Sei dazu $0 < \rho < s < r$. Dann gilt $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < \frac{1}{s}$. Damit existiert $K \in N$ mit $\sqrt[k]{|a_k|} \le \frac{1}{s}$ für $k \ge K$. Für $z \in U(z_0, \rho)$ und $k \ge K$ folgt damit

$$\left|a_k (z - z_0)^k\right| = |a_k| \cdot |z - z_0|^k \le \left(\frac{1}{s}\right)^k \rho^k = \left(\frac{\rho}{s}\right)^k.$$

Die Behauptung folgt nun mit $c_k := \left(\frac{\rho}{s}\right)^k$ aus Satz 3.7.4. □

Zum *Beispiel* folgt aus obigem Satz, dass die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig ist. (Dies wurde bereits im Beweis von Satz 2.9.5 benutzt.) Allgemeiner sieht man, dass für $a \in \mathbb{R}_+$ die durch $z \mapsto a^z := \exp(z \cdot \ln a)$ definierte Funktion von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ stetig ist.

4 Differenzierbarkeit

4.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Definition 4.1.1 Sei $M \subset \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{C}$ und $\xi \in M$ Häufungspunkt von M. Dann heißt f *differenzierbar in* ξ, wenn

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt dann *Ableitung* von f in ξ (oder an der Stelle ξ). Er wird mit $f'(\xi)$ oder $\frac{df}{dx}(\xi)$ bezeichnet.

Ist M' die Menge der Häufungspunkte von M, in denen f differenzierbar ist, so wird durch $x \mapsto f'(x)$ eine Funktion $f' : M' \to \mathbb{C}$ definiert, die *Ableitung* von f. Diese wird auch mit $\frac{df}{dx}$ bezeichnet.

Ist $A \subset M$, so heißt f *differenzierbar in* A falls $A \subset M'$. Ist $M' = M$, so heißt f *differenzierbar*.

Bemerkungen. 1. Für f' bzw. $f'(x)$ wird auch die (etwas problematische) Bezeichnung $\frac{df(x)}{dx}$ verwandt.

2. Die Idee ist (für reellwertiges f) natürlich folgende: durch

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

ist die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(\xi, f(\xi))$ gegeben, und im Grenzwert $x \to \xi$ sollte man die Steigung der Tangente an den Graph von f im Punkte $(\xi, f(\xi))$ erhalten. Durch $x \mapsto f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)$ ist dann die Tangente an den Graphen von f im Punkte $(\xi, f(\xi))$ gegeben.

3. Auch bei Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ sind in Definition 4.1.1 uneigentliche Grenzwerte (also $f'(\xi) = \pm\infty$) *nicht* zugelassen.

4. Man kann den Grenzwert in Definition 4.1.1 auch in der Form

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$$

schreiben.

Beispiel 1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$.
Behauptung. Die Funktion f ist differenzierbar und $f'(x) = nx^{n-1}$ für $x \in \mathbb{R}$.
Beweis. Für $x, h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, ist

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} = nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \ldots,$$

und daraus folgt für $h \to 0$ die Behauptung. □

Beispiel 2. Sei $a \in \mathbb{C}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = e^{ax} (= \exp ax)$.
Behauptung. Die Funktion f ist differenzierbar und $f'(x) = ae^{ax}$ für $x \in \mathbb{R}$.
Beweis. Für $x, h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, ist

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^{ax+ah} - e^{ax}}{h} = \frac{e^{ax}e^{ah} - e^{ax}}{h} = ae^{ax}\frac{e^{ah}-1}{ah}.$$

Wegen $\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$ (vgl. §3.3) folgt die Behauptung. □

Satz 4.1.1 *Sei $M \subset \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{C}$ und $\xi \in M$ Häufungspunkt von M. Dann ist f genau dann differenzierbar in M, wenn eine in ξ stetige Funktion $q : M \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = f(\xi) + q(x)(x - \xi)$ für $x \in M$ existiert. Ist dies der Fall, so gilt $q(\xi) = f'(\xi)$.*

Beweis. Sei $\eta \in \mathbb{C}$. Nach Satz 3.3.2 gilt

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \eta$$

genau dann, wenn die durch

$$q(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} & \text{falls } x \in M \backslash \{\xi\}\ , \\ \eta & \text{falls } x = \xi \end{cases}$$

definierte Funktion $q : M \to \mathbb{C}$ stetig in ξ ist. Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 4.1.2 *Sei $M \subset \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{C}$ und $\xi \in M$ Häufungspunkt von M. Ist f differenzierbar in ξ, so ist f stetig in ξ.*

Der Satz besagt also, dass differenzierbare Funktionen stetig sind. Sein *Beweis* folgt unmittelbar aus Satz 4.1.1.

Satz 4.1.3 *Sei $M \subset \mathbb{R}$, $\xi \in M$ Häufungspunkt von M, $f, g : M \to \mathbb{C}$ differenzierbar in ξ und $c \in \mathbb{C}$. Dann sind $f + g$, $c \cdot f$, $f \cdot g$ und im Falle $g(\xi) \neq 0$ auch die (in $M \backslash g^{-1}(0)$ definierte) Funktion $\frac{f}{g}$ differenzierbar in ξ und es gilt*

(i) $(f + g)'(\xi) = f'(\xi) + g'(\xi)$,

(ii) $(c \cdot f)'(\xi) = c \cdot f'(\xi)$,

(iii) $(f \cdot g)'(\xi) = f'(\xi) \cdot g(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi)$,

(iv) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(\xi) = \dfrac{f'(\xi) \cdot g(\xi) - f(\xi) \cdot g'(\xi)}{g(\xi)^2}.$

Man nennt (iii) Produktregel und (iv) Quotientenregel.

Der *Beweis* von (i) und (ii) ist sehr einfach und hier ausgelassen. Zum Beweise von (iii) beachte man, dass für $x \neq \xi$

$$\begin{aligned}
\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(\xi)}{x - \xi} &= \frac{f(x)g(x) - f(\xi)g(\xi)}{x - \xi} \\
&= \frac{f(x)g(x) - f(\xi)g(x) + f(\xi)g(x) - f(\xi)g(\xi)}{x - \xi} \\
&= \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} g(x) + f(\xi) \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi}
\end{aligned}$$

gilt. Da $\lim_{x \to \xi} g(x) = g(\xi)$ wegen Satz 4.1.2, folgt hieraus die Behauptung.

Die Quotientenregel (iv) folgt auf ähnliche Weise. Wir verzichten auf die Details. $\square$

Beispiele. 1. Sinus und Cosinus (auf $\mathbb{R}$ eingeschränkt) sind differenzierbar mit $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$. Denn wegen $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$, Beispiel 2 zu Definition 4.1.1 und Satz 4.1.3, (i) und (ii), ist der Sinus differenzierbar und

$$\sin' x = \frac{1}{2i}\left(ie^{ix} - (-i)e^{-ix}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \cos x$$

für $x \in \mathbb{R}$. Analog zeigt man $\cos' = -\sin$.

