Allgemeiner zeigt man (durch quadratische Ergänzung), dass für beliebige $a, b \in \mathbb{C}$ die Gleichung $z^2 + az + b = 0$ eine Lösung hat. Noch allgemeiner gilt der folgende Satz.

Satz 1.9.2 (Fundamentalsatz der Algebra) *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei p ein Polynom vom Grad n, das heißt, es existieren $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$, so dass $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ für $z \in \mathbb{C}$ gilt. Dann existiert $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_1) = 0$.*

Einen *Beweis* dieses Satzes lernt man z. B. in einer Einführung in die Funktionentheorie kennen, wie sie i. a. in der Analysis IV geboten wird.

Sind p und z_1 wie in Satz 1.9.2, so existiert ein Polynom vom Grad $n-1$, so dass $p(z) = (z - z_1) p_1(z)$ für $z \in \mathbb{C}$. Ist $n \geq 2$, so kann Satz 1.9.2 auf p_1 angewendet werden, und induktiv erhält man, dass $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ existieren, so dass $p(z) = a_n (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$.

Satz 1.9.3 *Der Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ kann nicht angeordnet werden.*

Beweis. Es sei $\leq$ Ordnung und $<$ die zugehörige strikte Ordnung. Dann ist $0 < i^2 = -1$ und $0 < 1^2 = 1$. Es folgt $0 < -1 + 1 = 0$. Widerspruch! $\square$

2 Folgen und Reihen

2.1 Folgen

Definition 2.1.1 Eine Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$ heißt *Folge*. Falls außerdem der Zielbereich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist, heißt sie (reelle bzw. komplexe) *Zahlenfolge*.

Sei M Menge und $f : \mathbb{N} \to M$ Folge. Für $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir statt $f(n)$ im allgemeinen f_n. Wir bezeichnen die Folge f mit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder kurz auch einfach mit (f_n). Gelegentlich schreiben wir auch $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$. Jede reelle Zahlenfolge kann auch als komplexe Zahlenfolge betrachtet werden.

Manchmal werden wir für ein $N \in \mathbb{Z}$ und eine Menge M auch Funktionen $f : \{n \in \mathbb{Z} : n \geq N\} \to M$ betrachten. Wir werden auch diese (Zahlen)folgen nennen und mit $(f_n)_{n \geq N}$ bezeichnen.

Begriffe wie "injektiv" sind, da sie für Funktionen definiert sind, insbesondere auch für Folgen erklärt. Begriffe wie "(nach oben/unten) beschränkt" oder "(streng) monoton fallend/steigend" definiert man für reelle Zahlenfolgen, indem man auf $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ die Ordnung "$\leq$" zugrunde legt.

Eine komplexe Zahlenfolge (a_n) heißt beschränkt, falls die reelle Zahlenfolge $(|a_n|)$ beschränkt ist. (Dabei kommt es natürlich nur darauf an, dass $(|a_n|)$ nach oben beschränkt ist, denn nach unten ist diese Folge immer durch 0 beschränkt).

Beispiel. Wir betrachten die reelle Zahlenfolge (a_n) wobei $a_n = \frac{n+1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Es ist also $(a_n) = (2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots)$.
Behauptung 1. (a_n) ist monoton fallend.

Beweis. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$. Zu zeigen ist, dass $a_n \leq a_m$. Nun gilt aber

$$\begin{aligned} a_n \leq a_m \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{n+1}{n} \leq \frac{m+1}{m} \\ &\Leftrightarrow \quad (n+1)m \leq (m+1)n \\ &\Leftrightarrow \quad nm + m \leq mn + n \\ &\Leftrightarrow \quad m \leq n. \quad \square \end{aligned}$$

Genauso sieht man, dass (a_n) sogar streng monoton fallend ist.
Behauptung 2. (a_n) ist beschränkt.
Beweis. (i) Da (a_n) monoton fallend ist, gilt $a_n \leq a_1 = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist 2 obere Schranke von (a_n) und damit ist (a_n) nach oben beschränkt.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $n+1 > n$, also $a_n = \frac{n+1}{n} > 1$. Also ist 1 untere Schranke von (a_n) und damit ist (a_n) nach unten beschränkt.

Aus (i) und (ii) folgt, dass (a_n) beschränkt ist. $\square$

Im obigen Beispiel ist a_n nahe dem Wert 1, wenn n groß ist. Wir präzisieren diesen Gedanken in der folgenden Definition.

Definition 2.1.2 Sei (a_n) (komplexe) Zahlenfolge. Dann heißt (a_n) *konvergent*, falls $a \in \mathbb{C}$ mit folgender Eigenschaft existiert:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

Wir schreiben in diesem Falle $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ oder $a_n \to a$ (für $n \to \infty$) und sagen, dass (a_n) gegen a konvergiert. Wir nennen a den *Grenzwert* der Folge (a_n).

Eine Zahlenfolge, die nicht konvergent ist, heißt *divergent*.

Es ist nützlich, die Definition der Konvergenz noch einmal mit Quantoren zu schreiben. Es ist (a_n) konvergent, falls gilt:

$$\exists a \in \mathbb{C}\, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Die Idee bei der Definition der Konvergenz ist, $|a_n - a|$ als Abstand von a_n zu a zu interpretieren. Dieser Abstand kann dann im Konvergenzfall beliebig klein gemacht werden, indem man n groß wählt.

Dieser Gedanke kann wesentlich verallgemeinert werden. So werden wir später in recht allgemeinem Rahmen einen Abstandsbegriff (Metrik) definieren, und Konvergenz von Folgen in mit diesem Abstandsbegriff versehene Mengen (metrische Räume) untersuchen.

Beispiel (Fortsetzung). Sei wieder $a_n = \frac{n+1}{n}$.
Behauptung. (a_n) ist konvergent und $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.
Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Zu zeigen ist, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

Wir behaupten, dass $N := [1/\varepsilon] + 1$ die verlangte Eigenschaft hat. (Es sei daran erinnert, dass für eine reelle Zahl x mit der Gaußklammer $[x]$ die größte ganze Zahl bezeichnet wird, die nicht größer als x ist.) Zunächst ist dann $N > 1/\varepsilon$ und damit $1/N < \varepsilon$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$. Dann ist

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n+1-n}{n}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon. \quad \square$$

Im folgenden werden wir statt "(a_n) ist konvergent und $\lim_{n\to\infty} a_n = a$" oft nur kurz "$\lim_{n\to\infty} a_n = a$" schreiben. Wenn wir also den Grenzwert angeben, wird damit seine Existenz (also die Konvergenz) impliziert.

Eine andere Beschreibung des Konvergenzbegriffs erhält man wie folgt. Sei $X = \mathbb{R}$ oder $X = \mathbb{C}$, $a \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Dann heißt $\{x \in X : |x - a| < \varepsilon\}$ die *ε-Umgebung* von a (in X). Geometrisch ist die *ε-Umgebung* von a im Falle $X = \mathbb{C}$ eine Kreisscheibe vom Radius ε um a und im Falle $X = \mathbb{R}$ eine offenes Intervall der Länge 2ε um a. Eine Teilmenge U von X heißt *Umgebung* von a, wenn $\varepsilon > 0$ existiert, so dass die ε-Umgebung von a in U enthalten ist.

Es zeigt sich, dass (a_n) genau dann gegen a konvergiert, wenn für jede Umgebung U von a ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_n \in U$ für $n \geq N$.

Der Begriff der Umgebung lässt sich in noch allgemeineren Zusammenhängen erklären als der der Metrik. Insofern ist die Beschreibung der Konvergenz über Umgebungen stärker verallgemeinerungsfähig als die in Definition 2.1.1 gegebene. Solche Fragen werden in der *Topologie* behandelt.

Wir haben bei einer konvergenten Folge bereits von *dem* Grenzwert und nicht nur von *einem* Grenzwert gesprochen. Dies wird durch den folgenden Satz gerechtfertigt.

Satz 2.1.1 *Eine konvergente Zahlenfolge hat genau einen Grenzwert.*

Beweis. Die Existenz eines Grenzwertes folgt aus der Definition. Wir haben also nur die Eindeutigkeit des Grenzwertes zu zeigen.

Dazu nehmen wir an, dass a und b Grenzwerte der konvergenten Zahlenfolge (a_n) seien, mit $a \neq b$. Dann ist $|a - b| > 0$ und mit $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2}$ auch $\varepsilon > 0$.

Nach Definition 2.1.1 existiert nun $N_a \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N_a$ und es existiert $N_b \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - b| < \varepsilon$ für $n \geq N_b$. Mit $N := \max\{N_a, N_b\}$ folgt dann

$$|a - b| = |(a - a_N) + (a_N - b)| \leq |a - a_N| + |a_N - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a - b|.$$

Dies ist ein Widerspruch. □

Zur Übung führen wir denselben Beweis in der Terminologie der Umgebungen: Seien a, b, ε wie vorher. Dann sind die ε-Umgebungen von a und b disjunkt, denn ist x aus beiden Umgebungen, so gilt

$$|a - b| = |(a - x) + (x - b)| \leq |a - x| + |x - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a - b|.$$

Damit kann jedes a_n nur in höchstens einer dieser Umgebungen liegen, womit nur eine der Zahlen a und b Grenzwert von (a_n) sein kann.

