Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2006/2007

Klausur zu Analysis I

3. Februar 2007

Für die Bearbeitung der folgenden 9 Aufgaben werden jeweils maximal 6 Punkte vergeben. Wer insgesamt 24 Punkte erreicht hat, hat die Klausur bestanden.

Jede Aufgabe ist auf einem separaten Blatt zu bearbeiten. Jedes Blatt ist mit Matrikelnummer und Name zu versehen.

Bearbeitungszeit: 3 Stunden

1. Wie lautet
   (a) die Definition der Injektivität einer Funktion?
   (b) das Leibnizkriterium (für Reihen)?
   (c) der Mittelwertsatz?

2. Seien M und N nicht-leere Mengen und sei $\leq$ eine Ordnung auf N. Sei $X := \{f : M \to N\}$. Die Relation $\prec$ auf X sei definiert durch
$$f \prec g :\Leftrightarrow \forall\, m \in M :\ f(m) \leq g(m)\ .$$
   Zeigen Sie:
   (a) $\prec$ ist eine Halbordnung auf X.
   (b) $\prec$ ist im Allgemeinen keine Ordnung auf X.

3. Sei $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{4x}{(x+1)^2}.$$
   Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass f beliebig oft differenzierbar ist und dass
$$f^{(n)}(x) = (-1)^n\, n!\, \frac{4(x-n)}{(x+1)^{n+2}}$$
   für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ gilt.

4. Bestimmen und skizzieren Sie die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ mit
$$|z|^2 + 2\mathrm{Re}(z^2) - 2(\mathrm{Re}\, z)^2 - 2\mathrm{Im}(\bar{z}) = 1.$$

5. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Zahlenfolge. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^n} = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$

6. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-3n-1} \binom{2n}{n} z^n.$$

7. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, monoton steigende Funktion, die nicht beschränkt ist. Zeigen Sie, dass ein $x \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) - f(-x) = 1$$

existiert.

8. (a) Ermitteln Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\sin(2x) + \sin(x) = 0$$

im Intervall $[0, 2\pi]$.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

gilt.

9. Für welche $\alpha > \frac{1}{4}$ ist die Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \cos(x^\alpha)$$

differenzierbar? Berechnen Sie für diese α auch die Ableitung von f.

Viel Erfolg!