2. Tangens und Cotangens sind differenzierbar mit $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$ und $\cot' = -1 - \cot^2 = -\frac{1}{\sin^2}$. Dies folgt aus der Quotientenregel. Zum Beispiel ist

$$\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin' \cos - \sin \cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2.$$

Satz 4.1.4 (Kettenregel) *Seien $M, N, L \subset \mathbb{R}$, $N \subset L$, $g : M \to N$, $f : L \to \mathbb{C}$. Sei $\xi \in M$ Häufungspunkt von M und $g(\xi)$ Häufungspunkt von L. Sei g differenzierbar in ξ und sei f differenzierbar in $g(\xi)$. Dann ist $f \circ g$ differenzierbar in ξ und es gilt $(f \circ g)'(\xi) = f'(g(\xi))g'(\xi)$.*

Beweis. Nach Satz 4.1.1 existieren in ξ bzw. $\eta := g(\xi)$ stetige Funktionen $p : M \to \mathbb{C}$ und $q : L \to C$ mit $g(x) = g(\xi) + (x - \xi)p(x)$ für $x \in M$ und $f(y) = f(\eta) + (y - \eta)q(y)$ für $y \in L$, und es gilt $g'(\xi) = p(\xi)$ und $f'(\eta) = q(\eta)$. Mit $y = g(x)$ folgt

$$(f \circ g)(x) = (f \circ g)(\xi) + (g(x) - g(\xi))q(g(x)) = (f \circ g)(\xi) + (x - \xi)p(x)q(g(x)).$$

Da die durch $x \mapsto p(x)q(g(x))$ definierte Funktion stetig in ξ ist und dort den Wert $p(\xi)q(g(\xi)) = g'(\xi)f'(g(\xi))$ hat, folgt mit Satz 4.1.1 die Behauptung. $\square$

Beispiele. 1. Die Funktion $\exp \circ \cos$ ist differenzierbar und

$$(\exp \circ \cos)'(x) = \exp'(\cos x) \cos' x = -e^{\cos x} \sin x.$$

2. Ist $f : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $\xi \in M$, so ist für $n \in \mathbb{N}$ auch $f^n : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar in ξ mit $(f^n)'(\xi) = nf^{n-1}(\xi)f'(\xi)$. Dies folgt aus der Kettenregel und Beispiel 1 zu Definition 4.1.1. Ist etwa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^3 x$, so gilt $f'(x) = 3\sin^2 x \cos x$.

Wir haben Differenzierbarkeit hier nur für Funktionen mit Definitionsbereich in $\mathbb{R}$ (und Zielbereich in $\mathbb{C}$) betrachtet. Lässt man in Definition 4.1.1 den Definitionsbereich in $\mathbb{C}$ zu, so erhält man den Begriff der *komplexen Differenzierbarkeit.* Es sei angemerkt, dass die bisherigen Resultate über Differenzierbarkeit – mit denselben Beweisen – auch für komplexe Differenzierbarkeit gelten. (Auch die im folgenden Satz auftauchende Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt noch für komplexe Differenzierbarkeit.) Ansonsten treten bei der Untersuchung der komplexen Differenzierbarkeit aber ganz andere Phänomene auf wie bei der Differenzierbarkeit von Funktionen mit Definitionsbereich in $\mathbb{R}$. Komplexe Differenzierbarkeit wird später (voraussichtlich in Analysis IV) ausführlich behandelt. Zuvor wird in Analysis II Differenzierbarkeit von Funktionen mit Definitionsbereich in $\mathbb{R}^n$ (und Zielbereich in $\mathbb{R}^m$) untersucht. (Für Funktionen von Teilmengen von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{C}$ erhalten wir also zwei Differenzierbarkeitsbegriffe!)

Im folgenden untersuchen wir Differenzierbarkeit nur für auf Intervallen definierte Funktionen. Ist I das Intervall $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$ oder (a,b), so nennen wir das Intervall (a,b) das *Innere* von I und bezeichnen es mit $\mathrm{int}(I)$. Die Punkte a, b nennen wir auch *Randpunkte* von I.

Satz 4.1.5 *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $f : I \to J$ stetig, streng monoton und surjektiv (und damit bijektiv nach Satz* 3.2.3*). Sei $\xi \in I$ und sei f differenzierbar in ξ mit $f'(\xi) \neq 0$. Dann ist f^{-1} differenzierbar in $\eta := f(\xi)$ und es gilt*

$$(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}.$$

Beweis. Sei (y_n) Folge in $J\backslash\{\eta\}$ mit $y_n \to \eta$. Sei $x_n := f^{-1}(y_n)$. Da f^{-1} nach Satz 3.2.3 stetig ist, folgt $x_n \to f^{-1}(\eta) = \xi$. Wegen der Bijektivität von f ist auch $x_n \neq \xi$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(\eta)}{y_n - \eta} = \frac{x_n - \xi}{f(x_n) - f(\xi)} \to \frac{1}{f'(\xi)},$$

und daraus die Behauptung. □

Beispiele. 1. Der natürliche Logarithmus $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, nach Satz 4.1.5 also differenzierbar mit

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}$$

für $x \in \mathbb{R}_+$.

Hieraus erhält man, dass für $a \in \mathbb{C}$ die durch $x \mapsto x^a$ definierte Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ differenzierbar ist und $f'(x) = ax^{a-1}$ gilt. Denn dies folgt wegen $f(x) = \exp(a \ln x)$ aus der Kettenregel:

$$f'(x) = a\exp(a\ln x)(\ln)'(x) = ax^a\frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

Für $a \in \mathbb{N}$ ist dies das Beispiel 1 zu Definition 4.1.1.

2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Dann ist f streng monoton steigend, stetig und bijektiv. Außerdem ist f differenzierbar mit $f'(x) = 3x^2$. Die Umkehrfunktion f^{-1} ist gegeben durch $f^{-1}(y) = y^{1/3}$ (wobei wir dies für $y < 0$ durch $y^{1/3} = -(-y)^{1/3}$ definiert haben). Für $y \neq 0$ erhält man mit Satz 4.1.5 (oder durch die Wahl $a = \frac{1}{3}$ im vorigen Beispiel) sofort $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{3}y^{-2/3}$.

Für $y = 0$ ist aber $x := f^{-1}(y) = 0$, also $f'(x) = 0$, und damit Satz 4.1.5 nicht anwendbar. Tatsächlich sieht man leicht, dass

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(0)}{y - 0} = \frac{1}{y^{2/3}} \to \infty$$

für $y \to 0$, also f^{-1} nicht differenzierbar in 0 ist.

3. Wegen $\sin' x = \cos x > 0$ für x aus dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist arcsin differenzierbar im Intervall $(-1, 1)$ und es gilt dort

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

In den Punkten ± 1 ist arcsin nicht differenzierbar.

Analog sieht man, dass die Funktion $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ im Intervall $(-1, 1)$ differenzierbar ist und dort

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

gilt. Ebenso zeigt eine kurze Rechnung, dass $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar sind und

$$\arctan' x = \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{arccot}' x = -\frac{1}{1 + x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion muss nicht stetig sein. Als *Beispiel* betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Wir zeigen: (i) f ist differenzierbar, (ii) f' ist nicht stetig.

zu (i): Mit Produkt- und Kettenregel folgt, dass f differenzierbar in $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ ist, mit

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(\cos \frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

für $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Um die Differenzierbarkeit in 0 zu untersuchen, notieren wir zunächst, dass $|\sin t| \leq 1$ für $t \in \mathbb{R}$ wegen $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Es folgt

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

und damit

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

zu (ii): Sei $x_k = \frac{1}{2\pi k}$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $x_k \to 0$ und

$$f'(x_k) = 2x_k \sin 2\pi k - \cos 2\pi k = -1 \not\to 0 = f'(0).$$

Damit ist f' nicht stetig in 0.

Der Graph dieser Funktion ist in Abbildung 11 dargestellt.

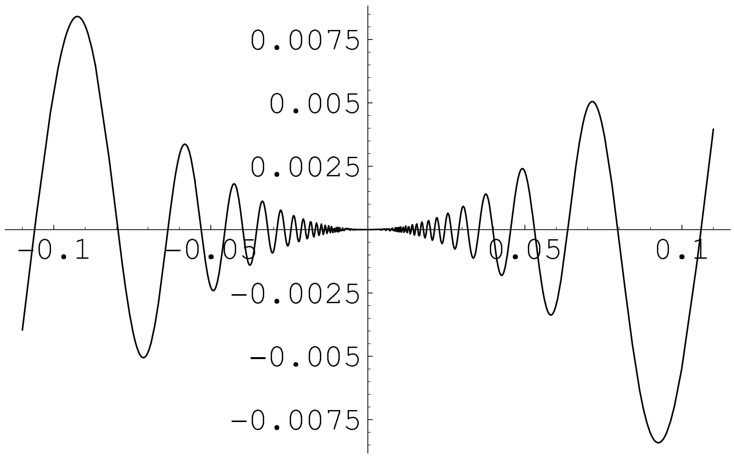

Abbildung 11: Der Graph der für $x \neq 0$ durch $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ gegebenen Funktion.

Dieses Beispiel zeigt auch, dass die Interpretation der Ableitung als Tangentensteigung problematisch sein kann.

Definition 4.1.2 Sei I Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Dann heißt f *stetig differenzierbar*, falls f' stetig ist.

Für $n \in \mathbb{N}$ heißt f *n-mal (stetig) differenzierbar*, falls die induktiv durch $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$, $f^{(0)} := f$, definierte n-te Ableitung $f^{(n)}$ existiert (und stetig ist). Man schreibt f'' statt $f^{(2)} = (f')'$ und f''' statt $f^{(3)}$.

Zum *Beispiel* ist der Cosinus beliebig oft differenzierbar mit $\cos' = -\sin$, $\cos'' = -\cos$, $\cos''' = \sin$, $\cos^{(4)} = \cos$ und damit $\cos^{(4k)} = \cos$, $\cos^{(4k+1)} = -\sin$, $\cos^{(4k+2)} = -\cos$ und $\cos^{(4k+3)} = \sin$ für $k \in \mathbb{N}$.

4.2 Der Mittelwertsatz

Definition 4.2.1 Sei $M \subset \mathbb{C}$, $f : M \to \mathbb{R}$, $\xi \in M$. Gilt $f(\xi) \geq f(x)$ für alle $x \in M$, so sagt man, dass f in ξ ein *globales Maximum* hat. Existiert $\varepsilon > 0$ mit $f(\xi) \geq f(x)$ für alle $x \in M$ mit $|x - \xi| < \varepsilon$, so sagt man, dass f in ξ ein *lokales Maximum* hat. Der Wert $f(\xi)$ wird dann als lokales Maximum bezeichnet.

Entsprechend spricht man von einem globalen bzw. lokalen Minimum. Ein *Extremum* ist ein Maximum oder Minimum.

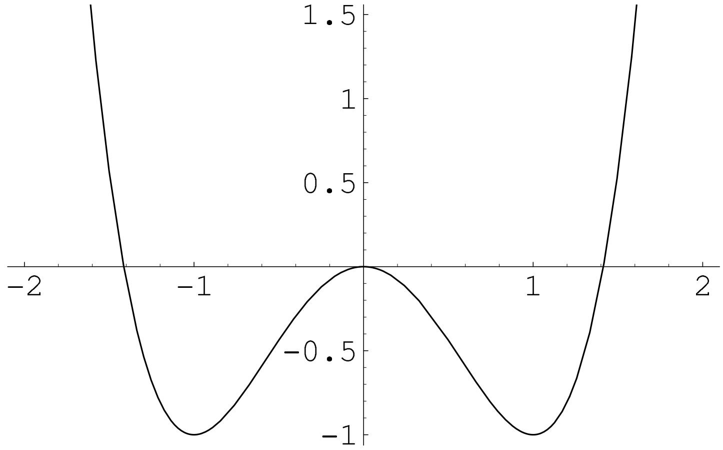

Abbildung 12: Der Graph der durch $f(x) = x^4 - 2x^2$ gegebenen Funktion f.

Offensichtlich sind globale Extrema auch lokale Extrema, aber nicht umgekehrt.

Man betrachte etwa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2 = (x^2 - 1)^2 - 1$; vgl. Abbildung 12. Wie man durch einen Blick auf den Graphen erkennt, und durch eine kurze Rechnung auch leicht verifiziert, hat diese Funktion in 0 ein lokales Maximum, aber sie besitzt kein globales Maximum. In 1 und -1 hat f ein globales (und lokales) Minimum.

Ist $M \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f : M \to \mathbb{R}$ stetig, so existieren nach Satz 3.6.4 immer Punkte, in denen f sein globales Minimum und Maximum hat.

Satz 4.2.1 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und ξ innerer Punkt von I. Ist f differenzierbar in ξ und hat f in ξ ein lokales Extremum, so ist $f'(\xi) = 0$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit habe f ein lokales Minimum in ξ. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit mit $f(x) - f(\xi) \geq 0$ für alle $x \in I$ mit $|x - \xi| < \varepsilon$. Es folgt

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi+} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0 \quad \text{und} \quad f'(\xi) = \lim_{x \to \xi-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0,$$

also $f'(\xi) = 0$. $\square$

Satz 4.2.2 (Mittelwertsatz) *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Der Mittelwertsatz hat eine einfache anschauliche Interpretation: es existiert ein Punkt, wo die Steigung der Tangente an den Graphen von f gleich der Steigung der Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist.

Im *Beispiel* $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sin(\pi x)$ haben $\xi = \frac{1}{2}$ und $\xi = \frac{3}{2}$ die verlangte Eigenschaft; siehe Abbildung 13

Ein Spezialfall des Mittelwertsatzes ist der folgende Satz.

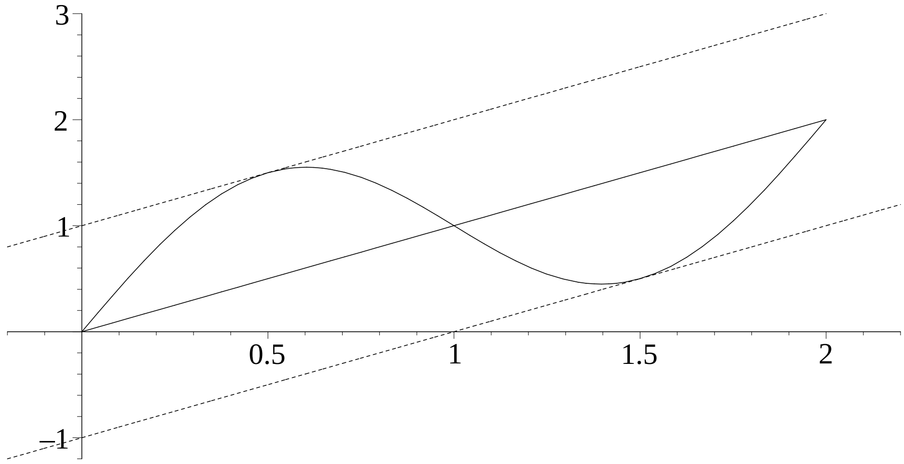

Abbildung 13: Illustration des Mittelwertsatzes.

Satz 4.2.3 (Satz von Rolle) *Sind a, b, f wie in Satz* 4.2.2 *und ist außerdem noch $f(a) = f(b)$, so existiert $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Wir beweisen zuerst diesen Spezialfall, und führen den allgemeinen Fall dann darauf zurück.

Beweis von Satz 4.2.3. Nach Satz 3.6.4 existieren $\alpha, \beta \in [a, b]$ so dass $f(\alpha) = \min f([a, b])$ und $f(\beta) = \max f([a, b])$. Nach Satz 4.2.1 folgt $f'(\alpha) = 0$ falls $\alpha \in (a, b)$ und $f'(\beta) = 0$ falls $\beta \in (a, b)$. Damit folgt die Behauptung, außer wenn $\{\alpha, \beta\} \subset \{a, b\}$. In diesem Fall ist aber wegen $f(a) = f(b)$ auch $f(\alpha) = f(\beta)$, also f konstant und damit $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. $\square$

Beweis von Satz 4.2.2. Wir betrachten $h : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Dann gilt

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = h(a).$$

Nach Satz von Rolle existiert also $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$

Ersetzt man in obigem Beweis $h(x)$ durch

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

mit einer Funktion g, wobei $g(a) \neq g(b)$, so erhält man folgendes Resultat.

Satz 4.2.4 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz) *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Sei $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b)$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es existiert $\xi \in (a, b)$ mit*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Hierbei folgt $g(a) \neq g(b)$ aus dem Satz von Rolle, angewandt auf g.

Der Satz von Rolle – und folglich der (verallgemeinerte) Mittelwertsatz – gelten *nicht* für komplexwertige Funktionen. Zum *Beispiel* gilt für $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{ix}$, dass $f(0) = f(2\pi) = 0$, aber $f'(x) = ie^{ix} \neq 0$ für alle x.

Es gilt aber immerhin noch der folgende Satz.

Satz 4.2.5 *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit*

$$|f'(\xi)| \geq \frac{|f(b) - f(a)|}{b - a}.$$

Beweis. Die Behauptung ist trivial für $f(a) = f(b)$. Andernfalls setzt man

$$q := \frac{|f(b) - f(a)|}{f(b) - f(a)}$$

und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \mathrm{Re}(qf(x))$. Der Mittelwertsatz liefert $\xi \in (a, b)$ mit

$$g'(\xi) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{|f(b) - f(a)|}{b - a}$$

und die Behauptung folgt wegen $|f'(\xi)| = |qf'(\xi)| \geq \mathrm{Re}(qf'(\xi)) = g'(\xi)$. $\square$

4.3 Anwendungen des Mittelwertsatzes

Satz 4.3.1 *Sei I Intervall und seien $f, g : I \to \mathbb{C}$ stetig und in $\mathrm{int}(I)$ differenzierbar. Gilt dann $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in \mathrm{int}(I)$, so existiert $c \in \mathbb{C}$ mit $f(x) = g(x) + c$ für alle $x \in I$.*

Beweis. Die Funktion $h := f - g$ ist stetig in I, differenzierbar in $\mathrm{int}(I)$ und erfüllt $h'(x) = 0$ für $x \in \mathrm{int}(I)$. Aus Satz 4.2.5 folgt $h(x) = h(y)$ für $x, y \in I$. Damit ist h konstant. $\square$

Satz 4.3.2 *Sei I Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und in $\mathrm{int}(I)$ differenzierbar. Dann ist f monoton wachsend falls $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathrm{int}(I)$ und monoton fallend falls $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathrm{int}(I)$. Falls $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathrm{int}(I)$, so liegt strenge Monotonie vor.*

Beweis. Ist $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, so existiert nach Mittelwertsatz $\xi \in (x_1, x_2) \subset \mathrm{int}(I)$ mit $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi)$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Satz 4.3.3 *Sei I Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathrm{int}(I)$. Sei f differenzierbar in ξ mit $f'(\xi) = 0$. Dann gilt:*

(i) *Existieren $\alpha, \beta \in I$ mit $\alpha < \xi < \beta$, so dass f differenzierbar in (α, β) ist und $f'(x) \geq 0$ für $x \in (\alpha, \xi)$ und $f'(x) \leq 0$ für $x \in (\xi, \beta)$ gilt, so hat f ein lokales Maximum in ξ.*

(ii) *Existieren $\alpha, \beta \in I$ mit $\alpha < \xi < \beta$, so dass f differenzierbar in (α, β) ist und $f'(x) \leq 0$ für $x \in (\alpha, \xi)$ und $f'(x) \geq 0$ für $x \in (\xi, \beta)$ gilt, so hat f ein lokales Minimum in ξ.*

Existiert zusätzlich noch $f''(\xi)$, so gilt:

(iii) *Ist $f''(\xi) < 0$, so hat f ein lokales Maximum in ξ.*

(iv) *Ist $f''(\xi) > 0$, so hat f ein lokales Minimum in ξ.*

Beweis. (i) und (ii) folgen sofort aus Satz 4.3.2.

zu (iii): Wegen

$$0 > f''(\xi) = \lim_{x \to \xi+} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi+} \frac{f'(x)}{x - \xi}$$

existiert $\beta \in I$, $\beta > \xi$, mit $f'(x) < 0$ für $x \in (\xi, \beta)$. Analog existiert $\alpha \in I$ mit der geforderten Eigenschaft. Die Behauptung folgt jetzt aus (i).

Analog folgt (iv) aus (ii). $\square$

Beispiel. Sei $f : [0,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt{5-x}$. Dann ist f stetig und differenzierbar in $(0,5)$ mit

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\frac{1}{2\sqrt{5-x}}(-1) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{5-x}}\right).$$

Es gilt (für $0 < x < 5$)

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} \leq \sqrt{5-x} \Leftrightarrow 4x < 5 - x \Leftrightarrow x \in (0,1)$$

und analog

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1,5) \quad \text{und} \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Es folgt, dass f streng monoton steigend in $[0,1]$ ist (d. h., $f|[0,1]$ ist streng monoton steigend), dass f streng monoton fallend in $[1,5]$ ist und dass f in 1 ein lokales Maximum hat. Dieses ist sogar globales Maximum. Es gilt $f(1) = 5$. Das globale Minimum wird wegen $f(5) = \sqrt{5} < 2\sqrt{5} = f(0)$ in 5 angenommen, in 0 hat f ein lokales Minimum.

Der Graph von f ist in Abbildung 14 dargestellt.

Definition 4.3.1 Sei I Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für $x_1, x_2, x \in I$ mit $x_1 < x < x_2$

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

gilt. Gilt hier immer "$<$", so heißt f *streng konvex*. Gilt immer "$\geq$" bzw. "$>$", so heißt f *(streng) konkav*.

Die Bedingung in Definition 4.3.1 besagt, dass der Graph von f unterhalb der Sekanten liegt. Äquivalent ist, dass die Sekante durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x, f(x))$ kleinere Steigung hat als die durch $(x, f(x))$ und $(x_2, f(x_2))$, dass also

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

gilt.

In Abbildung 15 ist dies für $f(x) = 1 + (x-4)^2 = x^2 + 8x + 17$, $x_1 = 1$, $x = 3$ und $x_2 = 6$ dargestellt.

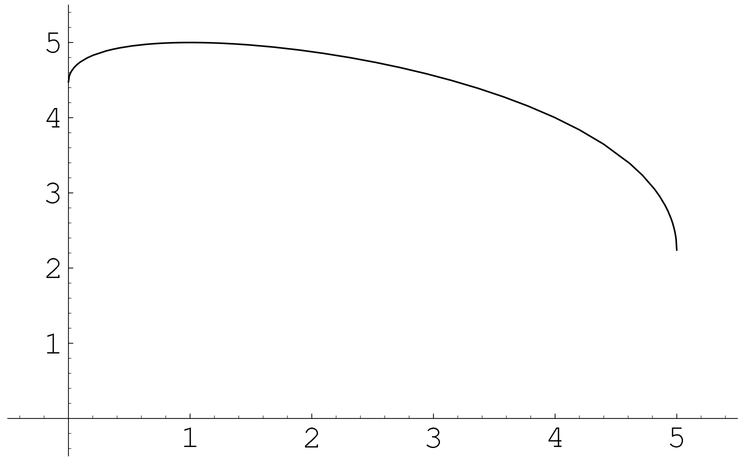

Abbildung 14: Der Graph von $f : [0,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt{5-x}$.

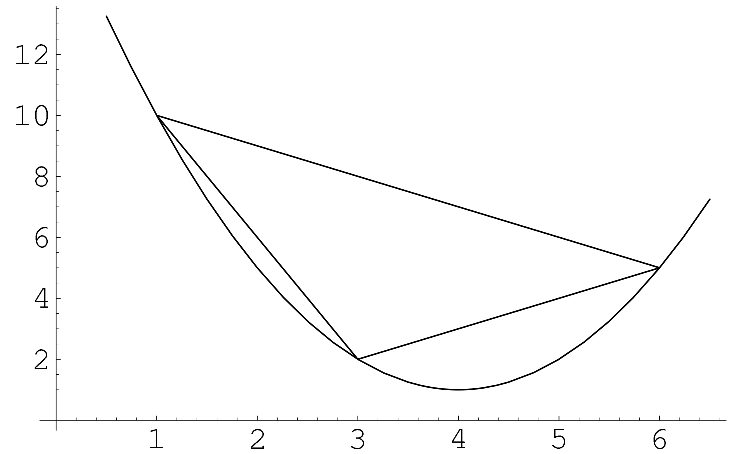

Abbildung 15: Konvexität.

Satz 4.3.4 *Sei I Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und in $\operatorname{int}(I)$ zweimal differenzierbar. Gilt $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in \operatorname{int}(I)$, so ist f konvex. Gilt $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in \operatorname{int}(I)$, so ist f konkav. Gilt immer "$>$" bzw. "$<$", so liegt strenge Konvexität bzw. Konkavität vor.*

Für den *Beweis* sei auf die Übung verwiesen.

Eine Anwendung des verallgemeinerten Mittelwertsatzes führt auf das folgende Ergebnis.

Satz 4.3.5 (Regeln von de l'Hospital) *Sei (a,b) offenes Intervall und seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Gilt dann*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

und existiert

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

so existiert auch

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

und es gilt

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Entsprechendes gilt für den Grenzübergang $x\to b$.

Es sind $a=-\infty$ und $b=\infty$ zugelassen und die auftretenden Grenzwerte von f/g bzw. f'/g' können auch uneigentliche Grenzwerte sein.

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall, dass $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$ und $a\in\mathbb{R}$ gilt. Wir betrachten die stetigen Ergänzungen $F,G:[a,b)\to\mathbb{R}$, die durch

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{falls } x\in(a,b)\ ,\\ 0 & \text{falls } x=a\end{cases}$$

und

$$G(x)=\begin{cases} g(x) & \text{falls } x\in(a,b)\ ,\\ 0 & \text{falls } x=a\end{cases}$$

gegeben sind. Nach dem Satz von Rolle und wegen $G'(\xi)=g'(\xi)\neq 0$ für $\xi\in(a,b)$ gilt dann $g(x)=G(x)\neq G(a)=0$ für $x\in(a,b)$. Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz folgt für $x\in(a,b)$ dann

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

mit einem $\xi\in(a,x)$. Hieraus folgt die Behauptung, da mit $x\to a$ auch $\xi\to a$. $\square$

Wir haben Satz 4.3.5 für einseitige Grenzwerte formuliert, aber daraus folgt natürliche eine entsprechende Aussage für allgemeine Grenzwerte unmittelbar.

Beispiele. 1. Es gilt

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\tan x}=1,$$

denn wegen $\arcsin' x=1/\sqrt{1-x^2}\to 1$ und $\tan'(x)=1/\cos^2 x\to 1$ folgt

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin' x}{\tan' x}=1.$$

2. Wir untersuchen die Existenz des Grenzwertes

$$L:=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{\arctan x}.$$

Zunächst gilt,

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-\ln(1+x)}{\ln(1+x)\arctan x},$$

falls L existiert. Nach Satz 4.3.5 folgt

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1+x}\arctan x + \ln(1+x)\frac{1}{1+x^2}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x - x^2}{(1+x^2)\arctan x + (1+x)\ln(1+x)}, \end{aligned}$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert. Auch dort konvergieren für $x \to 0$ wieder Zähler und Nenner gegen 0. Satz 4.3.5 liefert

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{1-2x}{2x\arctan x + 1 + \ln(1+x) + 1} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1-2x}{2x\arctan x + 2 + \ln(1+x)} \end{aligned}$$

falls der letzte Grenzwert existiert. Dies ist aber offensichtlich der Fall und der Grenzwert ist $\frac{1}{2}$. Wir erhalten $L = \frac{1}{2}$.

Wir diskutieren einige numerische Verfahren zur Auflösung von Gleichungen. Wir wollen eine Nullstelle ξ einer differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ bestimmen, wobei I ein Intervall ist. Wir beginnen mit einem Näherungswert x_1 und berechnen den Schnittpunkt x_2 der Tangente an f im Punkte $(x_1, f(x_1)$ mit der x-Achse. (Dieser Schnittpunkt existiert falls $f'(x_1) \neq 0$.) Dies führt auf die Gleichung $f(x_1)+ f'(x_1)(x_2 - x_1) = 0$, also

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

In vielen Fällen ist x_2 ein besserer Näherungswert für ξ als x_1. Man definiert nun rekursiv eine Folge (x_n) durch

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Wir werden sehen, dass unter geeigneten Voraussetzungen and f und x_1 tatsächlich $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ gilt.

Das hier beschriebene Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung einer Nullstelle heißt *Newton-Verfahren.* Man nennt x_1 den *Startwert.* Man sagt, dass das Verfahren (gegen ξ) *konvergiert*, falls die Folge (x_n) definiert werden kann, also $x_n \in I$ und $f'(x_n) \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt, und falls $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$.

Im Beispiel nach dem Zwischenwertsatz 3.2.1 hatten wir gesehen, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x$, eine Nullstelle im Intervall $(0, 1)$ hat. Als Rekursionsformel erhalten wir

$$x_{n+1} := x_n - \frac{\exp(x_n) + x_n}{\exp(x_n) + 1}.$$

Wir wählen als Startwert $x_1 := 0$ und erhalten $x_2 = -\frac{1}{2}$,

$$x_3 = -\frac{3\sqrt{e}}{2(\sqrt{e}+1)} = -0,56631\ldots$$

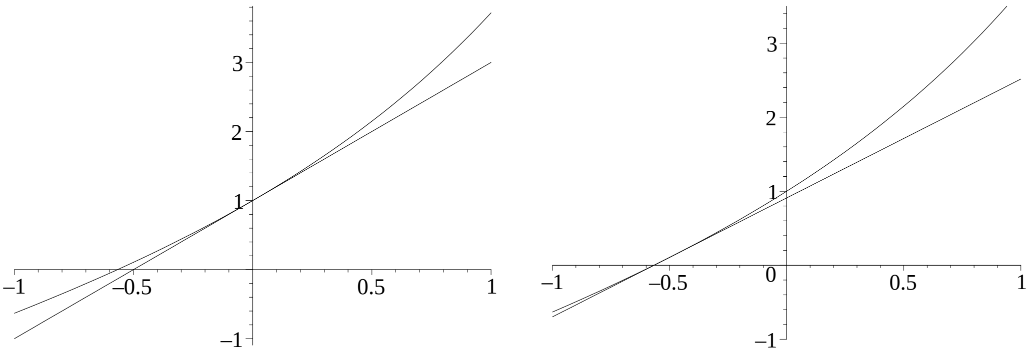

Abbildung 16: Das Newton-Verfahren für $f(x) = e^x + x$.

$x_4 = -0,5671431650\ldots$, $x_5 = -0,5671432902\ldots$, usw. Der Graph von f sowie der Tangenten an die Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ ist in Abbildung 16 dargestellt. Man kann (mit Hilfe der folgenden Sätze) zeigen, dass tatsächlich $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi = -0,56714\ldots$ gilt.

Zunächst beweisen wir folgenden Satz.

Satz 4.3.6 *Sei I Intervall und $g : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $\xi \in \operatorname{int}(I)$ mit $g(\xi) = \xi$ und $|g'(\xi)| < 1$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft:*

Es ist $J := (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon) \subset I$ und ist $x_1 \in J$ und die Folge (x_n) rekursiv definiert durch $x_{n+1} := g(x_n)$, so gilt $x_n \in J$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$.

Beweis. Wegen der Stetigkeit von g' existiert $\varepsilon > 0$ und $\alpha \in (0,1)$ mit $J := (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) \subset I$ und $|g'(x)| \leq \alpha$ für alle $x \in J$. Für $x \in J$ existiert nach dem Mittelwertsatz $y \in J$ mit $(g(x) - g(\xi)) = g'(y)(x - \xi)$. Es folgt $|g(x) - \xi| = |g(x) - g(\xi)| \leq \alpha|x - \xi|$. Insbesondere folgt $|x_{n+1} - \xi| = |g(x_n) - \xi| \leq \alpha|x_n - \xi|$. Induktion liefert $|x_n - \xi| \leq \alpha^{n-1}|x_1 - \xi|$ und dies impliziert wegen $\alpha < 1$, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ gilt. $\square$

Bemerkung. Der Beweis zeigt, dass die Behauptung für alle ε mit

$$\sup_{|x-\xi|<\varepsilon} |g'(x)| < 1$$

gilt.

Beispiel. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \cos x$. Wegen $\cos\left(\frac{1}{2}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ und $\cos 1 < 1$ folgt mit Hilfe des Zwischenwertsatzes leicht, dass $\xi \in (0,1)$ mit $g(\xi) = \xi$ existiert. Für $\varepsilon := \frac{1}{2}$ gilt $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \subset (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon) \subset \left(0, \frac{3}{2}\right)$ und damit $|g'(x)| = \sin x \leq \sin\left(\frac{3}{2}\right) < 1$ für $|x - \xi| < \varepsilon$. Mit Satz 4.3.6 und der dem Satz folgenden Bemerkung folgt, dass die rekursiv durch $x_{n+1} := g(x_n)$ definierte Folge (x_n) für jeden Startwert $x_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ konvergiert. Zum Beispiel für $x_1 = 1$ erhält man $x_2 = 0.5403023059\ldots$, $x_3 = 0.8575532158\ldots$, $x_{19} = 0.7393038924\ldots$, $x_{20} = 0.7389377567\ldots$, usw. Es gilt $\xi = 0.7390851332\ldots$.

Satz 4.3.7 *Sei I Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Sei $\xi \in \operatorname{int}(I)$ mit $f(\xi) = 0$ und $f'(\xi) \neq 0$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $J := (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon) \subset I$, so dass das Newton-Verfahren für alle Startwerte aus J gegen ξ konvergiert.*

Beweis. Wir wenden Satz 4.3.6 auf

$$g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

an. Die Funktion g kann in einem Intervall definiert werden, welches ξ im Innern enthält. Es gilt $g(\xi) = \xi$. Wegen

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

folgt $g'(\xi) = 0$, und damit die Behauptung aus Satz 4.3.6. □

Bemerkungen. 1. Die Behauptung von Satz 4.3.7 gilt auch dann, wenn f nur einmal stetig differenzierbar ist. Der Beweis sei als Übung überlassen.

2. Wendet man das Newton-Verfahren auf $f(x) = x^2 - c$ an, so erhält man das in §2.3 besprochene Heron-Verfahren zur Berechnung von $\sqrt{c}$.

4.4 Folgen und Reihen differenzierbarer Funktionen

Satz 3.7.2 besagt, dass der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ebenfalls stetig ist. Wir beweisen ein analoges Resultat für Differenzierbarkeit.

Satz 4.4.1 *Sei I beschränktes Intervall und (f_n) eine Folge von differenzierbaren Funktionen von I nach $\mathbb{C}$. Die Folge (f_n') konvergiere gleichmäßig. Existiert dann $\alpha \in I$, so dass $(f_n(\alpha))$ konvergiert, so konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ und es gilt $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ für alle $x \in I$.*

Der Satz besagt also, dass man unter den gemachten Voraussetzungen den Grenzübergang $n \to \infty$ mit der Differentiation (die ja auch eine Grenzwertbildung ist) vertauschen kann, dass also $(\lim_{n\to\infty} f_n)' = \lim_{n\to\infty} f_n'$ gilt.

Man beachte, dass die letzte Gleichung nicht gelten muss, wenn $f_n \to f$ gleichmäßig und f und alle f_n differenzierbar sind. Dies zeigt das Beispiel $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$. Hier gilt $f_n \to 0$ gleichmäßig, aber $f_n'(0) = \cos(n0) = 1 \not\to 0$.

Beweis von Satz 4.4.1. Sei $a := \inf I$ und $b := \sup I$. Wir zeigen zunächst mit dem Cauchykriterium, dass (f_n) gleichmäßig konvergiert. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Nach Cauchykriterium für (f_n') existiert $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_m'(x) - f_n'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

für $m, n \geq N_1$ und $x \in I$. Nach Cauchykriterium für $(f_n(\alpha)$ existiert $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_m(\alpha) - f_n(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für $m, n \geq N_2$. Nach Satz 4.2.5 gilt dann für $m, n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ und $x \in I$ mit einem $\xi \in I$:

$$\begin{aligned}
|f_m(x) - f_n(x)| &\leq |(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(\alpha) - f_n(\alpha))| + |f_m(\alpha) - f_n(\alpha)| \\
&\leq |f'_m(\xi) - f'_n(\xi)| \cdot |x - \alpha| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist (f_n) gleichmäßig konvergent. Sei $f : I \to \mathbb{C}$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Wir zeigen jetzt, dass f differenzierbar ist und $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$ gilt. Sei dazu $x \in I$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $F_n : I \to \mathbb{C}$ durch

$$F_n(y) = \begin{cases} \dfrac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} & \text{falls } y \neq x, \\ f'_n(x) & \text{falls } y = x. \end{cases}$$

Dann ist F_n stetig nach Satz 3.3.2. Nach Satz 4.2.5 existiert zu $y \in I$ wieder $\xi \in I$ mit

$$|F_m(y) - F_n(y)| \leq |f'_m(\xi) - f'_n(\xi)|\,.$$

Hierbei wählt man $\xi = x$ falls $y = x$. Aus der gleichmäßigen Konvergenz von (f'_n) folgt nun die gleichmäßige Konvergenz von (F_n). Damit ist nach Satz 3.7.2 die durch $y \mapsto \lim_{n\to\infty} F_n(y)$ definierte Funktion $F : I \to \mathbb{C}$ stetig. Offensichtlich gilt

$$F(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} & \text{falls } y \neq x, \\ \lim_{n\to\infty} f'_n(x) & \text{falls } y = x. \end{cases}$$

Aus Satz 3.3.2. folgt jetzt die Differenzierbarkeit von f in x ist und $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$. □

Ist in obigem Satz I unbeschränkt, so gelten noch alle gemachten Behauptungen, außer dass (f_n) nicht mehr gleichmäßig konvergieren muss. Dies sieht man durch Einschränkung auf beschränkte Teilintervalle ein.

Wie bei Satz 3.7.2 gilt wieder ein Analogon für Reihen.

Satz 4.4.2 *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ Potenzreihe mit $x_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$. Für den Konvergenzradius r gelte $0 < r \leq \infty$. Sei $I := (x_0 - r, x_0 + r)$ falls $r < \infty$ und $I = \mathbb{R}$ falls $r = \infty$. Dann ist die durch $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ definierte Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$ für $x \in I$.*

Beweis. Wegen $\sqrt[n]{n} \to 1$ hat die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$ ebenfalls Konvergenzradius r. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $g_n : I \to \mathbb{C}$, $g_n(x) = a_n(x - x_0)^n$. Dann gilt $g'_n(x) = na_n(x - x_0)^{n-1}$. Sei $0 < \rho < r$ und $J := (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$. Nach Satz 3.7.5 konvergiert dann $\sum_{n=0}^{\infty} g'_n$ gleichmäßig in J. Außerdem konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x_0)$ (zur Summe a_0.) Mit Satz 4.4.1 (in der Version für Reihen) folgt, dass f differenzierbar in J ist mit $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$ für $x \in J$. Die Behauptung folgt für $\rho \to r$; vgl. Satz 3.7.5. □

Beispiel. Wir betrachten die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Der Konvergenzradius ist 1 (wegen $\sqrt[k]{k} \to 1$). Aus dem Leibnizkriterium erhält man, dass die Reihe sogar für $x \in [-1,1]$ gleichmäßig konvergiert. Durch

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

wird also eine stetige Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert. Diese ist nach Satz 4.4.2 differenzierbar in $(-1,1)$ mit

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} = \arctan' x.$$

Mit Satz 4.3.1 und wegen $f(0) = 0 = \arctan 0$ folgt $f(x) = \arctan x$ für $x \in [-1,1]$. Man beachte, dass die Reihe für f' nur in $(-1,1)$ konvergiert, und auch dort nicht gleichmäßig.

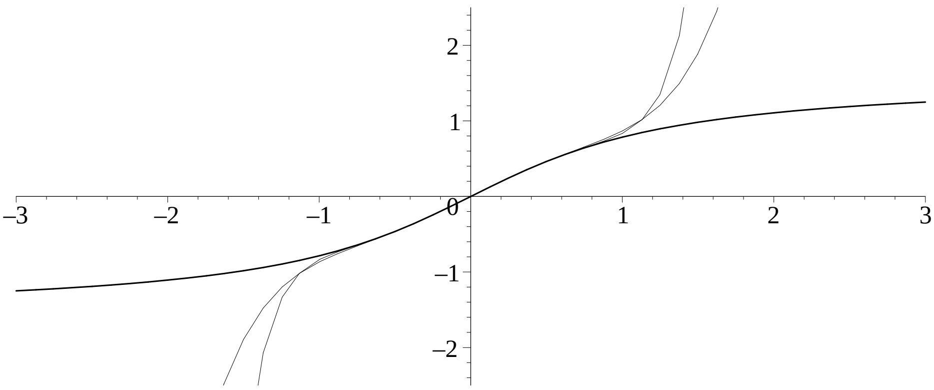

Abbildung 17: Teilsummen (vom Grad 5 und 10) der Reihe des Arcus Tangens.

Wegen $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ folgt insbesondere

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots.$$

Diese Reihe wird auch nach Leibniz benannt.

Aus Satz 4.4.2 folgt, dass mit f, I wie dort die Funktion f unendlich oft differenzierbar ist und dass

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) a_n (x-x_0)^{n-k}$$

für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in I$ gilt. Insbesondere gilt $f^{(k)}(x_0) = k! a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Umgekehrt kann man nun für beliebig oft in x_0 differenzierbares f die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ mit $a_k = f^{(k)}(x_0)/k!$ bilden und sich fragen, ob sie zur Summe $f(x)$ konvergiert. Man nennt diese Reihe, also die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

die *Taylorreihe* von f in x_0 und für $n \in \mathbb{N}$ ihre n-te Teilsumme

$$T_n(x) := T_n(x, f, x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

das n-te *Taylorpolynom* (von f in x_0). Weiter heißt

$$R_n(x) := R_n(x, f, x_0) := f(x) - T_n(x)$$

das n-te Restglied der Taylorentwicklung (von f in x_0).

Man beachte, dass aus der Konvergenz der Taylorreihe von f noch *nicht* folgen muss, dass ihre Summe $f(x)$ ist. Man betrachte etwa das *Beispiel* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

mit $x_0 = 0$. Man kann zeigen, dass f beliebig oft differenzierbar ist und $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Damit konvergiert die Taylorreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ zur Summe 0.

Satz 4.4.3 *Sei I Intervall, $x_0, x \in I$, $x_0 \neq x$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei n-mal differenzierbar in I und $(n+1)$-mal differenzierbar in* $\operatorname{int}(I)$*. Dann existiert ξ zwischen x_0 und x mit*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Der Spezialfall $n = 0$ ist der Mittelwertsatz. Die Beweisidee hier ist ähnlich.

Beweis von Satz 4.4.3. Zunächst existiert $\rho \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{\rho}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Zu zeigen ist, dass ρ von der Form $\rho = f^{(n+1)}(\xi)$ ist. Sei dazu $F : I \to \mathbb{R}$,

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{\rho}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}.$$

Dann ist F stetig in I und differenzierbar in $\operatorname{int}(I)$ und eine kurze Rechnung zeigt, dass

$$F'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}\left(f^{(n+1)}(t) - \rho\right).$$

Weiter gilt $F(x_0) = F(x) = 0$ und nach dem Satz von Rolle existiert ξ zwischen x_0 und x mit $F'(\xi) = 0$. $\square$

Beispiel 1. Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$. Dann ist f beliebig oft differenzierbar mit $f'(x) = 1/x$, $f''(x) = -1/x^2$ und $f'''(x) = 2/x^3$. Durch vollständige Induktion zeigt man leicht, dass

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{x^k}.$$

Für $x \in (1, 2]$ existiert dann $\xi \in (1, x)$ mit

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x-1}{\xi}\right)^{n+1}\right| \le \frac{1}{n+1}.$$

Es folgt $R_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$ und damit

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k$$

für $x \in (1, 2]$.

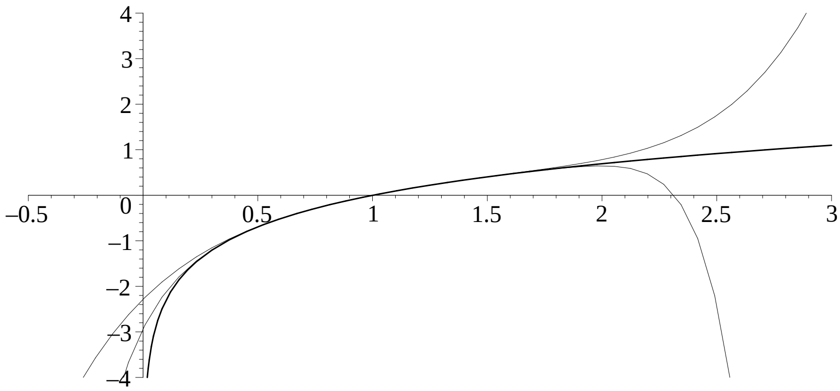

Abbildung 18: Der Logarithmus und die Taylorpolynome vom Grad 5 und 10.

Insbesondere gilt

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots.$$

Für $x \in [\frac{1}{2}, 1)$ gilt $\frac{1}{2} \le x < \xi < 1$ und obiges Argument liefert wieder $R_n(x) \to 0$. Tatsächlich gilt dies (und damit obige Potenzreihenentwicklung des Logarithmus) für $x \in (0, 2]$, aber für $x \in (0, \frac{1}{2})$ können wir dies mit obiger Darstellung des Restglieds $R_n(x)$ nicht zeigen.

Um zu zeigen, dass

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k$$

für alle $x \in (0,2]$ gilt, kann man ähnlich wie bei der Reihe des Arcus Tangens vorgehen. Durch die Reihe auf der rechten Seite wird eine differenzierbare Funktion $g : (0,2) \to \mathbb{R}$ mit

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}$$

definiert, und damit folgt $g'(x) = \ln' x$ und wegen $g(1) = 0 = \ln 1$ auch $g(x) = \ln x$ für $x \in (0,2)$.

Beispiel 2. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$. Wir betrachten wieder die Taylorentwicklung um $x_0 = 1$. Durch vollständige Induktion sieht man leicht, dass

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+1) x^{\alpha-k}$$

gilt. Mit

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+1)}{k!}$$

folgt

$$\frac{f^{(k)}(x)}{k!} = \binom{\alpha}{k} x^{\alpha-k}.$$

(Man überzeugt sich leicht, dass obige Definition von $\binom{\alpha}{k}$ für $\alpha \in \mathbb{N}$ mit der Definition der Binomialkoeffizienten aus §1.6 übereinstimmt.) Wir erhalten die Taylorreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (x-1)^k.$$

Wegen

$$\left| \lim_{k\to\infty} \frac{\binom{\alpha}{k}}{\binom{\alpha}{k+1}} \right| = \left| \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{\alpha-k} \right| = 1$$

und Satz 2.9.2 ist der Konvergenzradius dieser Reihe 1.

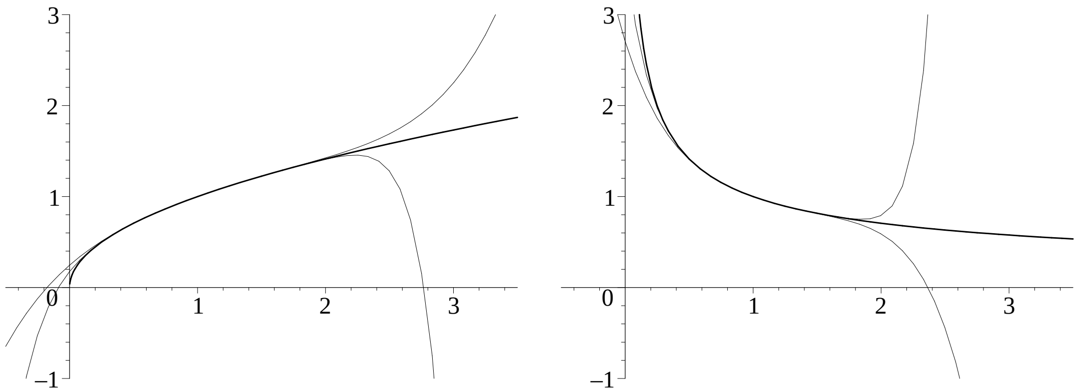

Abbildung 19: Taylorpolynome vom Grad 5 und 10 für $\sqrt{x}$ und $1/\sqrt{x}$.

Um zu zeigen, dass die Taylorreihe für $x \in (1,2)$ gegen $f(x) = x^\alpha$ konvergiert, betrachten wir das Restglied R_n. Es existiert wieder $\xi \in (1,x)$ mit

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} \right| = \left| \binom{\alpha}{n+1} \xi^{\alpha-n-1} (x-1)^{n+1} \right|.$$

Da $\xi > 1$ folgt

$$|R_n(x)| \leq \left| \binom{\alpha}{k} (x-1)^k \right|$$

falls $n \geq \alpha - 1$. Da die Taylorreihe den Konvergenzradius 1 hat, folgt $R_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$. Das gleiche Argument funktioniert auch wieder für $x \in (\frac{1}{2}, 2)$. Tatsächlich gilt

$$x^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (x-1)^k$$

aber sogar für alle $x \in (0,2)$.