Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2006/2007

Nachholklausur zur Analysis I

29. März 2007

Für die Bearbeitung der folgenden 9 Aufgaben werden jeweils maximal 6 Punkte vergeben. Wer insgesamt 24 Punkte erreicht hat, hat die Klausur bestanden.

Jede Aufgabe ist auf einem separaten Blatt zu bearbeiten. Jedes Blatt ist mit Matrikelnummer und Name zu versehen.
Bearbeitungszeit: 3 Stunden

1. Wie lautet
   (a) die Definition der Injektivität einer Funktion?
   (b) die Definition der Kompaktheit?
   (c) das Cauchy-Kriterium für Reihen?

2. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung
$$n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n$$
gilt.

3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und sei
$$A := \sup_{x\in\mathbb{R}} \inf_{y\in\mathbb{R}} f(x,y) \quad \text{und} \quad B := \inf_{y\in\mathbb{R}} \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x,y).$$
Gilt unter diesen Voraussetzungen immer $A \leq B$? Oder gilt immer $B \leq A$? Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass im Allgemeinen $A \neq B$ gilt.

4. (a) Bestimmen Sie den Grenzwert
$$\lim_{n\to\infty} \left(0,99 + \frac{1}{n}\right)^n$$
   (b) Untersuchen Sie die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{\log(k+1)}}$$
auf Konvergenz.

5. Sei $a_1 \in [0,1]$. Die reelle Zahlenfolge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2n} a_n + \frac{n-1}{n}.$$

Zeigen Sie, dass (a_n) konvergiert und bestimmen Sie $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

6. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$z \mapsto \begin{cases} \dfrac{(|z|^2 - 1)^2}{|z-1|^2} & , \qquad \text{falls } z \neq 1, \\ 4 & , \qquad \text{falls } z = 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f|\mathbb{R}$ stetig ist, aber f unstetig ist.

7. Sei I Intervall und $f : I \to I$ stetig. Es existiere $\alpha \in I$ mit $f(f(\alpha)) = \alpha$. Zeigen Sie, dass $\beta \in I$ mit $f(\beta) = \beta$ existiert.

8. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$-\arctan(-x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

gilt.

9. Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{x^2+4} - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) .$$

Viel Erfolg!