Satz 2.1.2 *Eine konvergente Zahlenfolge ist beschränkt.*

Beweis. Sei (a_n) eine konvergente Folge und sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für $n \geq N$. (Wir haben in Definition 2.1.2 $\varepsilon := 1$ gewählt.) Damit folgt für $n \geq N$, dass

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Mit $M := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |a|\}$ folgt dann $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Beispiel 1. Es sei $q \in \mathbb{C}$ und die komplexe Zahlenfolge (a_n) sei gegeben durch $a_n = q^n$.

Fall 1. $|q| > 1$. Wir zeigen, dass (a_n) unbeschränkt und damit wegen Satz 2.1.2 divergent ist.

Sei dazu $M \in \mathbb{R}_+$. Wir haben zu zeigen, dass $n \in \mathbb{N}$ mit $|q^n| > M$ existiert. Dazu setzen wir $h := |q| - 1$. Dann ist $h > 0$ und $|q| = 1 + h$. Es folgt

$$|q^n| = |q|^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k \geq \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} h^k = 1 + nh \geq nh.$$

Für $n > M/h$ folgt also $|a_n| \geq nh > M$.

Fall 2. $|q| < 1$. Wir zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Wir haben zu zeigen, dass $N \in \mathbb{N}$ mit $|q^n - 0| < \varepsilon$ für $n \geq N$ existiert. Dies ist klar falls $q = 0$. Sei also $q \neq 0$. Wir setzen $h := \frac{1}{|q|} - 1$. Es ist dann $|q| = \frac{1}{1+h}$. Wegen $\frac{1}{|q|} > 1$ ist $h > 0$. Wählt man $N > \frac{1}{\varepsilon h}$, so folgt für $n \geq N$, dass

$$|q^n - 0| = |q|^n = \left(\frac{1}{1+h}\right)^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{nh} \leq \frac{1}{Nh} < \varepsilon.$$

Fall 3. $|q| = 1$. Hier zeigt sich, dass für $q = 1$ Konvergenz gegen 1 vorliegt, während die Folge für $q \neq 1$ divergent ist. Wir verzichten hier auf die Details.

Bemerkung. Die in Fall 1 benutzte Ungleichung $(1+h)^n \geq 1+nh$ heißt *Bernoullische Ungleichung*. Sie gilt nicht nur für $h > 0$ sondern sogar für $h > -1$ (und $n \in \mathbb{N}$). Der Beweis sei als Übung überlassen.

Beispiel 2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Zu zeigen ist, dass ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$ für $n \geq N$ existiert.

Dazu notieren wir zunächst, dass offensichtlich $\sqrt[n]{n} \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir setzen $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt also $h_n \geq 0$. Für $n \geq 2$ folgt

$$n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = (1+h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k \geq \binom{n}{2} h_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} h_n^2.$$

Es gilt also $h_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$ und damit $h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ für $n \geq 2$. Wählt man also $N > \max\{2, \frac{2}{\varepsilon^2} + 1\}$, so folgt für $n \geq N$, dass

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = |h_n| = h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leq \sqrt{\frac{2}{N-1}} < \sqrt{\frac{2}{\left(\frac{2}{\varepsilon^2}+1\right) - 1}} = \varepsilon. \quad \square$$

2.2 Rechenregeln

Satz 2.2.1 *Seien* $(a_n), (b_n)$ *konvergente Zahlenfolgen mit* $a_n \to a, b_n \to b$*. Sei* $c \in \mathbb{C}$*. Dann gilt*

(i) $(a_n + b_n)$ *ist konvergent und* $a_n + b_n \to a + b$,

(ii) $(a_n \cdot b_n)$ *ist konvergent und* $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$,

(iii) *$(c \cdot a_n)$ ist konvergent und $c \cdot a_n \to c \cdot a$,*

(iv) *Ist $b \neq 0$, so existiert $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $b_n \neq 0$ für $n \geq N$, und es ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq N}$ konvergent mit $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.*

Beweis. (i). Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N_a$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N_b$. Mit $N := \max\{N_a, N_b\}$ folgt dann für $n \geq N$, dass

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(ii). Es ist

$$a_n b_n - ab = a_n b_n - ab_n + ab_n - ab = (a_n - a)b_n + a(b_n - b).$$

Nach Satz 2.1.2 ist (b_n) beschränkt, d. h., es existiert $M \in \mathbb{R}_+$ mit $|b_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existieren $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$ für $n \geq N_a$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}$ für $n \geq N_b$. Mit $N := \max\{N_a, N_b\}$ folgt dann für $n \geq N$, dass

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \\
&\leq |(a_n - a)b_n| + |a(b_n - b)| \\
&= |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b| \\
&< \frac{\varepsilon}{2M} M + |a| \frac{\varepsilon}{2(|a| + 1)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

(iii). Dies folgt aus (ii) mit $b_n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iv). Sei $b \neq 0$. Dann gilt $\frac{|b|}{2} > 0$ und damit existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ für $n \geq N$. Es folgt $\frac{|b|}{2} > |b| - |b_n|$ und damit $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ für $n \geq N$. Insbesondere gilt also $b_n \neq 0$ für $n \geq N$.

Wir zeigen jetzt, dass $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n \geq N}$ gegen $\frac{1}{b}$ konvergiert. Dazu notieren wir zunächst, dass für $n \geq N$

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n| \cdot |b|} \leq \frac{2|b - b_n|}{|b|^2}$$

gilt. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N' \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{|b|^2 \varepsilon}{2}$ für $n \geq N'$. Mit $N'' := \max\{N, N'\}$ folgt dann für $N \geq N''$, dass

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \leq \frac{2|b - b_n|}{|b|^2} < \varepsilon.$$

Damit gilt $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$. Aus (ii) folgt jetzt $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$. □

Satz 2.2.2 *Eine komplexe Zahlenfolge (a_n) konvergiert genau dann, wenn die reellen Zahlenfolgen $(\mathrm{Re}\, a_n)$ und $(\mathrm{Im}\, a_n)$ konvergieren. Es gilt dann $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\, a_n = \mathrm{Re}(\lim_{n\to\infty} a_n)$ und $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\, a_n = \mathrm{Im}(\lim_{n\to\infty} a_n)$.*

Beweis. "$\Leftarrow$". Dies folgt aus Satz 2.2.1, (i) und (iii).

"$\Rightarrow$". Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Die Behauptung folgt dann aus $|\mathrm{Re}\ a_n - \mathrm{Re}\ a| = |\mathrm{Re}(a_n - a)| \le |a_n - a|$ und $|\mathrm{Im}\ a_n - \mathrm{Im}\ a| = |\mathrm{Im}(a_n - a)| \le |a_n - a|$. $\square$

Satz 2.2.3 *Wenn die komplexe Zahlenfolge (a_n) gegen a konvergiert, so konvergieren $(|a_n|)$ gegen $|a|$ und $(\overline{a_n})$ gegen $\overline{a}$.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus $||a_n| - |a|| \le |a_n - a|$ und $|\overline{a_n} - \overline{a}| = |\overline{a_n - a}| = |a_n - a|$. $\square$

Wir betrachten noch einmal das Beispiel der durch $a_n := q^n$ definierten komplexen Zahlenfolge (a_n), wobei $q \in \mathbb{C}$, $|q| = 1$. Gilt dann $a_n \to a$, so folgt $|a_n| \to |a|$. Wegen $|a_n| = |q^n| = |q|^n = 1^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ impliziert dies $|a| = 1$. Weiter gilt auch $a_{n+1} \to a$. Andererseits gilt aber auch $a_{n+1} = qa_n \to qa$. Es folgt $a = qa$. Wegen $|a| = 1$ ist aber $a \ne 0$. Damit folgt $q = 1$. Für $q \in \mathbb{C}$, $|q| = 1$, konvergiert also die komplexe Zahlenfolge (q^n) genau dann, wenn $q = 1$.

Satz 2.2.4 *Seien (a_n), (b_n) konvergente reelle Zahlenfolgen. Es existiere $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \le b_n$ für alle $n \ge N$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$.*

Beweis. Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim_{n\to\infty} b_n$. Wir nehmen an, dass $a > b$ gilt. Dann ist $a - b > 0$ und damit auch $\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$. Also existieren $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \ge N_a$ und $|b_n - b| < \varepsilon$ für $n \ge N_b$. Sei $N' := \max\{N_a, N_b\}$. Für $n \ge N'$ gilt dann $b_n - b < \varepsilon$ und $a - a_n < \varepsilon$. Es folgt $(b_n - b) + (a - a_n) < 2\varepsilon$ und damit $b_n - a_n < 2\varepsilon + b - a = 0$ für $n \ge N'$. Es folgt $b_n < a_n$ für $n \ge N'$. Dies ist ein Widerspruch. $\square$

Man beachte, dass aus $a_n < b_n$ für $n \ge N$ nicht $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$ gefolgert werden kann. Ein Gegenbeispiel ist etwa durch $a_n = -\frac{1}{n}$ und $b_n = \frac{1}{n}$ gegeben. Hier sind beide Grenzwerte 0.

Eine wichtiger Spezialfall von Satz 2.2.4 ist der Fall, dass eine der Folgen (a_n), (b_n) konstant ist. So folgt etwa aus $a_n \to a$ und $a_n \le b$ für $n \ge N$, dass $a \le b$ gilt.

Satz 2.2.5 *Seien (a_n), (b_n), (c_n) reelle Zahlenfolgen. Es existiere $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \le b_n \le c_n$ für alle $n \ge N$. Sind dann (a_n) und (c_n) konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$, so ist auch (b_n) konvergent und hat den gleichen Grenzwert wie (a_n) und (c_n).*

Beweis. Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $N_a, N_c \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \ge N_a$ und $|c_n - a| < \varepsilon$ für $n \ge N_c$. Mit $N_b := \max\{N, N_a, N_c\}$ folgt dann für $n \ge N_b$, dass $a - b_n \le a - a_n \le |a_n - a| < \varepsilon$ und $b_n - a \le c_n - a \le |c_n - a| < \varepsilon$, also $|b_n - a| < \varepsilon$. $\square$

Beispiel. Sei $b \in \mathbb{R}_+$. Für $n \ge \max\{b, \frac{1}{b}\}$ ist dann $\frac{1}{n} \le b \le n$ und damit $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \le \sqrt[n]{b} \le \sqrt[n]{n}$. Wegen $\sqrt[n]{n} \to 1$ folgt $\sqrt[n]{b} \to 1$.

2.3 Konvergenzkriterien

Satz 2.3.1 *Sei* (a_n) *eine monoton steigende (bzw. fallende) und nach oben (bzw. unten) beschränkte reelle Zahlenfolge. Dann ist* (a_n) *konvergent.*

Ist $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$*, so gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$ *(bzw.* $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf A$*).*

Beweis. Wir betrachten nur den Fall, dass (a_n) monton steigend und nach oben beschränkt ist. (Der andere Fall kann darauf zurückgeführt werden.) Sei $a := \sup A$. Zu zeigen ist, dass $a_n \to a$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Nach Satz 1.7.4 existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N > a - \varepsilon$. Wegen der Monotonie von (a_n) folgt $a_n > a - \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Andererseits gilt $a_n \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wegen $a = \sup A$. Es folgt $|a_n - a| = a - a_n < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. □

Beispiel 1. Wir betrachten die *rekursiv* definierte Folge (a_n) mit $a_1 = 2$ und

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

für $n \in \mathbb{N}$. Offensichtlich gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Formaler Beweis durch vollständige Induktion.) Genauer gilt sogar, dass $a_n \geq \sqrt{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies ist klar für $n = 1$ und folgt für $n \geq 2$ wegen

$$\begin{aligned} a_n^2 - 2 &= \frac{1}{4}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right)^2 - 2 \\ &= \frac{1}{4}\left(a_{n-1}^2 + 4 + \frac{4}{a_{n-1}^2}\right) - 2 \\ &= \frac{1}{4}\left(a_{n-1}^2 - 4 + \frac{4}{a_{n-1}^2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(a_{n-1} - \frac{2}{a_{n-1}}\right)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

und $a_n > 0$. Desweiteren gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $a_{n+1} \leq a_n$, denn

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{a_n^2}\right) \overset{a_n \geq \sqrt{2}}{\leq} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{2}\right) = 1.$$

Hieraus folgt unmittelbar (durch vollständige Induktion), dass $a_m \leq a_n$ für $m \geq n$ gilt, d. h., die Folge (a_n) ist monoton fallend. Nach Satz 2.3.1 konvergiert (a_n) also gegen $a = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Um den Grenzwert a zu bestimmen, notieren wir zunächst, dass wegen $a_n \geq \sqrt{2}$ nach Satz 2.2.4 auch $a \geq \sqrt{2}$ gilt. Außerdem gilt auch $a_{n+1} \to a$, und aus der Rekursionsformel und Satz 2.2.1 folgt damit $a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$. Dies ergibt aber $\frac{a}{2} = \frac{1}{a}$ und damit $a^2 = 2$, wegen $a \geq \sqrt{2}$ also $a = \sqrt{2}$.

Allgemeiner kann man wie oben zeigen, dass für $c > 0, a_1 > 0$ und

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$$

folgt, dass $a_n \to \sqrt{c}$.

Mit diesem Verfahren kann man die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl beliebig genau durch rationale Zahlen approximieren. Das Verfahren ist nach Heron von Alexandria (1. Jhdt. n. Chr.) benannt, war aber den Babyloniern bereits 2000 Jahre vorher bekannt. Heute wird es im Schulunterricht i. a. in der 9. Klasse behandelt.

Beispiel 2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ und $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)a_n$. Dann ist (a_n) monoton steigend, denn für $n \geq 2$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\
&= \left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \\
&= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \\
&= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \\
&\overset{\text{Bernoulli}}{\geq} \left(1-n\frac{1}{n^2}\right) \frac{n}{n-1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ähnlich zeigt man, dass (b_n) monoton fallend ist. Damit gilt

$$a_1 \leq a_n < a_n \left(1+\frac{1}{n}\right) = b_n \leq b_1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 2.3.1 existieren damit $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$ and $b_n \to b$. Wegen $a_n\left(1+\frac{1}{n}\right) = b_n$ folgt $a = b$ nach Satz 2.2.1, (ii).

Der gemeinsame Grenzwert von (a_n) und (b_n) heißt *Eulersche Zahl* und wird mit e bezeichnet. Es gilt $e = 2,718\ldots$.

Definition 2.3.1 Sei (a_n) Zahlenfolge und $a \in \mathbb{C}$. Dann heißt a *Häufungswert* von (a_n), falls für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ existieren.

Die Bedingung, dass unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ existieren, ist äquivalent dazu, dass zu vorgegebenem $N \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ und $|a_n - a| < \varepsilon$ existiert. In Quantorenschreibweise lautet die letzte Bedingung wie folgt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \forall N \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} : n \geq N \wedge |a_n - a| < \varepsilon.$$

Als Beispiel betrachten wir die durch $a_n = (-1)^n$ gegebene Folge (a_n). Hier sind 1 und -1 Häufungswerte.

Definition 2.3.2 Sei X Menge, $a : \mathbb{N} \to X$ Folge und $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton steigende Folge. Dann heißt die Folge $a \circ \nu : \mathbb{N} \to X$ eine *Teilfolge* von a. Sie wird mit $(a_{\nu(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ oder $(a_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$ bezeichnet.

Satz 2.3.2 *Sei* (a_n) *Zahlenfolge und* $a \in \mathbb{C}$. *Dann gilt:*

(i) *a ist Häufungswert von* $(a_n) \Leftrightarrow$ *Es existiert eine Teilfolge von* (a_n)*, die gegen a konvergiert.*

(ii) *a ist Grenzwert von* $(a_n) \Leftrightarrow$ *Alle Teilfolgen von* (a_n) *konvergieren gegen a.*

Der *Beweis* sei als Übung überlassen.

Satz 2.3.3 (Satz von Bolzano-Weierstraß) *Jede beschränkte Zahlenfolge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Im Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß werden wir folgenden Satz benutzen.

Satz 2.3.4 *Jede reelle Zahlenfolge besitzt eine monotone Teilfolge.*

Hierbei bedeutet "monoton" natürlich "monoton steigend oder monoton fallend".

Beweis von Satz 2.3.4. Sei (a_n) reelle Zahlenfolge. Wir nennen $m \in \mathbb{N}$ *Gipfel* von (a_n), falls $a_n < a_m$ für alle $n > m$.

Fall 1. Es existieren unendlich viele Gipfel. Seien $m_1, m_2, m_3, \ldots$ Gipfel mit $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$. Dann ist (a_{m_k}) monoton fallende Teilfolge von (a_n).

Fall 2. Es existieren höchstens endlich viele Gipfel. Dann existiert $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_1$ keine Gipfel sind. Insbesondere ist n_1 kein Gipfel und damit existiert $n_2 > n_1$ mit $a_{n_2} \geq a_{n_1}$. Auch n_2 ist kein Gipfel, also existiert $n_3 > n_2$ mit $a_{n_3} \geq a_{n_2}$, und n_3 ist kein Gipfel. Induktiv erhält man so eine monoton steigende Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n). □

Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß. Sei (a_n) beschränkte Zahlenfolge. Wir betrachten zunächst den Fall, dass (a_n) reelle Zahlenfolge ist. Dann besitzt (a_n) nach Satz 2.3.4 eine monotone Teilfolge besitzt. Diese Teilfolge ist natürlich auch beschränkt, und damit konvergent nach Satz 2.3.1.

Wir betrachten jetzt den Fall, dass (a_n) (beschränkte) komplexe Zahlenfolge ist. Dann sind die Folgen $(\operatorname{Re} a_n)$ und $(\operatorname{Im} a_n)$ reell und beschränkt. Nach dem bereits bewiesenen besitzt $(\operatorname{Re} a_n)$ eine konvergente Teilfolge $(\operatorname{Re} a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, und die Folge $(\operatorname{Im} a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge $\left(\operatorname{Im} a_{n_{k_j}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$. Es folgt, dass $\left(a_{n_{k_j}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. □

Definition 2.3.3 Eine Zahlenfolge (a_n) heißt *Cauchyfolge*, falls für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$.

In Quantorenschreibweise lautet die Definition wie folgt:

$$\begin{aligned} & (a_n) \text{ ist Cauchyfolge} \\ \Leftrightarrow\quad & \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N} : (m \geq N \wedge n \geq N) \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Satz 2.3.5 (Cauchykriterium für Folgen) *Eine Zahlenfolge konvergiert genau dann, wenn sie Cauchyfolge ist.*

Beweis. "$\Rightarrow$" Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ and $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Gilt dann $m \geq N$ und $n \geq N$, so folgt

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

"$\Leftarrow$": Sei (a_n) Cauchyfolge. Zu zeigen ist, dass (a_n) konvergiert. Wir zeigen zunächst (ähnlich wie im Beweis von Satz 2.1.2), dass (a_n) beschränkt ist. Dazu notieren wir, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a_m| < 1$ für $m, n \geq N$. Es folgt $|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|$ für $n \geq N$, und damit $|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert also eine konvergente Teilfolge von (a_n), etwa $a_{n_k} \to a$.

Wir zeigen jetzt, dass $a_n \to a$ gilt. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann existiert $K \in N$ mit $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $k \geq K$. Außerdem existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $m, n \geq N$. Sei nun $n \geq N$. Dann existiert $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \geq K$ und $n_\ell \geq N$. Es folgt

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_\ell}| + |a_{n_\ell} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

Wichtig bei obigem Satz sowie den Sätzen 2.3.1 und 2.3.2 ist, dass sie erlauben, die Konvergenz einer Folge nachzuweisen, *ohne den Grenzwert zu kennen*. Das Entscheidende dabei ist die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Umgekehrt könnte man auch wieder die Vollständigkeit dadurch definieren, dass man die Konvergenz jeder Cauchyfolge verlangt. Dann müsste man aber, um dem Vollständigkeitsbegriff von Definition 1.7.3 zu erhalten, noch zusätzlich das Archimedische Axiom verlangen; vgl. die Diskussion nach Satz 1.8.9. (Wir werden aber später in metrischen Räumen Vollständigkeit auf diesem Wege definieren.)

Exkurs: Konstruktion der reellen Zahlen. Wir wollen den Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ der rationalen Zahlen zum Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ der reellen Zahlen "vervollständigen". Dazu sei C die Menge der Cauchyfolgen rationaler Zahlen. Wir betrachten die auf C durch

$$(x_n) \sim (y_n) :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$$

definierte Relation $\sim$.

Man zeigt leicht, dass $\sim$ Äquivalenzrelation ist. Um etwa die Transivität zu zeigen, seien $(x_n), (y_n), (z_n) \in C$ mit $(x_n) \sim (y_n)$ und $(y_n) \sim (z_n)$. Dann gilt $(x_n - y_n) \to 0$ und $(y_n - z_n) \to 0$ und damit $(x_n - z_n) = (x_n - y_n) + (y_n - z_n) \to 0$, also $(x_n) \sim (z_n)$.

Auf der Menge $C/\!\sim$ der Äquivalenzklassen definieren wir eine Addition und eine Multiplikation durch

$$[(x_n)] + [(y_n)] := [(x_n + y_n)]$$

und

$$[(x_n)] \cdot [(y_n)] := [(x_n \cdot y_n)].$$

Zunächst muss man zeigen, dass diese Addition und Multiplikation von Äquivalenzklassen wohldefiniert sind. Dazu muss man zum einen zeigen, dass mit $(x_n), (y_n) \in C$ auch $(x_n + y_n) \in C$ und $(x_n \cdot y_n) \in C$ gilt, und zum andern, dass für $(x_n) \sim (x'_n)$

und $(y_n) \sim (y'_n)$ auch $(x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n)$ und $(x_n \cdot y_n) \sim (x'_n \cdot y'_n)$ gilt. Wir verzichten hier auf den Beweis dieser Aussagen.

Es gilt dann, dass $(C/\sim, +, \cdot)$ Körper ist. Auf einen Nachweis der einzelnen Körperaxiome verzichten wir. Das Nullelement des Körpers ist $[(0, 0, 0, \dots)]$ und das Einselement ist $[(1, 1, 1, \dots)]$.

Wir definieren eine Ordnung $\leq$ auf $C/\sim$ wie folgt:

$$[(x_n)] \leq [(y_n)] :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow x_n \leq y_n + \varepsilon.$$

(Man beachte hier, dass die "naive" Setzung $[(x_n)] \leq [(y_n)] :\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n$ hier *nicht* zum Erfolg führt. Diese ist noch nicht einmal wohldefiniert. Beispielsweise ist ja $[(\frac{1}{n})] = [(-\frac{1}{n})]$.)

Zunächst muss man wieder zeigen, dass $\leq$ wohldefiniert ist. Sei dazu $(x_n) \sim (x'_n)$ und $(y_n) \sim (y'_n)$ und es gelte

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow x_n \leq y_n + \varepsilon.$$

Zu zeigen ist

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow x'_n \leq y'_n + \varepsilon.$$

Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann existiert M mit $x_n \leq y_n + \frac{\varepsilon}{3}$ für $n \geq M$. Weiter existieren $N_x, N_y \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x'_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ für $n \geq N_x$ und $|y_n - y'_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ für $n \geq N_y$. Für $n \geq \max\{M, N_x, N_y\}$ folgt dann

$$x'_n < x_n + \frac{\varepsilon}{3} < y_n + 2\frac{\varepsilon}{3} < y'_n + 3\frac{\varepsilon}{3} = y'_n + \varepsilon.$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\leq$ tatsächlich Ordnung ist. Ebenso kann man nachrechnen, dass die Ordnungsaxiome (O1) und (O2) erfüllt sind. Damit erhält man, dass $(C/\sim, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper ist.

Man kann $r \in \mathbb{Q}$ mit der Äquivalenzklasse $[(r, r, r, \dots)]$ identifizieren. In diesem Sinne ist $\mathbb{Q}$ Teilkörper von $C/\sim$. Formal betrachtet man wieder die injektive Abbildung $i : \mathbb{Q} \to C/\sim, r \mapsto [(r, r, r, \dots)]$. Es gilt für $r, s \in \mathbb{Q}$ dann, dass $i(r + s) = i(r) + i(s)$, $i(r \cdot s) = i(r) \cdot i(s)$ und $r \leq s \Leftrightarrow i(r) \leq i(s)$.

Schließlich zeigt man dann, dass $(C/\sim, +, \cdot)$ vollständig ist. Dies kann man beispielsweise tun, indem man Folgendes zeigt:

- Jede Cauchyfolge in $(C/\sim, +, \cdot)$ ist konvergent.
- In $(C/\sim, +, \cdot)$ gilt das Archimedische Axiom.
- Ein angeordneter Körper, in dem das Archimedische Axiom gilt und in dem jede Cauchyfolge konvergiert, ist vollständig.

Wir verzichten hier auf die Einzelheiten.

2.4 Limes superior und inferior sowie uneigentliche Grenzwerte

Sei (a_n) eine beschränkte reelle Zahlenfolge. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := \{a_k : k \geq n\}$. Dann ist A_n beschränkt und damit existiert $\sup A_n$. Ist $m \leq n$, so gilt $A_n \subset$

A_m und damit $\sup A_n \leq \sup A_m$. Die Folge $(\sup A_n)$ ist also monoton fallend. Außerdem ist sie beschränkt. Deshalb ist sie nach Satz 2.3.1 konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty} \sup A_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup A_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k$.

Definition 2.4.1 Sei (a_k) reelle Zahlenfolge. Dann heißen

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k$$

Limes superior und

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k$$

Limes inferior von (a_n), falls die Suprema und Infima rechts existieren.

Statt lim sup schreibt man auch $\overline{\lim}$ und statt lim inf schreibt man auch $\underline{\lim}$. Aus den obigen Überlegungen folgt, dass Limes superior und inferior immer existieren, wenn (a_n) beschränkt ist. Umgekehrt sieht man sofort, dass aus der Existenz des Limes superior die Beschränktheit von (a_n) nach oben und aus der des Limes inferior die Beschränktheit nach unten folgt.

Wegen $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup A_n$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf A_n$ und $\inf A_n \leq \sup A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt mit Satz 2.2.4, dass

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

gilt.

Satz 2.4.1 *Eine reelle Zahlenfolge (a_n) ist genau dann konvergent, wenn der Limes superior und inferior beide existieren und den gleichen Wert haben.*

Beweis. "$\Rightarrow$". Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N$. Es folgt $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ für $n \geq N$ und damit $a - \varepsilon < \inf_{k\geq N} a_k \leq \sup_{k\geq N} a_k < a + \varepsilon$. Damit gilt $a - \varepsilon < \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k = \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k < a + \varepsilon$.

"$\Leftarrow$". Sei $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = a$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon < \inf_{k\geq n} a_k \leq \sup_{k\geq n} a_k < a + \varepsilon$ für $n \geq N$. Es folgt $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ und damit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N$. $\square$

Satz 2.4.2 *Sei (a_n) eine beschränkte reelle Zahlenfolge und sei H die Menge der Häufungswerte von (a_n). Dann ist $H \neq \emptyset$ und es gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = \max H$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = \min H$.*

Beweis. Es genügt, $\limsup_{n\to\infty} a_n = \max H$ zu zeigen.

Sei wieder $A_n := \{a_k : k \geq n\}$ und damit $a := \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup A_n$. Wir zeigen zunächst, dass $a \in H$. Aufgrund der Bemerkung nach Definition 2.3.1 haben wir Folgendes zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} : k \geq N \wedge |a_k - a| < \varepsilon.$$

Sei also $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$. Zunächst existiert $N' \in \mathbb{N}$ mit $|\sup A_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N'$. Sei nun $n \geq \max\{N, N'\}$. Nach Satz 1.7.4 existiert $x \in A_n$ mit

$x > \sup A_n - \frac{\varepsilon}{2}$, das heißt, es existiert $k \geq n \geq N$ mit $a_k > \sup A_n - \frac{\varepsilon}{2}$. Wegen $a_k \leq \sup A_n$ ist also $|\sup A_n - a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Es folgt

$$|a_k - a| \leq |a_k - \sup A_n| + |\sup A_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also gilt $a \in H$.

Wir zeigen nun, dass $a = \max H$. Sei dazu $b \in H$. Wir haben zu zeigen, dass $b \leq a$ gilt. Wir nehmen an, dass $b > a$ gilt. Dann ist $\varepsilon := b - a > 0$. Wieder existiert $N' \in \mathbb{N}$ mit $|\sup A_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N'$. Außerdem existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq N'$ und $|a_k - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Es folgt

$$\varepsilon = b - a = b - a_k + a_k - a \leq |b - a_k| + |\sup A_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

was ein Widerspruch ist. $\square$

Wir erweitern nun $\mathbb{R}$ durch hinzufügen zweier Elemente ∞ (gelegentlich auch mit $+\infty$ bezeichnet) und $-\infty$ zu einer Menge $\overline{\mathbb{R}}$, also $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Die Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}$ erweitern wir zu einer Ordnung auf $\overline{\mathbb{R}}$, indem wir $-\infty < x$ und $x < \infty$ für $x \in \mathbb{R}$ und außerdem $-\infty < \infty$ setzen. Man rechnet leicht nach, dass $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ geordnete Menge ist. Es ist dabei jede Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}}$ beschränkt, denn ∞ ist immer obere und $-\infty$ ist immer untere Schranke. Außerdem ist die geordnete Menge $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ ordnungsvollständig. Um dies einzusehen, bezeichnen wir (vorübergehend) das Supremum in $(\mathbb{R}, \leq)$ mit $\sup_{\mathbb{R}}$ und das in $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ mit $\sup_{\overline{\mathbb{R}}}$. Sei nun $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Es zeigt sich dann, dass $\sup_{\overline{\mathbb{R}}} A = \infty$ falls $\infty \in A$ oder falls $A \cap \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt ist, und dass $\sup_{\overline{\mathbb{R}}} A = \sup_{\mathbb{R}}(A \cap \mathbb{R})$ falls $\infty \notin A$ und $A \cap \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt ist. Im verbleibenden Fall ist $\infty \notin A$ und $A \cap \mathbb{R} = \emptyset$, also $A = \{-\infty\}$ oder $A = \emptyset$, und es folgt $\sup A = -\infty$. Analog lässt sich auch das Infimum von Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ kennzeichnen. Wir halten also fest, dass jede Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}}$ ein Supremum und ein Infimum (bzgl. der geordneten Menge $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$) besitzt.

Nach Definition 2.4.1 und Satz 2.4.1 sind Limes superior, Limes inferior und Grenzwert einer reellen Zahlenfolge Suprema und Infima gewisser Teilmengen von $\mathbb{R}$. Wir nehmen nun diese Suprema und Infima bzgl. der geordneten Menge $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$. Es folgt, dass Limes superior und Limes inferior dann für jede reelle Zahlenfolge (und sogar für jede Folge nach $\overline{\mathbb{R}}$) existieren, möglicherweise aber den Wert ∞ oder $-\infty$ haben. Gilt für eine reelle Zahlenfolge (a_n), dass $\liminf_{n\to\infty} a_n = \infty$ (und damit auch $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$), so schreiben wir auch $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und nennen (a_n) *bestimmt divergent* gegen ∞. Analog definiert man bestimmte Divergenz gegen $-\infty$. Man bezeichnet ∞ und $-\infty$ auch als *uneigentliche Grenzwerte*.

Beispiel 1. Sei $a_n = n$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, denn mit $A_n := \{a_k : k \geq n\}$ ist $\inf_{\overline{\mathbb{R}}} A_n = \inf_{\mathbb{R}} A_n = n$ und folglich $\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{\overline{\mathbb{R}}}\{\inf_{\overline{\mathbb{R}}} A_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup_{\overline{\mathbb{R}}} \mathbb{N} = \infty$.

Beispiel 2. Sei $a_n = (-1)^n$. Dann ist $A_n := \{-1, 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt, dass $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$.

2.5 Die allgemeine Potenz

In Definition 1.8.1 hatten wir die Potenz a^r für $a \in \mathbb{R}_+$ und $r \in \mathbb{Q}$ erklärt. Wir wollen dies jetzt für $r \in \mathbb{R}$ tun. Eine Möglichkeit dafür wurde bereits im Anschluss an Satz 1.8.6 angegeben, aber wir beschreiten jetzt einen anderen Weg.

Hilfssatz 2.5.1 *Sei (r_n) eine Folge rationaler Zahlen mit $r_n \to 0$ und sei $a \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt $a^{r_n} \to 1$.*

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man $a > 1$ annehmen. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.Wegen $a^{1/k} \to 1$ für $k \to \infty$ (vgl. Beispiel nach Satz 2.2.5) existiert $K \in \mathbb{N}$ mit $|a^{1/k} - 1| < \varepsilon$ und $|a^{-1/k} - 1| = |\left(\frac{1}{a}\right)^{1/k} - 1| < \varepsilon$ für $k \geq K$. Weiter existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|r_n| < \frac{1}{K}$ für $n \geq N$. Es folgt $-\varepsilon < a^{-1/K} - 1 < a^{r_n} - 1 < a^{1/K} - 1 < \varepsilon$, also $|a^{r_n} - 1| < \varepsilon$, für $n \geq N$. □

Hilfssatz 2.5.2 *Sei (r_n) eine Folge rationaler Zahlen und sei $a \in \mathbb{R}_+$. Konvergiert (r_n), so konvergiert auch (a^{r_n}). Dabei hängt $\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ nur von $r := \lim_{n\to\infty} r_n$ ab und es gilt $\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^r$ falls $r \in \mathbb{Q}$*

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man wieder $a > 1$ annehmen. Sei (s_n) eine monoton fallende Folge mit $s_n \to r$. (Die Existenz einer solchen Folge kann man aus Satz 1.8.4 ableiten, welcher besagt, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist.) Sei $m \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq r$. Dann gilt $s_n \geq r \geq m$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $a^{s_n} \geq a^m$ nach Satz 1.8.6. Folglich ist (a^{s_n}) nach unten beschränkt. Außerdem ist (a^{s_n}) nach Satz 1.8.6 monoton fallend, und damit nach Satz 2.3.1 konvergent.

Sei nun (r_n) eine Folge rationaler Zahlen mit $r_n \to r$. Dann gilt $r_n - s_n \to 0$, nach Hilfssatz 2.5.1 also $a^{r_n - s_n} \to 1$. Wegen $a^{r_n} = a^{s_n + r_n - s_n} = a^{s_n} a^{r_n - s_n}$ ist dann auch (a^{r_n}) konvergent und hat den gleichen Grenzwert wie (a^{s_n}).

Ist $r \in \mathbb{Q}$, so kann man $s_n = r$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wählen, und damit ist a^r der gemeinsame Grenzwert von (a^{r_n}) und (a^{s_n}). □

Definition 2.5.1 *Sei $a \in \mathbb{R}_+$ und $r \in \mathbb{R}$. Dann setzen wir $a^r := \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$, wobei (r_n) eine rationale Zahlenfolge mit $r_n \to r$ ist.*

Hilfssatz 2.5.2 zeigt, dass a^r wohldefiniert ist (und im Beweis wurde bemerkt, dass eine Folge (r_n) mit den gewünschten Eigenschaften für jedes $r \in \mathbb{R}$ existiert).

Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dass die in Satz 1.8.6 formulierten Potenzgesetze auch für reelle Exponenten richtig bleiben. Ebenso bleiben auch die Behauptungen der obigen Hilfssätze richtig, wenn man $r_n, r \in \mathbb{R}$ zulässt.

2.6 Reihen

Definition 2.6.1 Sei $N \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n\geq N}$ Zahlenfolge. Die durch $s_n := \sum_{k=N}^{n} a_k$ definierte Folge $(s_n)_{n\geq N}$ heißt die zu (a_n) gehörige *(unendliche) Reihe*. Sie wird mit $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ oder auch $\sum a_n$ bezeichnet. Die Reihe heißt *konvergent*, wenn die Folge (s_n) konvergiert. In diesem Fall heißt der Grenzwert von (s_n) die *Summe* der Reihe $\sum a_n$. Gilt $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, so schreibt man $\sum_{n=N}^{\infty} a_n = s$.

Reihen, die nicht konvergieren, heißen *divergent* (und bei Existenz des uneigentlichen Grenzwertes ∞ oder $-\infty$ auch *bestimmt divergent*). Die Folge (s_n) heißt auch *Folge der Partialsummen* (oder *Teilsummen*) der Reihe $\sum a_n$.

Wir bezeichnen mit $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ bzw. $\sum a_n$ also sowohl die Reihe selbst, wie auch – im Konvergenzfall – ihre Summe. Das sollte im allgemeinen aber nicht zu Verwechslungen führen.

Beispiel. Sei $q \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$. Es ist also $a_n = q^n$. Diese Reihe heißt *geometrische Reihe.*

Fall 1. $q = 1$. Dann gilt $a_n = 1$ und $s_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$. Die Reihe ist (bestimmt) divergent.

Fall 2. $q \neq 1$. Es gilt $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, denn

$$\begin{aligned}(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k &= \sum_{k=0}^{n}(1-q)q^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} q^k - q^{k+1} \\ &= 1 - q + q - q^2 + q^2 - q^3 + \cdots + q^n - q^{n+1} \\ &= 1 - q^{n+1}.\end{aligned}$$

Wegen $q^{n+1} \to 0$ für $|q| < 1$ folgt, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{für} \quad |q| < 1,$$

d. h., die Reihe konvergiert für $|q| < 1$ und ihre Summe ist $\frac{1}{1-q}$.

Für $|q| \geq 1$ divergiert die Reihe.

Da Reihen nach Definition also nichts anderes als Folgen sind, haben Sätze über Folgen Analoga für Reihen. Aus Satz 2.2.1, (i), erhält man z. B., dass aus der Konvergenz von $\sum a_n$ und $\sum b_n$ die von $\sum(a_n + b_n)$ folgt, und dass für die Summen $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$ gilt. Analog überträgt sich Satz 2.2.1, (iii).

Satz 2.6.1 *Sei $\sum a_n$ eine Reihe nichtnegativer reeller Zahlen, d. h., es gelte $a_n \geq 0$ für alle n. Dann konvergiert $\sum a_n$ genau dann, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.*

Beweis. "$\Rightarrow$" folgt aus Satz 2.1.2 ("Konvergente Folgen sind beschränkt"), und "$\Leftarrow$" folgt aus Satz 2.3.1, da die Folge der Partialsummen wegen $a_n \geq 0$ monoton steigend ist. □

Satz 2.6.2 (Cauchyscher Verdichtungssatz) *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.*

Beweis. Mit $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ist

$$\begin{aligned} s_{2^{n+1}-1} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + \cdots + a_{2^{n+1}-1} \\ &\le a_1 + a_2 + a_2 + a_4 + a_4 + a_4 + a_4 + a_8 + a_8 + \cdots + a_{2^n} \\ &= \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k} \\ &\le a_1 + a_2 + a_2 + a_3 + a_3 + a_4 + a_4 + a_5 + a_5 + \cdots + a_{2^n} \\ &= 2s_{2^n} - a_1 \\ &\le 2s_{2^n}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt mit Satz 2.6.1. □

Beispiel. Sei $\alpha > 0$ und $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Dann sind die Voraussetzungen von Satz 2.6.2 erfüllt und damit ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ genau dann konvergent, wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-\alpha)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^k$$

konvergiert. Dies ist aber die geometrische Reihe, und diese konvergiert genau dann, wenn $2^{1-\alpha} < 1$, also wenn $\alpha > 1$ gilt.

Insgesamt konvergiert also $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ für $\alpha > 1$, und divergiert für $0 < \alpha \le 1$. Insbesondere divergiert die sogenannte *harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Satz 2.6.3 (Leibnizkriterium) *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$. Für die Folge (s_n) der Partialsummen gilt dabei*

$$s_{2n} \le \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k \le s_{2n-1}$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Es ist $s_{2n+1} - s_{2n-1} = (-1)^{2n+2} a_{2n+1} + (-1)^{2n+1} a_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n} \le 0$ für $n \in \mathbb{N}$, also ist (s_{2n-1}) monoton fallend. Analog ist (s_{2n}) monoton steigend. Außerdem gilt $s_{2n} - s_{2n-1} = (-1)^{2n+1} a_{2n} = -a_{2n} < 0$ und damit $s_2 \le s_{2n} < s_{2n-1} \le s_1$.

Nach Satz 2.3.1 konvergieren damit die Folgen (s_{2n-1}) und (s_{2n}), und wegen $s_{2n} - s_{2n-1} = -a_{2n} \to 0$ haben sie den gleichen Grenzwert. Daraus folgt die Behauptung. □

Beispiel. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ ist konvergent. Für die Summe s gilt $s_2 = \frac{1}{2} \le s \le 1 = s_1$. (Tatsächlich gilt $e^s = 2$, und es ist $s = 0,6931471806\ldots$.)

Satz 2.6.4 (Cauchykriterium für Reihen) *Eine Reihe $\sum_{k=K}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N \ge K$ existiert, so dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n > m \ge N$ die Ungleichung $\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$ gilt, d. h., falls*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \ge K \forall m, n \in \mathbb{N} : n > m \ge N \Rightarrow \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon.$$

Beweis. Wegen $s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k$ folgt die Behauptung aus Satz 2.3.5. □

Satz 2.6.5 *Konvergiert* $\sum_{k=K}^{\infty} a_k$, *so gilt* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Beweis. Man wähle $n = m + 1$ im Cauchykriterium. □

Die harmonische Reihe zeigt, dass in Satz 2.6.5 nicht die Umkehrung gilt.

2.7 Absolute und bedingte Konvergenz

Definition 2.7.1 Eine Reihe $\sum a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum |a_n|$ konvergiert.

Satz 2.7.1 *Absolut konvergente Reihen sind konvergent.*

Der *Beweis* folgt wegen $\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|$ unmittelbar aus dem Cauchykriterium. □

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht. So ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Wir betrachten dieses Beispiel genauer:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
s & = & 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{8} & +\dots \\
\frac{s}{2} & = & & \frac{1}{2} & & -\frac{1}{4} & & +\frac{1}{6} & & -\frac{1}{8} & +\dots \\
\hline
\frac{3s}{2} & = & 1 & & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{5} & & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{4} & +\dots
\end{array}$$

Es zeigt sich, dass in der Reihe für $\frac{3s}{2}$ dieselben Folgenglieder auftreten wie in der Reihe für s, aber in anderer Reihenfolge.

Definition 2.7.2 Sei $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv und sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Dann heißt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu(k)}$ eine *Umordnung* der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Eine Reihe heißt *unbedingt konvergent*, wenn jede ihrer Umordnungen konvergiert, und zwar zur selben Summe. Eine konvergente, aber nicht unbedingt konvergente Reihe heißt *bedingt konvergent.*

Satz 2.7.2 *Absolut konvergente Reihen sind unbedingt konvergent.*

Bemerkung. Es gilt auch die Umkehrung.

Beweis von Satz 2.7.2. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergente Reihe und sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu(k)}$ eine Umordnung der Reihe. Sei $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ und sei $t_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\nu(k)}$. Dann ist (s_n) konvergent, und wir müssen zeigen, dass (t_n) ebenfalls konvergent ist und denselben Grenzwert hat. Dazu reicht es zu zeigen, dass $t_n - s_n \to 0$.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.Wegen der absoluten Konvergenz und aufgrund des Cauchykriteriums existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon$ für $n > m \geq N$. Weiter existiert $M \in \mathbb{N}$ mit $M > N$ und $\nu(\{1,2,\ldots,M\}) \supset \{1,2,\ldots,N\}$. Für $n \geq M$ folgt dann

$$\begin{aligned}
|t_n - s_n| &= \left| \sum_{k=1}^{n} a_{\nu(k)} - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \\
&= \left| \sum_{k \in \nu(\{1,2,\ldots,n\})} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \\
&= \left| \sum_{k \in \nu(\{1,2,\ldots,n\}) \setminus \{1,2,\ldots,N\}} a_k - \sum_{k=N+1}^{n} a_k \right| \\
&\leq \sum_{k=N+1}^{\max \nu(\{1,2,\ldots,n\})} |a_k| \\
&< \varepsilon. \quad \square
\end{aligned}$$

Satz 2.7.3 *Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergente Reihen mit Summen a und b. Dann ist die aus allen Produkten $a_j b_k$, $j,k \in \mathbb{N}_0$, gebildete Reihe absolut konvergent und ihre Summe ist ab.*

Eine etwas formalere Fassung der Behauptung des Satzes ist folgende: ist $\phi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ eine Bijektion und ist $p_n := a_j b_k$ falls $\phi(n) = (j,k)$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ konvergent mit $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = ab$.

Beweis von Satz 2.7.3. Seien ϕ und p_n wie oben, mit $\phi(n) = (\phi_1(n), \phi_2(n))$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $i \in \{1,2\}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $M_{i,n} := \max \phi_i(\{1,2,\ldots,n\})$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{n} |p_\ell| &= \sum_{\ell=0}^{n} |a_{\phi_1(\ell)}||b_{\phi_2(\ell)}| \\
&\leq \sum_{j=0}^{M_{1,n}} \sum_{k=0}^{M_{2,n}} |a_j||b_k| \\
&= \left(\sum_{j=0}^{M_{1,n}} |a_j| \right) \left(\sum_{k=0}^{M_{2,n}} |b_k| \right) \\
&\leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \right).
\end{aligned}$$

Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} |p_n|$ nach Satz 2.7.1.

Es reicht nun, $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = ab$ für eine Summationsreihenfolge (d. h., für eine Funktion ϕ) zu zeigen. Dazu betrachten wir die im folgenden Diagramm angedeutete Summationsreihenfolge:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_0b_0 & \rightarrow & a_0b_1 & & a_0b_2 & \rightarrow & a_0b_3 & & a_0b4 \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\
a_1b_0 & \leftarrow & a_1b_1 & & a_1b_2 & & a_1b_3 & & a_1b_4 \\
\downarrow & & & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\
a_2b_0 & \rightarrow & a_2b_1 & \rightarrow & a_2b_2 & & a_2b_3 & & a_2b_4 \\
 & & & & & & \downarrow & & \uparrow \\
a_3b_0 & \leftarrow & a_3b_1 & \leftarrow & a_3b_2 & \leftarrow & a_3b_3 & & a_3b_4 \\
\downarrow & & & & & & & & \uparrow \\
a_4b_0 & \rightarrow & a_4b_1 & \rightarrow & a_4b_2 & \rightarrow & a_4b_3 & \rightarrow & a_4b_4
\end{array}
$$

Es gilt dann

$$\sum_{k=0}^{(n+1)^2-1} p_k = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) \to ab$$

und damit $\sum_{k=0}^{n} p_k \to ab$. $\square$

Eine andere wichtige Summationsreihenfolge wird durch die folgende Definition gegeben.

Definition 2.7.3 Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ Reihen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *Cauchyprodukt* der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

Nach Satz 2.7.3 ist das Cauchyprodukt zweier absolut konvergenter Reihen ebenfalls absolut konvergent. Darüberhinaus kann man zeigen, daß das Cauchyprodukt auch dann konvergiert, und zwar zur "richtigen" Summe, wenn nur eine der beiden beteiligten Reihen absolut konvergiert und die andere nur im gewöhnlichen Sinne konvergiert.

2.8 Kriterien für absolute Konvergenz

Satz 2.8.1 (Vergleichskriterium) *Seien $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ Reihen.*

(i) *Existiert $M \geq N$ mit $|a_n| \leq b_n$ für $n \geq M$ und ist $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ konvergent, so ist $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*

(ii) *Existiert $M \geq N$ mit $0 \leq b_n \leq a_n$ für $n \geq M$ und ist $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ divergent, so ist $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ divergent.*

In (i) kann a_n komplex sein, in (ii) muss a_n reell sein. Sowohl in (i) wie in (ii) ist b_n reell. Man nennt (i) *Majorantenkriterium* und (ii) *Minorantenkriterium*.

Beweis. (i). Mit $s_n = \sum_{k=M}^{n} |a_n|$ und $t_n = \sum_{k=M}^{n} b_n$ ist $s_n \leq t_n$ für $n \geq M$. Konvergiert $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$, so ist auch $(t_n)_{k\geq M}$ konvergent und folglich beschränkt. Damit ist $(s_n)_{k\geq M}$ beschränkt, also konvergent, und damit auch $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ konvergent.

Der Beweis von (ii) ist analog. $\square$

Beispiel. Sei

$$a_n := \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\left(\frac{3+4i}{5}\right)^n$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\left(\frac{|3+4i|}{5}\right)^n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\left(\frac{\sqrt{3^2+4^2}}{5}\right)^n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergiert, ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Satz 2.8.2 (Wurzelkriterium) *Sei $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ Reihe.*

(i) *Existiert $q \in [0,1)$ und $M \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für $n \geq M$, so ist $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*

(ii) *Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n, so ist $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ divergent.*

Bemerkung. Die Voraussetzung in (i) ist äquivalent zu $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, und die Voraussetzung in (ii) ist erfüllt, falls $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$.

Beweis von Satz 2.8.2. (i). Aus $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ folgt $|a_n| \leq q^n$, und damit folgt die Behauptung aus dem Vergleichskriterium, da die geometrische Reihe $\sum q^n$ für $0 \leq q < 1$ konvergiert.

(ii). Aus $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ folgt $|a_n| \geq 1$. Gilt dies für unendlich viele n, so ist (a_n) keine Nullfolge, und damit die Reihe $\sum a_n$ divergent nach Satz 2.6.5. □

Beispiel. Sei

$$a_n := \left(\frac{in}{n+1}\right)^{n(n+1)}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\left|\frac{in}{n+1}\right|^{n(n+1)}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} \to \frac{1}{e}.$$

Wegen $\frac{1}{e} < 1$ folgt, dass $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ absolut konvergent ist.

Satz 2.8.3 (Quotientenkriterium) *Sei $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ Reihe.*

(i) *Existiert $q \in [0,1)$ und $M \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ und $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ für $n \geq M$, so ist $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*

(ii) *Existiert $M \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ und $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für $n \geq M$, so ist $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ divergent.*

Bemerkung. Es gelte $a_n \neq 0$ für $n \geq M$. Die Voraussetzung in (i) ist dann äquivalent zu $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, und die Voraussetzung in (ii) ist erfüllt, falls $\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$.

Beweis von Satz 2.8.3. (i). Es ist $|a_n| \leq q|a_{n-1}| \leq q^2|a_{n-2}| \leq \cdots \leq q^{n-M}|a_M| = q^n q^{-M}|a_M|$ für $n \geq M$. Die Behauptung folgt aus dem Vergleichskriterium.

(ii) Analog zu (i) folgt $|a_n| \geq |a_M|$ für $n \geq M$. Damit ist (a_n) keine Nullfolge, also $\sum a_n$ divergent.

Beispiel. Sei

$$a_n := \frac{7^n}{\binom{3n}{n}} = \frac{7^n(2n)!n!}{(3n)!}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{7^{n+1}(2n+2)!(n+1)!}{(3n+3)!}\frac{(3n)!}{7^n(2n)!n!} \\
&= \frac{7 \cdot 7^n(2n+2)(2n+1)(2n)!(n+1)n!}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!}\frac{(3n)!}{7^n(2n)!n!} \\
&= \frac{7(2n+2)(2n+1)(n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \\
&= \frac{7(2n+2)(2n+1)(n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \\
&= \frac{7\left(2+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(3+\frac{3}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\left(3+\frac{1}{n}\right)} \\
&\to \frac{7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 3 \cdot 3} \\
&= \frac{28}{27}.
\end{aligned}$$

Wegen $\frac{28}{27} > 1$ divergiert die Reihe $\sum a_n$.

2.9 Potenzreihen

Definition 2.9.1 Eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, mit $z, z_0 \in \mathbb{C}$ und einer Folge (a_n) komplexer Zahlen, heißt *Potenzreihe.*

Ist z_0 und (a_n) gegeben, so stellt sich die Frage, für welche $z \in \mathbb{C}$ die Reihe konvergiert. Dies wird weitgehend durch den folgenden Satz geklärt.

Satz 2.9.1 *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ Potenzreihe. Es sei $\ell := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ und $r := \frac{1}{\ell}$ falls $\ell \in \mathbb{R}_+$, $r := 0$ falls $\ell = \infty$ und $r := \infty$ falls $\ell = 0$. Dann konvergiert die Potenzreihe absolut falls $|z - z_0| < r$ und sie divergiert falls $|z - z_0| > r$*

Beweis. Sei $b_n := a_n(z - z_0)^n$. Dann ist $\sqrt[n]{|b_n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|z - z_0|$. Hieraus ergibt sich $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \ell|z - z_0|$. Die Behauptung folgt jetzt aus dem Wurzelkriterium. □

Bemerkung 1. Ist $0 < r < \infty$, so konvergiert die Potenzreihe innerhalb eines Kreises vom Radius r um z_0, und sie divergiert außerhalb dieses Kreises. Daher nennt man das in Satz 2.9.1 definierte r den *Konvergenzradius* der Potenzreihe.

Bemerkung 2. Satz 2.9.1 macht keine Aussage für den Fall, dass $|z - z_0| = r$. Hier ist in der Tat “alles möglich”, wie die folgenden Beispiele belegen:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$, also $z_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a_0 = 0$. Es gilt $\ell = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$ und damit $r = 1$. Damit liegt (absolute) Konvergenz für $|z| < 1$ und Divergenz für $|z| > 1$ vor. Für $z = 1$ liegt Divergenz vor, für $z = -1$ Konvergenz.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$. Wieder gilt $r = 1$, aber diesmal liegt Konvergenz für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ vor.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$. Wieder gilt $r = 1$, aber jetzt liegt Divergenz für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ vor.

Satz 2.9.2 *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ Potenzreihe mit Konvergenzradius r. Existiert der (möglicherweise uneigentliche) Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, so gilt $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.*

Der *Beweis* ist analog zum Beweis von Satz 2.9.1, wobei man statt des Wurzelkriteriums aber jetzt das Quotientenkriterium verwendet.

Beispiel. Sei $a_n := \frac{1}{n!}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$. Es folgt, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Ein Nebenergebnis ist, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Definition 2.9.2 Die durch $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ definierte Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt *Exponentialfunktion.*

Gemäß obigem Beispiel konvergiert die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$. Statt $\exp(z)$ schreibt man auch $\exp z$.

Satz 2.9.3 *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\exp(z)\cdot\exp(w) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w^n\right) \\
&\overset{\text{Cauchy-Prod.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} z^k \frac{1}{(n-k)!} w^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n \\
&= \exp(z+w). \quad \square
\end{aligned}$$

Folgerung 2.9.1 *Sei $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:*

(i) $\exp(-z) = \frac{1}{\exp z}$, *insbesondere also* $\exp z \neq 0$.

(ii) $\exp(nz) = (\exp z)^n$.

Man erhält hier (i) wegen $\exp(-z)\exp z = \exp(-z+z) = \exp(0) = 1$, und auch (ii) folgt leicht.

Satz 2.9.4 *Für* $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $\exp z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} z^k - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n \to 0$$

für $n \to \infty$. Nun gilt für $n \geq 2$, dass

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} z^k - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} z^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{z}{n}\right)^k\right| \\
&= \left|\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{n!}{(n-k)!n^k}\right) z^k\right| \\
&\leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{n(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}{n^k}\right) |z|^k \\
&\leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^k\right) |z|^k \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^k\right) |z|^k \\
&\overset{\text{Bernoulli}}{\leq} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \left(1 - k\frac{k-1}{n}\right)\right) |z|^k \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \frac{k(k-1)}{n} |z|^k \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} |z|^k \\
&= \frac{1}{n} |z|^2 \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{j!} |z|^j \\
&\leq \frac{1}{n} |z|^2 \exp |z|.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Abbildung 3 zeigt den Graphen (der auf ein Intervall eingeschränkten) Exponentialfunktion sowie die Graphen von $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$ und $x \mapsto \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ für $n = 3$. (Statt $\exp|\mathbb{R}$ schreiben wir nur exp und nennen auch die eingeschränkte Funktion wieder Exponentialfunktion. Eine entsprechende Konvention wird auch für in späteren Abschnitten eingeführte Funktionen wie Sinus und Cosinus gelten.)

Folgerung 2.9.2 $\exp 1 = e$.

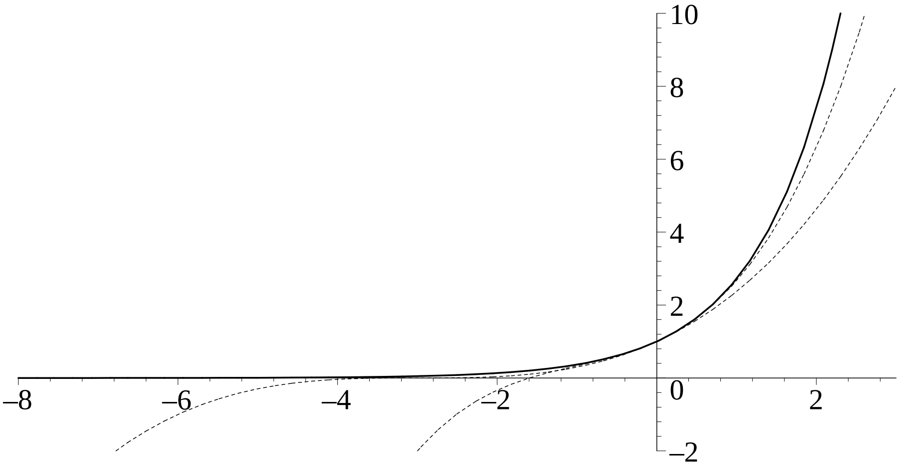

Abbildung 3: Die Exponentialfunktion und approximierende Polynome.

Dabei ist $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2,718\ldots$ die in §2.3 definierte Eulersche Zahl.

Satz 2.9.5 *Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp x = e^x$.*

Aufgrund dieses Satzes setzt man $e^z := \exp z$ für $z \in \mathbb{C}$.

Beweis von Satz 2.9.5. Für $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ ist $\left(\exp\frac{1}{q}\right)^q = \exp\left(q\frac{1}{q}\right) = \exp 1 = e$, also $\exp\frac{1}{q} = e^{1/q}$ und damit $\exp\frac{p}{q} = \left(\exp\frac{1}{q}\right)^p = \left(e^{1/q}\right)^p = e^{p/q}$. Daraus folgt die Behauptung für alle $r \in \mathbb{Q}$. Ist nun $r \in \mathbb{R}$, so wähle man eine Folge (r_n) rationaler Zahlen mit $r_n \to r$. Es gilt dann nach Definition von e^r, dass $e^{r_n} \to e^r$. Ähnlich kann man (und werden wir später) zeigen, dass auch $\exp r_n \to \exp r$ gilt. Hieraus folgt dann die Behauptung. Wir verzichten jetzt auf die Details.

Satz 2.9.6 *e ist irrational.*

Beweis. Wir nehmen an, dass e rational ist, etwa $e = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$(q-1)!p = q!e = q!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{q!}{k!} = \sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!} + \sum_{k=q+1}^{\infty}\frac{q!}{k!},$$

also

$$S := \sum_{k=q+1}^{\infty}\frac{q!}{k!} = (q-1)!p - \sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}.$$

Dies steht im Widerspruch zu

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots \\ &< \frac{1}{q+1} + \left(\frac{1}{q+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{q+1}\right)^3 + \ldots \\ &= \frac{1}{q+1}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{q+1}\right)^j \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{q+1}\frac{1}{1-\frac{1}{q+1}} \\
&= \frac{1}{q} \\
&\leq 1. \quad \square
\end{aligned}
$$

3 Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

3.1 Stetigkeit

Definition 3.1.1 Seien $M, N \subset \mathbb{C}$ und sei $f : M \to N$ eine Funktion. Sei $\xi \in M$. Dann heißt f *stetig (englisch: continuous) in* ξ, falls für jede Folge (x_n) in M mit $x_n \to \xi$ gilt, dass $f(x_n) \to f(\xi)$. Für $A \subset M$ heißt f stetig in A, falls f stetig in jedem Punkt von A ist. Schließlich heißt f stetig, wenn f stetig in M ist.

Es genügt natürlich im folgenden, den Fall $N = \mathbb{C}$ zu betrachten.

Aus den Sätzen aus §2.2 erhält man unmittelbar die folgenden Regeln:

- Sind $f, g : M \to \mathbb{C}$ stetig (in $\xi \in M$), so sind auch $f + g$, $f \cdot g$ und mit $c \in \mathbb{C}$ auch $c \cdot f$ stetig (in ξ). Falls $g(\xi) \neq 0$, so ist auch (die in $M \backslash g^{-1}(0)$ definierte) Funktion $\frac{f}{g}$ stetig in ξ.
- f ist stetig (in ξ) genau dann, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ stetig (in ξ) sind.
- Die durch $z \mapsto |z|$ und $z \mapsto \overline{z}$ definierten Funktionen sind stetig.

In §2.5 wurde gezeigt, dass für $a \in \mathbb{R}_+$ die durch $x \to a^x$ definierte Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}_+$ stetig ist.

Offensichtlich ist für $M \subset \mathbb{C}$ auch die Funktion id_M stetig.

Satz 3.1.1 *Seien $M, N, P, Q \subset \mathbb{C}$ mit $N \subset P$ und seien $g : M \to N$ stetig (in $\xi \in M$) und $f : P \to Q$ stetig (in $g(\xi) \in g(M) \subset N \subset P$). Dann ist $f \circ g$ stetig (in ξ).*

Beweis. Sei (x_n) Folge in M mit $x_n \to \xi$. Da g stetig, folgt $g(x_n) \to g(\xi)$. Nun ist aber $(g(x_n))$ Folge in P und damit folgt aus der Stetigkeit von f in $g(\xi)$, dass $f(g(x_n)) \to f(g(\xi))$, also $(f \circ g)(x_n) \to (f \circ g)(\xi)$. $\square$

Beispiele. 1. Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto |z^2 + \overline{z}|$ ist stetig. Denn die Funktionen $f_1 := id_{\mathbb{C}}$, $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_2(z) = \overline{z}$, und $f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_3(z) = |z|$, sind alle stetig und damit auch $f_1 \cdot f_1$, $f_1 \cdot f_1 + f_2$ und $f = f_3 \circ (f_1 \cdot f_1 + f_2)$.

2. Die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^3|x^4 - 7|}{(e^x - 9x)^2 + 11},$$

ist stetig, da sie durch Verknüpfungen wie $+, \cdot, \circ, \ldots$ aus stetigen Funktionen aufgebaut ist. (Man beachte, dass der Nenner keine Nullstellen hat.)