) Überprüfen Sie, ob die Relation R auf M reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv ist.
 - (b) Welche Elemente aus $M \times M$ müssen R mindestens hinzugefügt werden, um insgesamt eine Äquivalenzrelation zu erhalten? Wie sehen dann die Äquivalenzklassen aus?
 - (c) Lässt sich R durch das Hinzufügen von Elementen aus $M \times M$ zu einer Halbordnung machen?
3. Sei M die Menge der lateinischen Buchstaben, und sei \prec die alphabetische Ordnung auf M (man vergewissere sich, dass es sich dabei auch um eine Ordnung handelt). Man stelle sich ein Lexikon L vor, das (der Einfachheit halber) genau die Wörter enthalte, die aus zwei lateinischen Buchstaben bestehen (d. h. $L = M \times M$). Definieren Sie eine Ordnung auf L , die die Vorstellung vom Begriff der lexikographischen Ordnung formalisiert.
 4. Sei \mathbb{P} die Menge der Primzahlen. Schreiben Sie die folgenden Aussagen (a) und (b) als deutschen Satz und schreiben Sie die Aussagen (c) und (d) mit Hilfe von Quantoren als Formel

(a) $\forall n \in \mathbb{N} \exists p \in \mathbb{P} : n < p \wedge p \leq 2n$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} : ((n \geq 4 \wedge 2|n) \Rightarrow \exists p \in \mathbb{P} \exists q \in \mathbb{P} : n = p + q)$

- (c) Jede Primzahl, die bei Division durch 4 den Rest 1 liefert, kann als Summe von zwei Quadratzahlen geschrieben werden.
- (d) Es gibt eine Quadratzahl, die als Summe von zwei Quadratzahlen geschrieben werden kann. Die entsprechende Aussage für dritte und höhere Potenzen natürlicher Zahlen ist falsch.

Dabei ist in (c) und (d) mit Quadratzahl das Quadrat einer natürlichen Zahl gemeint.

Was können Sie zum Wahrheitsgehalt der obigen Aussagen sagen?

Die Lösungen der ersten beiden Aufgaben sind bis zum Freitag, dem 03.11.2006, 10.00 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen.