Analysis I

Walter Bergweiler

WS 2006/07
Fassung vom 14. November 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Einleitung

“Was ist Mathematik?” Dies ist der Titel eines (lesenswerten) Buches von R. Courant und H. Robbins. Die Antwort ist nicht einfach, und das genannte Buch gibt sie, indem es in mathematische Methoden und Denkweisen einführt. Wir verzichten auf eine “Definition” des Begriffs “Mathematik”, sondern begnügen uns zunächst mit der Feststellung, dass die Mathematik eine Wissenschaft ist, die Aussagen über (abstrakte) Objekte wie Zahlen, Mengen, Funktionen, usw. macht.

Die Vorgehensweise ist dabei folgende: Man beginnt mit gewissen Grundaussagen, den sogenannten *Axiomen*. Neue Aussagen gewinnt man aus diesen Axiomen (und bereits gewonnenen Aussagen) durch logisches Schließen. Eine so gewonnene Aussage nennt man *Satz* (oder auch Theorem), in manchen Fällen auch *Hilfssatz* (Lemma), *Folgerung* (Korollar) oder ähnlich. Die Herleitung einer solchen Aussage durch logisches Schließen nennt man *Beweis*. Die Festlegung eines neuen Begriffs nennt man *Definition*.

Was ist Analysis? Auch auf eine Definition des Begriffs “Analysis” soll hier verzichtet werden. Wir nennen lediglich einige der Grundbegriffe: reelle und komplexe Zahlen, Funktionen, Stetigkeit, Ableitung, Integral,... Wie die meisten anderen mathematischen Disziplinen hat auch die Analysis vielfältige Anwendungen. So bedient man sich etwa bei der mathematischen Beschreibung von Vorgängen in Naturwissenschaft und Technik oft der Sprache und Methoden der Analysis. Stellt man beispielsweise die Position eines beweglichen Teilchens als Funktion der Zeit dar, so ist seine Geschwindigkeit durch die Ableitung und seine Beschleunigung durch die zweite Ableitung gegeben.

1.2 Aussagenlogik

(Mathematische) Aussagen können wahr (w) oder falsch (f) sein:

- 2+3=4 (f)
- 7 ist eine Primzahl (w)

Es muss nicht bekannt sein, ob eine Aussage wahr oder falsch ist:

- Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen n, so dass n und $n+2$ beide Primzahlen sind (?)

Die Verneinung (Negation) einer Aussage A wird mit $\neg A$ bezeichnet; gesprochen ”nicht A”. Es ist $\neg A$ genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Aus Aussagen A und B lassen sich durch die folgenden Operationen neue Aussagen gewinnen:

- $A \wedge B$, gesprochen “A und B”: wahr genau dann, wenn A und B beide wahr sind.
- $A \vee B$, gesprochen “A oder B”: wahr genau dann, wenn mindestens eine der Aussagen A, B wahr ist.

- $A \Rightarrow B$, gesprochen "aus A folgt B", "A impliziert B" oder "wenn A, dann B": nur dann falsch, wenn A wahr und B falsch; gleichbedeutend mit $\neg A \vee B$. (Mit $\neg A \vee B$ ist hier $(\neg A) \vee B$ und nicht $(\neg A \vee B)$ gemeint.) Man schreibt auch $B \Leftarrow A$ statt $A \Rightarrow B$.

- $A \Leftrightarrow B$, gesprochen "A ist äquivalent zu B": genau dann wahr, wenn A und B beide wahr oder beide falsch sind; gleichbedeutend mit $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Die Wahrheitswerte der Aussagen $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$ sowie $A \Leftrightarrow B$ sind also durch die von A und B festgelegt. Man stellt dies auch in einer sogenannten Wahrheitstafel dar:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w	w

Man erkennt hier die Äquivalenz von $A \Rightarrow B$ und $\neg A \vee B$. Anders gesagt, die Aussage $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$ ist immer wahr, unabhängig vom Wahrheitswert von A und B.

Ebenso erkennt man, dass $A \Rightarrow B$ immer dann wahr ist, wenn A falsch ist. Aus einer falschen Aussage kann also jede Aussage gefolgert werden!

Schließlich beachte man, dass $A \vee B$ auch dann wahr ist, wenn A und B beide gelten. In der Mathematik ist mit "oder" also immer das "einschließende oder" und nicht "entweder-oder, aber nicht beides" gemeint.

Mathematische Sätze haben in der Regel die Form $A \Rightarrow B$. Dann heißt A die *Voraussetzung* und B die *Behauptung*. Man sagt auch, dass A eine *hinreichende Bedingung* für B ist und B eine *notwendige Bedingung* für A ist.

Gleichbedeutend mit $A \Rightarrow B$ ist $\neg B \Rightarrow \neg A$. Hiervon überzeugt man sich anhand der Wahrheitstafel:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

Die Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ heißt *Kontraposition* der Aussage $A \Rightarrow B$. Die Kontraposition der (wahren) Aussage "Wenn eine natürliche Zahl durch 9 teilbar ist, dann ist sie auch durch 3 teilbar" lautet beispielsweise: "Wenn eine natürliche Zahl nicht durch 3 teilbar ist, so ist sie auch nicht durch 9 teilbar".

Die Gültigkeit der folgenden Aussagen verifiziert man leicht durch Aufstellen der Wahrheitstafel. Dabei sind A, B und C beliebige Aussagen.

(i) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

(ii) $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

(iii) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

(iv) $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

(v) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

(vi) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

(vii) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$

(viii) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

(ix) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

Man nennt (i) und (ii) *Kommutativgesetz*, (iii) und (iv) *Assoziativgesetz* sowie (v) und (vi) *Distributivgesetz*. Aufgrund des Assoziativgesetzes kann man bei den Ausdrücken $A \wedge B \wedge C$ sowie $A \vee B \vee C$ also auf Klammern ganz verzichten.

Zum Beweis eines Satzes der Form "A$\Rightarrow B$" gibt es zwei Möglichkeiten.

Direkter Beweis. Man findet Aussagen $A_1, A_2, ..., , A_n$ mit

$$(A \Rightarrow A_1) \wedge (A_1 \Rightarrow A_2) \wedge ... \wedge (A_n \Rightarrow B).$$

Man schreibt dies auch kurz als

$$A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow ... \Rightarrow A_n \Rightarrow B.$$

Man überzeugt sich (durch Aufstellen der Wahrheitstafel), dass $(A \Rightarrow A_1) \wedge (A_1 \Rightarrow B)$ tatsächlich $A \Rightarrow B$ impliziert, d.h., es gilt

$$((A \Rightarrow A_1) \wedge (A_1 \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

für Aussagen A, A_1, B. Dies ist obige Situation falls $n = 1$. Wir werden später sehen, wie man den Fall beliebiger natürlicher Zahlen n behandeln kann (vollständige Induktion).

Indirekter Beweis. Die einfachste Form des indirekten Beweises ist der direkte Beweis der *Kontraposition* $\neg B \Rightarrow \neg A$. Eine andere Form ist der *Beweis durch Widerspruch.* Man nimmt $A \wedge \neg B$ sowie eventuell weitere bekannte (wahre) Aussagen an, und erzielt ein Widerspruch zu bekannten (wahren) Aussagen. Formal zeigt man also mit wahren Aussagen C und D, dass $A \wedge \neg B \wedge C \Rightarrow \neg D$ gilt. (Man beachte, dass $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$.)

1.3 Mengen

Nach G. Cantor (1895) ist eine *Menge M* eine "Zusammenfassung aus wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einer Gesamtheit".

Ist x ein Element der Menge M, so bezeichnen wir dies mit $x \in M$. Ist x kein Element von M, so schreiben wir $x \notin M$. Es gilt also $x \notin M \Leftrightarrow \neg(x \in M)$.

Mengen können durch explizite Angabe ihrer Elemente definiert werden. So ist $M = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ die aus den Elementen $x_1, ..., x_n$ bestehende Menge M. Mengen können auch durch die Eigenschaften ihrer Elemente definiert werden:

$$M = \{x : x \text{ hat die Eigenschaft } E\}.$$

Zum Beispiel ist

$$\{x : x \text{ ist Primzahl } \wedge x \leq 10\} = \{2, 3, 5, 7\}.$$

Die *leere Menge* ist die Menge, die kein Element enthält. Sie wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Wir definieren einige weitere wichtige Mengen. Das Zeichen ":=" bedeutet hier und im folgenden "wird definiert als". (Bei der Definition von Aussagen benutzt man analog das Zeichen ":$\Leftrightarrow$".)

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen,
- $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, ...\}$,
- $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, ...\} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ ist die Menge der ganzen Zahlen,
- $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\}$ ist die Menge der rationalen Zahlen
- $\mathbb{R}$ ist die Menge der reellen Zahlen.

Eine Menge N heißt *Teilmenge* der Menge M, falls $x \in N$ impliziert, dass $x \in M$ gilt. Wir bezeichnen dies mit $N \subset M$ oder $M \supset N$. Insbesondere bei Benutzung der zweiten Schreibweise sagen wir auch, dass M *Obermenge* von N ist. Man beachte, dass $N = M$ zugelassen ist. Es gilt

$$N = M \Leftrightarrow (N \subset M) \wedge (M \subset N).$$

Zum Beispiel gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. (Dies ist eine kurze Schreibweise für $(\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}) \wedge (\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}) \wedge (\mathbb{Q} \subset \mathbb{R})$.)

Weiter heißt N *echte Teilmenge* von M falls $N \subset M$ und $N \neq M$. Dafür benutzen wir die Schreibweise $N \subsetneq M$ oder $M \supsetneq N$. Analog spricht man auch von *echten Obermengen*. Es gilt auch $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Hinweis. Die Terminologie ist in der Literatur uneinheitlich. Manche Autoren benutzen das Symbol "$\subseteq$" anstelle von "$\subset$", und dort entspricht "$\subset$" dann dem hier verwandten "$\subsetneq$".

Die *Potenzmenge* $P(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M, also

$$P(M) = \{N : N \subset M\}.$$

Zum Beispiel ist $P(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Für Mengen M und N heißen

$$M \cap N := \{x : x \in M \wedge x \in N\}$$

Durchschnitt und

$$M \cup N := \{x : x \in M \vee x \in N\}$$

Vereinigung von M und N.

Die Mengen M und N heißen *disjunkt* falls $M \cap N = \emptyset$. Weiter ist $M \backslash N := \{x : x \in M \wedge x \notin N\}$, gesprochen "$M$ ohne N". Im Falle $N \subset M$ heißt $M \backslash N$ auch *Komplement* von N (in M).

Für $M = \{1, 2\}$ und $N = \{2, 3\}$ ist also $M \cap N = \{2\}$, $M \cup N = \{1, 2, 3\}$ und $M \backslash N = \{1\}$.

Die folgenden Regeln für Mengen L, M, N sind analog zu den entsprechenden Regeln der Aussagenlogik:

(i) $M \cap N = N \cap M$

(ii) $M \cup N = N \cup M$

(iii) $(L \cap M) \cap N = L \cap (M \cap N)$

(iv) $(L \cup M) \cup N = L \cup (M \cup N)$

(v) $L \cap (M \cup N) = (L \cap M) \cup (L \cap N)$

(vi) $L \cup (M \cap N) = (L \cup M) \cap (L \cup N)$

(vii) $M \backslash (M \backslash N) = M \cap N$

(viii) $L \backslash (M \cup N) = L \backslash M \cap L \backslash N$

(ix) $L \backslash (M \cap N) = L \backslash M \cup L \backslash N$.

Im Falle $N \subset M$ gilt mit (vii) also $M \backslash (M \backslash N) = N$. Man bezeichnet (i)-(vi) wieder als Kommutativ-, Assoziativ- bzw. Distributivgesetz. Die Gleichungen (viii) und (ix) heißen *Regeln von de Morgan*.

Wir führen hier nur den *Beweis* von (v):

$$\begin{aligned}
& x \in L \cap (M \cup N) \\
\Leftrightarrow\ & x \in L \wedge (x \in M \cup N) \\
\Leftrightarrow\ & x \in L \wedge (x \in M \vee x \in N) \\
\Leftrightarrow\ & (x \in L \wedge x \in M) \vee (x \in L \wedge x \in N) \\
\Leftrightarrow\ & (x \in L \cap M) \vee (x \in L \cap N) \\
\Leftrightarrow\ & x \in (L \cap M) \cup (L \cap N)
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt. Die anderen Regeln beweist man analog.

Das *kartesische Produkt* $M \times N$ zweier Mengen M und N ist die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in M$ und $y \in N$, also

$$M \times N = \{(x, y) : x \in M \wedge y \in N\}.$$

Man beachte, dass $M \times N \neq N \times M$ für $M \neq N$ und $(x, y) \neq (y, x)$ für $x \neq y$.

Allgemeiner setzt man für $n \in \mathbb{N}$ und Mengen $M_1, M_2, ..., M_n$ auch

$$M_1 \times M_2 \times ... \times M_n := \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1 \in M_1 \wedge ... \wedge x_n \in M_n\}.$$

Im Falle $M_1 = M_2 = ... = M_n = M$ schreibt man statt

$$\underbrace{M \times M \times M ... \times M}_{n-\text{mal}}$$

auch M^n. So ist $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Die Punkte des $\mathbb{R}^3$ entsprechen den Punkten des dreidimensionalen Raumes, die des $\mathbb{R}^2$ denen der Ebene.

Der hier verwandte "naive" Mengenbegriff führt zu Widersprüchen (Antinomien). Klassisches Beispiel ist die *Russellsche Antinomie*: Sei M die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten, d.h.,

$$M = \{x : x \text{ Menge } \wedge x \notin x\}$$

Aus $M \notin M$ folgt dann $M \in M$, und umgekehrt. Es gilt also

$$M \in M \Leftrightarrow \neg(M \in M),$$

was ein Widerspruch ist. Der Widerspruch ist nur behebbar durch eine genauere Definition des Begriffs Menge - wir verzichten aber hier darauf.

Das obige Problem tritt nicht auf, falls – wie wir es tun werden – nur Teilmengen gewisser "unproblematischer" Grundmengen betrachtet werden.

1.4 Quantoren

In mathematischen Aussagen treten häufig Variable auf, etwa die Variable x in der durch "x ist Primzahl" gegebenen Aussage $A(x)$. Sinnvoll sind solche Aussagen im allgemeinen nur für Variable aus gewissen Mengen, im genannten Beispiel etwa $x \in M$ mit $M = \mathbb{N}$.

Mit Hilfe der Quantoren $\forall$ ("für alle") und $\exists$ ("es existiert") lassen sich aus einer für $x \in M$ erklärten Aussage $A(x)$ neue Aussagen bilden. Die Aussage

$$\forall x \in M : A(x),$$

bedeutet: "Für alle $x \in M$ gilt $A(x)$". Formal kann man die Aussage "$\forall x \in M : A(x)$" definieren, indem man sie als wahr definiert falls $M = \{x \in M : A(x)\}$, und als falsch sonst. Die Aussage

$$\exists x \in M : A(x)$$

bedeutet: "Es gibt ein $x \in M$ für welches $A(x)$ gilt". Dies gilt falls $\{x \in M : A(x)\} \neq \emptyset$. Ist etwa $M = \{a, b\}$, so gilt

$$(\forall x \in M : A(x)) \quad \Leftrightarrow \quad A(a) \wedge A(b)$$

und

$$(\exists x \in M : A(x)) \quad \Leftrightarrow \quad A(a) \vee A(b)$$

Analoges gilt für beliebige endliche Mengen M. Quantoren erlauben eine Verallgemeinerung auf unendliche Mengen M.

Regeln wie $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ verallgemeinern sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x \in M : A(x)) &\Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x), \\ \neg(\exists x \in M : A(x)) &\Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x). \end{aligned}$$

Der *Beweis* der ersten Äquivalenz folgt aus

$$\begin{aligned} & \neg(\forall x \in M : A(x)) \\ \Leftrightarrow\ & \neg(M = \{x \in M : A(x)\}) \\ \Leftrightarrow\ & M \neq \{x \in M : A(x)\} \\ \Leftrightarrow\ & M \backslash \{x \in M : A(x)\} \neq \emptyset \\ \Leftrightarrow\ & \{x \in M : \neg A(x)\}) \neq \emptyset \\ \Leftrightarrow\ & \exists x \in M : \neg A(x). \end{aligned}$$

Der Beweis der zweiten Äquivalenz ist analog.

Als Beispiel betrachten wir die (falsche) Aussage "Alle Primzahlen sind ungerade". Ist $A(x)$ die (für ganze Zahlen erklärte) Aussage "x ist ungerade" und M die Menge der Primzahlen, so können wir die Aussage "Alle Primzahlen sind ungerade" in der Form "$\forall x \in M : A(x)$" schreiben. Die Negation davon ist die (wahre) Aussage "$\exists x \in M : \neg A(x)$", die wir in Worten als "Es gibt eine Primzahl, die nicht ungerade ist" ausdrücken können. (Die Aussage ist wahr, da 2 eine gerade Primzahl ist.) Ein häufiger Fehler ist, als Negation der Aussage "$\forall x \in M : A(x)$" die Aussage "$\forall x \in M : \neg A(x)$" anzugeben ("Alle Primzahlen sind gerade.").

Eine Aussage kann mehrere Quantoren enthalten. Bei verschiedenen Quantoren kommt es dabei auf die Reihenfolge an. Sei zum Beispiel S die Menge der deutschen Städte, M die Menge der Menschen und $A(x, y)$ die für $x \in S$ und $y \in M$ erklärte Aussage: y besitzt ein Haus in x. So ist die Aussage

$$\forall x \in S\, \exists y \in M : A(x, y),$$

d.h., "Zu jeder Stadt existiert ein Mensch, der dort ein Haus besitzt", vermutlich richtig, während

$$\exists y \in M\, \forall x \in S : A(x, y),$$

d.h., "Es existiert ein Mensch, der in jeder deutschen Stadt ein Haus besitzt", vermutlich falsch ist. Auf jeden Fall sind beide Aussagen verschieden. Die Negation der letzten Aussage lässt sich rein formal bilden:

$$\begin{aligned} & \neg(\exists y \in M\, \forall x \in S : A(x, y)) \\ \Leftrightarrow\ & \forall y \in M : \neg(\forall x \in S : A(x, y)) \\ \Leftrightarrow\ & \forall y \in M\, \exists x \in S : \neg A(x, y) \end{aligned}$$

Wir erhalten: "Zu jedem Mensch existiert eine Stadt, in der er kein Haus besitzt". (Auch wenn sich Verneinungen oder andere Operationen mit Aussagen also auf rein formalem Wege bilden lassen, so ist es definitiv ratsam und in jedem Fall eine gute Übung, das Ergebnis "mit dem gesunden Menschenverstand" zu überprüfen.)

Quantoren erlauben auch, Vereinigung und Durchschnitt von unendlich vielen Mengen zu definieren. Für eine Menge S von Mengen setzen wir

$$\bigcap_{M \in S} M := \{x : (\forall M \in S : x \in M)\}$$

und

$$\bigcup_{M \in S} M := \{x : (\exists M \in S : x \in M)\}.$$

Die Regeln von de Morgan gelten dann entsprechend. Mit einer Menge N ist dann

$$N \setminus \bigcap_{M \in S} M = \bigcup_{M \in S} N \setminus M$$

und

$$N \setminus \bigcup_{M \in S} M = \bigcap_{M \in S} N \setminus M.$$

Neben den Quantoren $\forall$ und $\exists$ benutzen wir auch noch das Symbol "$\exists!$" für "es gibt genau ein". Die Aussage "$\exists! x \in M : A(x)$" ist also definiert durch "$\{x \in M : A(x)\}$ besteht aus genau einem Element".

Bemerkung zum Gebrauch von Quantoren. Benützt man die (übliche) Bezeichnung "$m|n$" für "m ist Teiler von n", so kann man die Aussage

(A) Wenn eine natürliche Zahl durch 9 teilbar ist, so ist sie auch durch 3 teilbar

auch in der Form

(B) $\forall n \in \mathbb{N} : 9|n \Rightarrow 3|n$

schreiben. Der geübte Mathematiker[1] erkennt sofort, dass es sich hier um die gleiche Aussage handelt, die lediglich in zwei verschiedenen Formen ausgedrückt ist. In mathematischen Texten (Seminarausarbeitung, Diplom- oder Staatsexamensarbeit, Buch,...) wird man im allgemeinen die Form (A) bevorzugen. Bei Vorträgen und Vorlesungen wird man aus Zeitgründen häufig die Form (B) wählen – die Quantoren werden also als abkürzende Schreibweise benutzt. Um mit der Schreibweise vertraut zu machen und um die Diskrepanz zwischen Tafelbild und Vorlesungsskript gering zu halten, wird in diesem Vorlesungsskript die Quantorenschreibweise häufiger benutzt als dies üblicherweise in einem mathematischen Text der Fall ist.

Um einem gerade bei Studienanfängern verbreiteten Irrglauben entgegenzuwirken, sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Schreibweise (B) nicht präziser (oder "mathematischer") as (A) ist.

[1] Wer dies auch nach mehreren Monaten Mathematikstudium nicht sofort erkennt, hat nicht genug geübt.

1.5 Relationen und Funktionen

Seien M, N Mengen und $R \subset M \times N$. Dann heißt R *Relation* (zwischen M und N). Im Falle $M = N$ nennen wir R auch Relation auf M. Statt $(x, y) \in R$ schreiben wir im allgemeinen xRy. Anstelle von Buchstaben benutzen wir meistens suggestive Symbole wie $\sim, \simeq, <, \subset$, usw. zur Bezeichnung von Relationen.

Beispiel. $M = N = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \geq y^2\}$. Es gilt also $xRy \Leftrightarrow x^2 \geq y^2$, also $xRy \Leftrightarrow |x| \geq |y|$. Die durch R gegebene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ kann auch graphisch dargestellt werden (Abbildung 1).

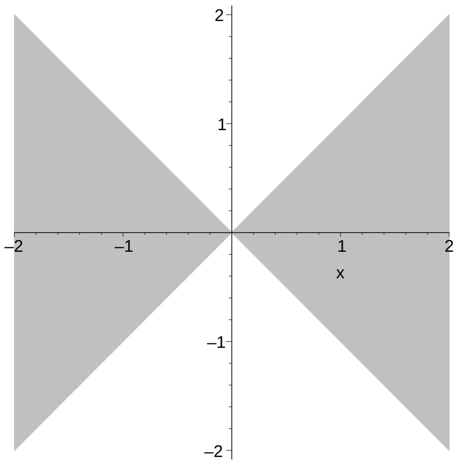

Abbildung 1: Graphische Darstellung der durch $x^2 \geq y^2$ gegebenen Relation.

Wir betrachten drei wichtige Spezialfälle.

(a) Äquivalenzrelationen. Sei M Menge, $\sim$ Relation auf M, also $\sim \subset M \times M$. Dann heißt $\sim$

- *reflexiv*, falls $\forall x \in M : x \sim x$,
- *symmetrisch*, falls $\forall x, y \in M : x \sim y \Rightarrow y \sim x$,
- *transitiv*, falls $\forall x, y, z \in M : x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation heißt *Äquivalenzrelation.*

Beispiel 1. Die Gleichheitsrelation ist eine Äquivalenzrelation.

Beispiel 2. Sei M die Menge der "Landpunkte" der Erdoberfläche (also die Menge der Punkte, die nicht im Meer oder anderen Gewässern liegen). Für $x, y \in M$ gelte $x \sim y$ falls x mit y auf dem Landweg verbunden werden kann. Dann ist $\sim$ Äquivalenzrelation.

Grundlegende Eigenschaft einer Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge M ist, dass sie eine Zerlegung von M in disjunkte Teilmengen - die sogenannten Äquivalenzklassen - liefert, so dass für $x, y \in M$ genau dann $x \sim y$ gilt, wenn x, y in derselben Teilmenge liegen. Formal kann man dies wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned}
& \sim \text{ ist Äquivalenzrelation auf } M \\
\Leftrightarrow \quad & \exists A \subset P(M) : \Big\{ \bigcup_{N \in A} N = M \\
\wedge \quad & [\forall L, N \in A : L \neq N \Rightarrow L \cap N = \emptyset] \\
\wedge \quad & [\forall x, y \in M : (x \sim y \Leftrightarrow \exists N \in A : x \in N \wedge y \in N)] \Big\}
\end{aligned}$$

Wir skizzieren den Beweis nur. Für $x \in M$ setzen wir $[x] := \{y \in M : x \sim y\}$. Sei nun $x, y \in M$ mit $x \sim y$. Ist dann $z \in [y]$, also $y \sim z$, so ist nach Transitivität auch $x \sim z$, also $z \in [x]$. Es folgt $[y] \subset [x]$. Aus Symmetriegründen ist auch $[x] \subset [y]$, also $[x] = [y]$. Im Falle $x \not\sim y$ (was nach Definition $\neg(x \sim y)$ bedeuten soll) zeigt man $[x] \cap [y] = \emptyset$, woraus dann die Behauptung folgt.

Wir werden die Bezeichnung $[x]$ für die Äquivalenzklasse $\{y \in M : x \sim y\}$ auch im folgenden verwenden. Man beachte, dass $x \in [x]$, da Äquivalenzrelationen insbesondere symmetrisch sind.

Im obigen Beispiel 1 (Gleichheitsrelation) gilt $[x] = \{x\}$ für alle $x \in M$. Im Beispiel 2 nennt man die Äquivalenzklassen (je nach Größe) Erdteil oder Insel.

(b) Ordnungsrelationen. Eine Relation $\prec$ auf einer Menge M heißt *antisymmetrisch* (oder *identitiv*) falls für alle $x, y \in M$ aus $x \prec y$ und $y \prec x$ folgt, dass $x = y$ gilt, d. h., falls

$$\forall x, y \in M : x \prec y \wedge y \prec x \Rightarrow x = y.$$

Eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation heißt *Halbordnung*.

Beispiel 1. $M = \mathbb{R}$, $\prec = \leq$

Beispiel 2. X Menge, $M = P(X)$, $\prec = \subset$.

Eine Relation $\prec$ auf M heißt *total* (oder *vollständig)*, falls für alle $x, y \in M$ mindestens eine der Aussagen $x \prec y$ und $y \prec x$ gilt, d. h., falls

$$\forall x, y \in M : x \prec y \vee y \prec x.$$

Eine totale Halbordnung heißt *Ordnung*. Das Paar $(M, \prec)$ heißt dann *geordnete Menge*.

Im obigem Beispiel 1 ist $\leq$ Ordnung, während $\subset$ in Beispiel 2 keine Ordnung ist, wenn M mindestens zwei Elemente hat. Denn sind $a, b \in M, a \neq b$, so ist $\{a\} \subset P(M)$ und $\{b\} \subset P(M)$, aber weder $\{a\} \subset \{b\}$ noch $\{b\} \subset \{a\}$.

Sei $\prec$ Halbordnung auf M und $A \subset M$. Dann heißt A *nach oben beschränkt*, falls $s \in M$ existiert, so dass $a \prec s$ für alle $a \in A$ gilt. Ein solches s heißt *obere Schranke* von A. Eine obere Schranke von A, die in A enthalten ist, heißt *Maximum* von A. Eine obere Schranke s von A heißt *Supremum* (oder kleinste obere Schranke) von A, wenn für jede obere Schranke t von A gilt, dass $s \prec t$.

Beispiel 1. $X = \{a, b, c\}$, $M = P(X)$, $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$, $\prec = \subset$. Die Menge $\{a, b\}$ ist Supremum, aber kein Maximum von A.

Beispiel 2. $M = A = \mathbb{N}$, $\prec = \leq$. Hier besitzt A kein Supremum.

Satz 1.5.1 *Sei M Menge, $A \subset M$ und $\prec$ Halbordnung auf M.*

(i) *Ein Maximum von A ist auch Supremum von A.*

(ii) *A besitzt höchstens ein Supremum.*

Beweis. (i) Sei s Maximum von A, d.h., s ist obere Schranke von A und es gilt $s \in A$. Zu zeigen ist, dass s Supremum ist. Sei dazu t obere Schranke von A. Zu zeigen ist, dass $s \prec t$. Dies gilt aber wegen $s \in A$ nach Definition der oberen Schranke.

(ii) Seien r und s Suprema. Dann gelten sowohl $r \prec s$ wie auch $s \prec r$, also folgt $r = s$. $\square$

Hier und im folgenden wird durch das Symbol $\square$ das Ende eines Beweises markiert.

Aus Satz 1.5.1 folgt, dass eine Menge höchstens ein Maximum haben kann. Wir bezeichnen das Maximum (bzw. Supremum) einer Menge A mit $\max A$ (bzw. $\sup A$), falls es existiert.

Völlig analog definiert man nach unten beschränkt, untere Schranke, Infimum (größte untere Schranke), $\inf A$, Minimum, $\min A$. Satz 1.5.1 gilt entsprechend.

Eine geordnete Menge $(M \prec)$ heißt *ordnungsvollständig*, wenn jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von M ein Supremum besitzt.

Man kann zeigen, dass $(M, \prec)$ genau dann ordnungsvollständig ist, wenn jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von M ein Infimum besitzt.

Ist $\prec$ Ordnung auf M, so heißt die durch

$$x \underset{\neq}{\prec} y \;:\Leftrightarrow x \prec y \wedge x \neq y$$

definierte Relation *strikte Ordnung* auf M. Für $x, y \in M$ gilt dann genau einer der drei Fälle $x \underset{\neq}{\prec} y$, $x = y$ oder $y \underset{\neq}{\prec} x$. Ist umgekehrt $\underset{\neq}{\prec}$ eine transitive Relation mit der letzten Eigenschaft, so ist $\underset{\neq}{\prec}$ strikte Ordnung, und die zugehörige Ordnung $\prec$ ist durch

$$x \prec y \Leftrightarrow x \underset{\neq}{\prec} y \vee x = y$$

gegeben.

Für $M = \mathbb{R}, \prec = \leq$ ist natürlich $\underset{\neq}{\prec} = <$. Statt $x < y$ bzw. $x \leq y$ schreiben wir auch $y > x$ bzw. $y \geq x$.

(c) Funktionen. Eine Relation f zwischen Mengen M und N heißt *Funktion* (oder *Abbildung*) von M nach N (oder in N) falls zu jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ mit xfy existiert, d.h., falls

$$\forall x \in M \exists! y \in N : (x, y) \in f.$$

Wir bezeichnen das zu $x \in N$ existierende, eindeutig bestimmte y, welches xfy erfüllt, mit $f(x)$ und nennen es *Bild von* x (unter f) oder *Wert* von f an der Stelle x. Man muss zwischen der Funktion f (Teilmenge von $M \times N$) und dem Wert $f(x)$ (Element von N) unterscheiden.

Obwohl eine Funktion f von M nach N also formal nichts anderes als eine Teilmenge von $M \times N$ mit gewissen Eigenschaften ist, ist es oft hilfreich, sich f als Vorschrift vorzustellen, die jedem Wert $x \in M$ sein Bild $y \in N$ zuordnet. Dieser Gedanke kommt auch in den Schreibweisen

$$f : M \to N,\ f(x) = ...$$

und

$$f : M \to N,\ x \mapsto ...,$$

die wir für Funktionen benutzen, zum Ausdruck.

Man kann den obigen Gedanken, sich f als Vorschrift vorzustellen, auch zur Definition des Funktionsbegriffes verwenden. In diesem Falle würde man $\{(x, f(x)) : x \in M\}$ als Graph der Funktion f bezeichnen. Wir haben hier die Funktion f über ihren Graphen definiert, d.h., es gilt $f = \{(x, f(x)) : x \in M\}$.

Man sollte die Vorstellung, dass eine Funktion $f : M \to N$ eine Vorschrift ist, die jedem $x \in M$ ein $y \in N$ zuordnet, aber nicht so interpretieren, dass dieses y auch immer effektiv berechnet werden kann. Beispielsweise ist bei der Funktion

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto \text{ größte Primzahl, die } x \text{ teilt}$$

der Wert $f(x)$ für große x (mit mehreren hundert Stellen) kaum zu berechnen.

Für eine Funktion $f : M \to N$ nennen wir M *Definitionsbereich* und N *Zielbereich*. Man beachte, dass M durch f eindeutig festgelegt ist, denn $M = \{x : \exists y : (x, y) \in f)\}$. Der Zielbereich ist durch die Funktion f (also durch die Menge f) aber nicht eindeutig festgelegt. Zum Beispiel kann er durch jede Obermenge ersetzt werden, d.h., ist f Funktion von M nach N und ist $N' \supset N$, so ist f auch Funktion von M nach N'.

Sei f Funktion von M nach N, $A \subset M$ und $B \subset N$. Dann heißt

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$$

Bild von A (unter f) und

$$f^{-1}(B) := \{x \in M : f(x) \in B\}$$

Urbild von B (unter f). Das Bild von M, also die Menge $f(M)$, heißt *Wertebereich* (von f). Man beachte, dass die Bezeichnungen hier uneinheitlich sind: in manchen Büchern wird auch N als Wertebereich bezeichnet. Für $y \in N$ schreibt man statt $f^{-1}(\{y\})$ auch $f^{-1}(y)$.

Eine Funktion $f : M \to N$ heißt *injektiv* (oder *eineindeutig*) falls für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ auch $f(x) \neq f(y)$ gilt, d. h., falls

$$\forall x, y \in M : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

(Äquivalent zu obiger Implikation ist natürlich ihre Kontraposition: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$). Eine Funktion $f : M \to N$ heißt *surjektiv* (oder Funktion von M *auf* N) falls $f(M) = N$, d.h., falls gilt:

$$\forall y \in N \exists x \in M : f(x) = y.$$

Eine Funktion heißt *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist. Ist $f : M \to N$ bijektiv, so gilt

$$\forall y \in N \exists! x \in M : f(x) = y.$$

Man beachte, dass Surjektivität und damit Bijektivität keine Eigenschaft der Funktion (also Menge) selbst ist, sondern die Angabe eines Zielbereiches erfordert. Bei Injektivität ist dies nicht der Fall.

Beispiel 1. Die Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$, ist weder injektiv noch surjektiv. Denn wegen $f(-1) = f(1)$ ist sie nicht injektiv, und wegen $f^{-1}(2) = \emptyset$ ist sie nicht surjektiv.

Beispiel 2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x^3$, ist injektiv aber nicht surjektiv.

Beispiel 3. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto$ größte natürliche Zahl, die nicht größer als $\sqrt{x}$ ist. Dann ist f surjektiv, da für jedes $y \in \mathbb{N}$ zum Beispiel $f(y^2) = y$ gilt. Die Funktion f ist aber nicht injektiv, da zum Beispiel $f(1) = f(2)$.

Man bezeichnet zu einer reellen Zahl x die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist, auch mit $[x]$. Durch $x \mapsto [x]$ wird damit eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{Z}$ definiert. Man nennt $[x]$ auch Gaußklammer von x. Die Funktion f aus Beispiel 3 kann damit als $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = [\sqrt{x}]$, geschrieben werden.

Ist $f : M \to N$ bijektiv, so existiert zu jedem $y \in N$ genau ein $x \in M$ mit $f(x) = y$. Damit existiert eine Funktion von N nach M, die jedem $y \in N$ dieses $x \in M$ zuordnet. Sie heißt *Umkehrfunktion* (oder *inverse Funktion*) von f und wird mit f^{-1} bezeichnet. Formal gilt einfach $f^{-1} = \{(f(x), x) : x \in M\} \subset N \times M$.

Seien $f : M \to N$ und $g : P \to Q$ Funktionen mit $f(M) \subset P$. Dann ist die *Komposition* (oder *Zusammensetzung*) $g \circ f$ definiert durch

$$g \circ f : M \to Q, x \mapsto g(f(x)).$$

Sei $id_M : M \to M, x \mapsto x$ die *Identität* (oder *identische Abbildung*) einer Menge M. Ist dann $f : M \to N$ bijektiv, so ist $f^{-1} \circ f = id_M$ und $f \circ f^{-1} = id_N$.

Satz 1.5.2 *Sei $f : M \to N$ Funktion. Dann gilt:*

(i) *f ist injektiv $\Leftrightarrow$ Es existiert $g : N \to M$ mit $g \circ f = id_M$.*

(ii) *f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ Es existiert $h : N \to M$ mit $f \circ h = id_N$.*

Der Beweis sei als Übung überlassen. Funktionen g, h wie in (i),(ii) nennt man auch Links- bzw. Rechtsinverse.

Beispiel. Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\backslash\{1\}, x \mapsto x + 1$, ist bijektiv und $f^{-1} : \mathbb{N}\backslash\{1\} \to \mathbb{N}, x \mapsto x - 1$.

Sei $f : M \to N$ Funktion, $L \subset M$. Die Funktion $g : L \to N, x \mapsto f(x)$, heißt *Einschränkung* (oder *Restriktion*) von f auf L und wird mit $f|L$ bezeichnet. Ist g Einschränkung von f, so nennt man f auch Fortsetzung von g. Die Fortsetzung einer Funktion ist natürlich nicht eindeutig.

Es sei $f : M \to N$ Funktion und es sei auf N eine Ordnung gegeben. Dann heißt f *nach oben (bzw. unten) beschränkt*, falls $f(M)$ nach oben (bzw. unten) beschränkte Teilmenge von N ist. Eine nach oben und unten beschränkte Funktion heißt beschränkt.

Sei nun zusätzlich auch auf M eine Ordnung gegeben. Wir bezeichnen die Ordnung auf M mit $\prec_M$ und die auf N mit $\prec_N$. Dann heißt f *monoton steigend*, falls

$$\forall x, y \in M : x \prec_M y \Rightarrow f(x) \prec_N f(y)$$

und *monoton fallend*, falls

$$\forall x, y \in M : x \prec_M y \Rightarrow f(y) \prec_N f(x).$$

Eine monoton steigende bzw. fallende Funktion, die injektiv ist, heißt *streng monoton* steigend bzw. fallend. Im streng monoton steigenden Fall etwa gilt dann

$$\forall x, y \in M : x \underset{\neq}{\prec}_M y \Rightarrow f(x) \underset{\neq}{\prec}_N f(y)$$

Beispiel. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist weder monoton fallend noch monoton steigend. Es ist aber $f|\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ streng monoton steigend und $f|\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ streng monoton fallend.

1.6 Vollständige Induktion

Wir setzen die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ als gegeben voraus. Wichtiges Beweismittel bei Aussagen über natürliche Zahlen ist das

Beweisprinzip der vollständigen Induktion. *Es sei für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage $A(n)$ gegeben. Gilt dann*

(i) *$A(1)$ ist wahr*

und

(ii) *für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt die Wahrheit von $A(n+1)$ aus der von $A(n)$,*

so ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Man nennt dabei (i) den Induktionsanfang und (ii) den Induktionsschluss (oder Induktionsschritt). Im Induktionsschluss nennt man auch $A(n)$ Induktionsvoraussetzung und $A(n+1)$ Induktionsbehauptung. Formal ausgedrückt lautet das Prinzip der vollständigen Induktion wie folgt:

$$[A(1) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \Rightarrow A(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : A(n).$$

Beispiel. Man zeige, dass $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Sei dazu $A(n)$ die (für natürliche Zahlen n) erklärte Aussage

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(i) $A(1)$ ist wahr, denn $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

(ii) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $A(n)$. Zu zeigen ist, dass $A(n+1)$ gilt, d.h.

$$1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Dies gilt aber wegen

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) &= (1 + 2 + 3 + ... + n) + n + 1 \\ &\overset{A(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Wir haben oben die Stelle, an der die Induktionsvoraussetzung $A(n)$ benutzt wurde, mit einem entsprechenden Vermerk über dem Gleichheitszeichen markiert. Dies ist in mathematischen Texten eher unüblich, wird aber als Kurzschreibweise in Vorlesungen (oder Vorträgen) verwendet.

Ausdrücke der Form $f(m) + f(m+1) + ... + f(n)$ mit $m, n \in \mathbb{Z}, m \leq n$, schreiben wir im folgenden kurz als $\sum_{k=m}^{n} f(k)$. Die oben bewiesene Formel lautet dann

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Eine analoge Schreibweise gilt für Produkte:

$$\prod_{k=m}^{n} f(k) := f(m) \cdot f(m+1) \cdot ... \cdot f(n).$$

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $n! := \prod_{k=1}^{n} k$, gesprochen n Fakultät. Wir setzen außerdem $0! := 1$. Für $k, n \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n$, setzen wir

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

gesprochen n über k. Die Zahlen $\binom{n}{k}$ heißen *Binomialkoeffizienten.*

Beispiel. Man zeige, dass $\binom{2n}{n} \geq 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Induktionsanfang. Wegen $\binom{2}{1} = \frac{2!}{1! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 2 = 2^1$ gilt die Ungleichung für $n = 1$.

Induktionsschritt. Sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $\binom{2n}{n} \geq 2^n$. Zu zeigen ist, dass

$$\binom{2(n+1)}{n+1} \geq 2^{n+1}.$$

Dies folgt aber wegen

$$\begin{aligned}
\binom{2(n+1)}{n+1} &= \binom{2n+2}{n+1} \\
&= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2(n!)^2} \\
&= \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \\
&= \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} \\
&\overset{\text{Ind.-Vor.}}{\geq} \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot 2^n \\
&= \frac{2n+1}{n+1} \cdot 2^{n+1} \\
&\geq 2^{n+1}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Will man für gegebenes $N \in \mathbb{Z}$ Aussagen über $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq N\}$ beweisen, kann man dies durch geeignete Modifikation des obigen Prinzips tun (Induktionsanfang für $n = N$). Es ist auch möglich, im Induktionsschritt nicht nur die Gültigkeit von $A(n)$, sondern die von $A(k)$ für alle $k \leq n$ vorauszusetzen.

1.7 Körper

Wir formalisieren jetzt Addition und Multiplikation sowie ihre Eigenschaften.

Definition 1.7.1 Sei K Menge und seien $+ : K \times K \to K$ und $\cdot : K \to K$ Funktionen (wobei wir aber im folgenden $x + y$ statt $+((x, y))$ und $x \cdot y$ oder xy statt $\cdot((x, y))$ schreiben). Das Tripel $(K, +, \cdot)$ heißt *Körper* (englisch: field), falls die folgenden neun Eigenschaften gelten:

(A1) $\forall x, y \in K : x + y = y + x$

(A2) $\forall x, y, z \in K : (x + y) + z = x + (y + z)$

(A3) $\exists 0 \in K \forall x \in K : x + 0 = x$

(A4) $\forall x \in K \exists y \in K : x + y = 0$

(M1) $\forall x, y \in K : x \cdot y = y \cdot x$

(M2) $\forall x, y, z \in K : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

(M3) $\exists 1 \in K \backslash \{0\} \forall x \in K \backslash \{0\} : x \cdot 1 = x$

(M4) $\forall x \in K \backslash \{0\} \exists y \in K \backslash \{0\} : x \cdot y = 1$

(D) $\forall x, y, z \in K : (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Beispiele sind $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sowie (Menge der rationalen Funktionen, $+, \cdot$). (Eine rationale Funktion ist ein Quotient von Polynomen.) Statt "$(K, +, \cdot)$ ist Körper" sagt man oft auch "K ist Körper".

Man nennt (A1)-(A4) Axiome der Addition, (M1)-(M4) Axiome der Multiplikation und (D) Distributivgesetz. (A1) und (M1) heißen Kommutativgesetze und (A2) und (M2) heißen Assoziativgesetze. Insgesamt nennt man die obigen Regeln die Körperaxiome.

Wir ziehen einige Folgerungen aus den Körperaxiomen.

Satz 1.7.1 *Die mit* 0 *und* 1 *bezeichneten Elemente sind eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien 0 und $0'$ Elemente von K mit der in (A3) geforderten Eigenschaft, d.h., $\forall x \in K : x + 0 = x$ und $\forall x \in K : x + 0' = x$. Zu zeigen ist $0 = 0'$.

Wählt man oben $x = 0'$ bzw. $x = 0$, so erhält man $0' + 0 = 0'$ bzw. $0 + 0' = 0$. Mit (A1) folgt also $0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$. Analog zeigt man die Eindeutigkeit der 1. $\square$

Man beachte, dass zum Beweis der Eindeutigkeit der 0 lediglich (A1) und (A3) verwandt wurden. Genaugenommen sollte man diesen Beweis erst führen, bevor man (A4) formuliert. Entsprechendes gilt für (M4).

Satz 1.7.2 *Die in* (A4) *und* (M4) *genannten Elemente y sind eindeutig.*

Beweis. Wir beschränken uns auf (A4). Der Beweis für (M4) ist analog.

Seien $y, y' \in K$ mit $x + y = 0$ und $x + y' = 0$. Es folgt $x + y = x + y'$ und damit $y + (x + y) = y + (x + y')$. Mit (A2) folgt $(y + x) + y = (y + x) + y'$. Wegen (A1) ist aber $y + x = x + y$, also $y + x = 0$. Wir erhalten $0 + y = 0 + y'$ und damit $y = y'$. $\square$

Wir bezeichnen für $x \in K$ das (nach Satz 1.7.2) eindeutig bestimmte y mit $x + y = 0$ mit $-x$. Analog wird für $x \in K\backslash\{0\}$ das eindeutig bestimmte y mit $x \cdot y = 1$ mit x^{-1} oder $\frac{1}{x}$ bezeichnet. Weiter schreiben wir auch $a - b$ statt $a + (-b)$ und $\frac{a}{b}$ oder a/b statt $a \cdot \frac{1}{b}$.

Sind $a, b \in K$, so existiert ein eindeutig bestimmtes $x \in K$ mit $a + x = b$, nämlich $x = b - a$. Analog existiert zu $a, b \in K\backslash\{0\}$ ein eindeutig bestimmtes $x \in K$ mit $ax = b$, nämlich $x = \frac{b}{a}$. Auf den einfachen Beweis dieser Tatsachen verzichten wir.

Satz 1.7.3 *Sei K Körper, $x, y \in K$. Dann gilt: $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$.*

Beweis. "$\Leftarrow$": Wegen $xy = yx$ kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) annehmen, dass $y = 0$ gilt. Zu zeigen ist $x \cdot 0 = 0$.

Nun ist $0+0 = 0$ nach (A3), nach (D) also $x0+x0 = x(0+0) = x0$. Andererseits ist nach (A3) auch $x0+0 = x0$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen von $a+x = b$ folgt $x0 = 0$.

"$\Rightarrow$": Sei $x \cdot y = 0$ und $x \neq 0$. Zu zeigen ist, dass $y = 0$. (Wir haben eine Aussage der Form $A \Rightarrow (B \vee C)$ zu zeigen, und wir haben benutzt, dass diese äquivalent zu $(A \wedge \neg B) \Rightarrow C$ ist.) Nun ist $y = y \cdot 1 = y(xx^{-1}) = (yx)x^{-1} = (xy)x^{-1} = 0 \cdot x^{-1} = 0$. $\square$

Wir geben einige weitere Rechenregeln, die leicht aus den Körperaxiomen gefolgert werden können, ohne Beweis an:

(i) $\forall x \in K : -(-x) = x$

(ii) $\forall x \in K\backslash\{0\} : (x^{-1})^{-1} = x$

(iii) $\forall x, y \in K : -(x+y) = (-x) + (-y)$

(iv) $\forall x, y \in K\backslash\{0\} : (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$

(v) $\forall x, y \in K : (-x)y = -(xy) = x(-y)$

Auch einige Rechenregeln, die hier nicht explizit aufgeführt sind, werden im weiteren benutzt werden.

Es sei eine Menge K mit einer "Verknüpfung" $+$ gegeben. Gelten dann (A1)-(A4), so heißt das Paar $(K, +)$ *kommutative Gruppe* (oder *abelsche Gruppe*).

Ist $(K, +, \cdot)$ Körper, so ist also $(K, +)$ kommutative Gruppe. Aus (M1)-(M4) folgt, dass auch $(K\backslash\{0\}, \cdot)$ kommutative Gruppe ist. Ist umgekehrt $(K\backslash\{0\}, \cdot)$ kommutative Gruppe, so folgen hieraus nicht unmittelbar (M1) und (M2), da dort ja auch $x = 0$, $y = 0$ oder $z = 0$ zugelassen ist. Setzt man aber voraus, dass $(K, +)$ und $(K\backslash\{0\}, \cdot)$ kommutative Gruppen sind und dass (D) gilt, so folgt wie im Beweis von Satz 1.7.3, dass (M1) und (M2) auch dann gelten, wenn ein Faktor 0 ist. Damit erhält man, dass $(K, +, \cdot)$ genau dann ein Körper ist, wenn $(K, +)$ und $(K\backslash\{0\}, \cdot)$ kommutative Gruppen sind und (D) gilt. Dies macht die Körperaxiome einprägsamer. Körper und (kommutative) Gruppen sind Beispiele für algebraische Strukturen. Eine genauere Untersuchung dieser und anderer Strukturen wie Ring, Halbgruppe, Schiefkörper, Vektorraum, usw. findet in der (linearen) Algebra statt.

Wir notieren hier noch, dass $(K, +, \cdot)$ *Integritätsbereich* heißt, falls alle Körperaxiome bis auf (M4) gelten und außerdem noch

$$\forall x, y \in K : xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$$

gilt. Die letzte Eigenschaft nennt man *Nullteilerfreiheit.* Für Körper wurde sie mit Hilfe von (M4) in Satz 1.7.3 gezeigt. Beispiel eines Integritätsbereichs ist $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Exkurs: Konstruktion der rationalen Zahlen. Wir skizzieren, wie man den Integritätsbereich $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ zu einem Körper erweitern kann. Dazu betrachten wir die auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ durch $(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow ad = bc$ definierte Relation $\sim$. Die Idee dabei ist, (a, b) mit dem Bruch $\frac{a}{b}$ zu identifizieren.

Zunächst zeigen wir, dass $\sim$ Äquivalenzrelation ist. Um etwa die Transitivität zu zeigen, sei $(a, b) \sim (c, d)$ und $(c, d) \sim (e, f)$. Es ist dann $ad = bc$ und $cf = de$. Zu zeigen ist $(a, b) \sim (e, f)$, also $af = be$. Nun ist aber $(af - be)d = afd - bed = (ad)f - (de)b = (bc)f - (cf)b = 0$. Wegen $d \neq 0$ und Nullteilerfreiheit folgt $af = be$.

Als nächstes definiert man auf der Menge der Äquivalenzklassen $[(a, b)]$ eine Addition und eine Multiplikation durch

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(ad + bc, bd)]$$

und

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(a \cdot b, c \cdot d)].$$

Zunächst muss man jetzt zeigen, dass diese Addition und Multiplikation von Äquivalenzklassen *wohldefiniert* ist, d.h., nicht von den Repräsentanten der Äquivalenzklassen abhängt.

Sei dazu $(a,b) \sim (a',b')$ und $(c,d) \sim (c',d')$, d. h., $ab' = ba'$ und $cd' = dc'$. Dann ist

$$\begin{aligned}(ad+bc)b'd' &= adb'd + bcb'd' \\ &= ab'dd' + cd'bb' \\ &= ba'dd' + dc'bb' \\ &= bd(a'd' + b'c')\end{aligned}$$

also $(ad+bc, bd) \sim (a'd' + b'c', b'd')$. Analog (aber einfacher) zeigt man die Wohldefiniertheit der Multiplikation von Äquivalenzklassen.

Schließlich zeigt man, dass die Menge der Äquivalenzklassen mit der so definierten Addition und Multiplikation einen Körper bildet, d.h., $(\{[(a,b)] : a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\}, +, \cdot)$ ist Körper.

Beispielsweise folgt (A1) da $[(a,b)] + [(c,d)] = [(ad+bc, bd)] = [(cb+da, db)] = [(c,d)] + [(a,b)]$. Die anderen Körperaxiome sind ebenfalls leicht nachzurechnen. Dabei ist $[(0,1)]$ das Nullelement und $[(1,1)]$ das Einselement, $-[(a,b)] = [(-a,b)]$ und $[(a,b)]^{-1} = [(b,a)]$. Wie bezeichnen den erhaltenen Körper mit $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und nennen ihn Körper der rationalen Zahlen.

Man kann eine ganze Zahl n mit der Äquivalenzklasse $[(n,1)]$ identifizieren. Denn es gilt $[(n,a)] + [(m,1)] = [(n+m,1)]$ und $[(n,1)] \cdot [(m,1)] = [(n \cdot m, 1)]$ für $m, n \in \mathbb{Z}$. In diesem Sinne ist $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ enthalten.

Für eine formale Beschreibung dieses Sachverhalts betrachtet man die Funktion $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto [(n,1)]$. Dann gilt $i(n+m) = i(n) + i(m)$ und $i(n \cdot m) = i(n) \cdot i(m)$. Außerdem ist i injektiv.

Bemerkungen. 1. Mit dem oben angegebenen Verfahren kann man jeden Integritätsbereich zu einem Körper erweitern, dem sogenannten *Quotientenkörper*. Ein weiteres Beispiel ist etwa durch den Integritätsbereich der Polynome gegeben, der zum Körper der rationalen Funktionen erweitert werden kann.

2. Auf ähnliche Weise kann man $\mathbb{Z}$ aus $\mathbb{N}$ konstruieren. Später werden wir $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ konstruieren. Insgesamt wird so $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{N}$ konstruiert. Zuvor geben wir aber eine axiomatische Beschreibung von $\mathbb{R}$.

Definition 1.7.2 Sei $(K, +, \cdot)$ Körper und sei $\leq$ Ordnung auf K, d.h., $(K, \leq)$ ist geordnete Menge. Dann heißt $(K, +, \cdot, \leq)$ *angeordneter Körper*, falls gilt:

(O1) $\forall x, y, z \in K : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,

(O2) $\forall x, y \in K : 0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$.

Man nennt (O1) und (O2) die *Ordnungsaxiome*.

Beispiele angeordneter Körper sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. (Wir schreiben statt $(K, +, \cdot, \leq)$ oft wieder nur K.)

Sei K angeordneter Körper. Wir schreiben wieder $x < y$ oder $y > x$ statt $(x \leq y \wedge x \neq y)$ und auch $y \geq x$ statt $x \leq y$. Wir nennen $x \in K$ *positiv* falls $x > 0$ und *negativ* falls $x < 0$.

Aus den Körper- und Ordnungsaxiomen (und den Eigenschaften der Ordnung) erhält man die folgenden Regeln. Dabei sind $x, y, u, v, a \in K$.

(i) $x \leq y \Leftrightarrow x - y \leq 0 \Leftrightarrow y - x \geq 0$,

(ii) $x \leq y \wedge u \leq v \Rightarrow x + u \leq y + v$,

(iii) $a \geq 0 \wedge x \leq y \Rightarrow ax \leq ay$,

(iv) $x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0$,

(v) $xy > 0 \Leftrightarrow (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)$,

(vi) $x^2 \geq 0$,

(vii) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$,

(viii) $1 > 0$,

(ix) $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$,

(x) $x > y > 0 \Rightarrow (y^{-1} > x^{-1}) \wedge (xy^{-1} > 1)$.

Dabei ist in (vi) natürlich $x^2 := x \cdot x$. Allgemeiner ist

$$x^n := \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n-\text{mal}}$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Zum Beweis von (i) braucht man nur (O1) mit $z = -y$ bzw. $z = -x$ verwenden. Regel (ii) folgt durch zweimalige Anwendung von (O1) und (A1):

$$x + u \leq y + u = u + y \leq v + y = y + v.$$

Um (iii) zu zeigen, beachten wir zunächst, dass $y - x \geq 0$ nach (i). Mit (O2) folgt $a(y - x) \geq 0$, also $ay - ax \geq 0$ wegen (D). Mit (i) folgt schließlich $ax \leq ay$.

Wir verzichten auf die (einfachen) Beweise von (iv)-(x). Es gibt auch noch viele weitere Rechenregeln, die wir gelegentlich benutzen werden, aber hier nicht ausdrücklich aufführen.

Wir definieren für $x \in K$

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

und nennen $|x|$ den *Betrag* von x. Für $x, y \in K$ gelten dann die folgenden Rechenregeln:

(i) $|x| \geq 0$

(ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $|x| \geq x$

(iv) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(v) $|x + y| \leq |x| + |y|$

(vi) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Regel (v) heißt *Dreiecksungleichung.* Zu ihrem Beweis beachte man, dass $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$ nach (iii). Es folgt $x + y \leq |x| + |y|$. Weiter ist $-x \leq |-x| = |(-1) \cdot x| = |-1| \cdot |x| = -(-1) \cdot |x| = 1 \cdot |x| = |x|$ und analog $-y \leq |y|$. Wir erhalten $-(x + y) = -x + (-y) \leq |x| + |y|$. Insgesamt folgt $x + y \leq |x| + |y|$ und $-(x+y) \leq |x|+|y|$. Hieraus folgt die Behauptung. (Wir haben (iii) im Beweis von (v) benutzt. Natürlich muss man sich noch überzeugen, dass (iii) ohne Zuhilfenahme von (v) bewiesen werden kann, aber dies ist leicht zu sehen.)

Definition 1.7.3 Ein angeordneter Körper $(K, +, \cdot, \leq)$ heißt *vollständig*, falls die geordnete Menge $(K, \leq)$ ordnungsvollständig ist.

In einem vollständigen angeordneten Körper besitzt also jede nach oben beschränkte Menge ein Supremum. Das Supremum lässt sich in Körpern auch wie folgt charakterisieren.

Satz 1.7.4 *Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ angeordneter Körper und A nach oben beschränkte Teilmenge von K. Sei s eine obere Schranke A. Dann ist s Supremum von A genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in A$ existiert, so dass $s - \varepsilon < x$, d.h.*

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : s - \varepsilon < x.$$

Beweis: "⇒": Wir führen den Beweis indirekt (genauer: durch Kontraposition) und nehmen an, dass $(*)$ nicht gilt. Es folgt

$$\exists \varepsilon > 0 \forall x \in A : s - \varepsilon \geq x,$$

d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 : s - \varepsilon \text{ ist obere Schranke von } A.$$

Da aber $s - \varepsilon < s$ falls $\varepsilon > 0$, ist s also kein Supremum von A.

"⇐": Es gelte $(*)$ und es sei s' obere Schranke von A. Zu zeigen ist, dass $s' \geq s$. Wir nehmen an, dass dies nicht gilt. Dann ist $s' < s$ und damit $\varepsilon := s - s' > 0$. Nach $(*)$ existiert $x \in A$ mit $x > s - \varepsilon = s'$. Dies ist ein Widerspruch, da s' obere Schranke von A.

1.8 Reelle Zahlen

Grundlegend für die Analysis ist das folgende Resultat.

Satz 1.8.1 *Es gibt einen vollständigen angeordneten Körper.*

Wir werden später einen Beweis dieses Satzes skizzieren, indem wir andeuten werden, wie man den angeordneten Körper der rationalen Zahlen "vervollständigen" kann. Den so erhaltenen vollständigen angeordneten Körper nennen wir den *Körper der reellen Zahlen* und bezeichnen ihn mit $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, kurz auch $\mathbb{R}$.

Darüberhinaus kann man sogar zeigen, dass die reellen Zahlen im wesentlichen der einzige vollständige angeordnete Körper sind: ist $(K, +_K, \cdot_K, \leq_K)$ ein vollständiger angeordneter Körper, so existiert eine bijektive Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ mit $f(x +_K y) = f(x) + f(y)$, $f(x \cdot_K y) = f(x) \cdot f(y)$ und $x \leq_K y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$ für alle $x, y \in K$. Wir verzichten hier auf einen Beweis dieser Tatsache. Stattdessen entwickeln wir die Theorie des vollständige angeordneten Körpers $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ anhand der in §1.7 gegebenen Körper- und Ordnungsaxiome sowie der Vollständigkeit. Dabei betrachten wir $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ als Teilmengen von $\mathbb{R}$:

$$n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n-\text{mal}}, \quad \frac{m}{n} = m \cdot n^{-1}.$$

Satz 1.8.2 $\mathbb{N}$ *ist nicht nach oben beschränkt (in* $\mathbb{R}$*).*

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt ist. Sei $s = \sup \mathbb{N}$. Dann gilt $n \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 1.7.4 existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $N > s - 1$. Es folgt $N + 1 > s$. Dies ist ein Widerspruch, da $N + 1 \in \mathbb{N}$. □

Folgerung 1.8.1 *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. *Dann existiert* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $na > b$.

Beweis. Andernfalls gilt $na \leq b$ und damit $n \leq b/a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zu Satz 1.8.2. □

Folgerung 1.8.2 *Sei* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. *Dann existiert* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $\frac{1}{n} < a$.

Beweis. Man wende Folgerung 1.8.1 mit $b = 1$ an. □

Satz 1.8.2 und die beiden Folgerungen daraus heißen *Satz des Archimedes* oder *Satz des Eudoxos*; die Bezeichnungen sind hier uneinheitlich.

Satz 1.8.3 *Es sei* $M \subset \mathbb{Z}$, $M \neq \emptyset$. *Weiter sei* M *nach oben (bzw. unten) beschränkt. Dann hat* M *ein Maximum (bzw. Minimum).*

Beweis. Wir betrachten nur den Fall, dass M nach unten beschränkt ist. Der andere Fall ist analog. Weiter kann man annehmen, dass $M \subset \mathbb{N}$ gilt, dass also 1 untere Schranke von M ist. (Denn ist $M \subset \mathbb{Z}$ und $s \in \mathbb{Z}$ untere Schranke, so betrachten wir $M' := \{n - s + 1 : n \in M\}$. Dann ist $M' \subset \mathbb{N}$ und ist μ Minimum von M', so ist $\mu + s - 1$ Minimum von M.)

Wir betrachten die Menge A aller natürlichen Zahlen, die untere Schranke von M sind, also $A = \{n \in \mathbb{N} : (\forall m \in M : n \leq m)\}$. Dann ist $1 \in A$ wegen $M \subset \mathbb{N}$. Andererseits ist A nach oben beschränkt, da jedes Element von M obere Schranke von A ist. Nach Satz 1.8.2 gilt damit $A \neq \mathbb{N}$.

Damit existiert aber $k \in \mathbb{N}$, so dass $k \in A$ und $k+1 \notin A$. Denn andernfalls würde für alle $k \in \mathbb{N}$ die Aussage $k \in A$ die Aussage $k + 1 \in A$ implizieren, aufgrund des

Beweisprinzips der vollständigen Induktion also $A = \mathbb{N}$ gelten. Formal sieht dieser Schluss wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
& \neg(\exists k \in \mathbb{N} : k \in A \wedge k+1 \notin A) \\
\Leftrightarrow\quad & \forall k \in \mathbb{N} : \neg(k \in A \wedge k+1 \notin A) \\
\Leftrightarrow\quad & \forall k \in \mathbb{N} : k \notin A \vee k+1 \in A \\
\Leftrightarrow\quad & \forall k \in \mathbb{N} : k \in A \Rightarrow k+1 \in A \\
\overset{1\in A}{\Rightarrow}\quad & A = \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Sei nun also $k \in A$ mit $k+1 \notin A$. Dann ist k untere Schranke von M wegen $k \in A$. Wegen $k+1 \notin A$ existiert $m \in M$ mit $m < k+1$. Da aber auch $k \leq M$ gilt, und zwischen k und $k+1$ keine natürliche Zahl liegt, folgt $k = m$, also $k \in M$. Damit ist k Minimum von M. □

Wir haben im Beweis die Behauptung auf die folgende Aussage reduziert: *jede nichtleere Teilmenge von* $\mathbb{N}$ *besitzt ein Minimum.* Hierzu sagt man auch: $\mathbb{N}$ ist *wohlgeordnet.*

Den folgenden Satz drückt man auch mit den Worten "$\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$" aus.

Satz 1.8.4 *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann existiert $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$.*

Beweis. Es ist $b - a > 0$ und damit existiert nach Folgerung 1.8.2 ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b - a$. Wir betrachten die Menge $M := \{k \in \mathbb{Z} : k > na\}$. Nach Satz 1.8.2 gilt dann $M \neq \emptyset$. Außerdem ist M nach unten (durch na) beschränkt. Nach Satz 1.8.3 hat M also ein Minimum m. Es gilt dann $m > na$ und damit $a < \frac{m}{n}$. Außerdem ist $m - 1 \leq na$ und damit $m \leq na + 1$, also $\frac{m}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b$. Also leistet $r := \frac{m}{n}$ das Verlangte. □

Wir führen einige Bezeichnungen ein. Seien dazu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann heißen

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ *offenes Intervall,*
- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ *abgeschlossenes Intervall,*
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ und $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ *halboffene Intervalle.*

Bei Mengen der Form $\{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ setzen wir formal $b = \infty$ und bezeichnen auch sie als offenes Intervall, also $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$. Analog definiert man das offene Intervall $(-\infty, b)$ sowie die abgeschlossenen Intervalle $[a, \infty)$ und $(-\infty, b]$. Wir bezeichnen $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$ sowohl als offenes Intervall wie auch als abgeschlossenes Intervall. Weiter setzen wir noch $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$.

Man beachte, dass wir für offene Intervalle und geordnete Paare die gleiche Notation verwenden! Dies sollte aber nicht zu Missverständnissen führen. Eine andere übliche Notation für das offene Intervall (a, b) ist $]a, b[$, mit einer analogen Notation für halboffene Intervalle.

In der jetzt eingeführten Terminologie lautet Satz 1.8.4 etwa: Ist I offenes Intervall, so gilt $I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

Satz 1.8.5 $\mathbb{Q}$ *ist nicht vollständig.*

Beweis. Sei $M := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$. Dann ist $M \neq \emptyset$ (etwa $0 \in M$) und M ist nach oben beschränkt (etwa durch 2). Wir nehmen an, dass $\mathbb{Q}$ vollständig ist. Dann besitzt M ein Supremum $s \in \mathbb{Q}$. Wegen $0 \in M$ gilt $s \geq 0$.

Wir zeigen zunächst, dass $s^2 = 2$ gilt. Dazu nehmen wir an, dass $s^2 < 2$. Dann ist $m := \min\{\frac{2-s^2}{2s+1}, 1\} > 0$ und nach Satz 1.8.4 existiert $r \in (s, s+m) \cap \mathbb{Q}$. Es folgt

$$r^2 < (s+m)^2 = s^2 + 2sm + m^2 \leq s^2 + 2sm + m \leq s^2 + 2s\frac{2-s^2}{2s+1} + \frac{2-s^2}{2s+1} = 2,$$

also $r \in M$ und $s < r$, im Widerspruch zu $s = \sup M$. Ähnlich führt man $s^2 > 2$ zum Widerspruch. Es gilt also $s^2 = 2$.

Wegen $s \in \mathbb{Q}$ existieren $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, mit $s = \frac{p}{q}$. Man kann annehmen, dass p und q teilerfremd sind, insbesondere also, dass p und q nicht beide gerade sind. Wegen $2 = s^2 = \frac{p^2}{q^2}$ gilt $p^2 = 2q^2$. Dies impliziert, dass p^2 gerade ist. Damit ist aber auch p gerade, etwa $p = 2n$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Es folgt, dass $2q^2 = p^2 = (2n)^2 = 4n^2$, also $q^2 = 2n^2$. Dies impliziert aber, dass q^2 und damit q gerade ist. Dies ist ein Widerspruch. □

Bemerkung. Die Menge M aus dem obigen Beweis besitzt wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ein Supremum $s \in \mathbb{R}$, und das obige Argument zeigt, dass $s^2 = 2$ gilt. Wir bezeichnen diese reelle Zahl s natürlich mit $\sqrt{2}$.

Diese Idee benutzt man allgemeiner zur Definition rationaler Potenzen.

Definition 1.8.1 Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}_+$. Man setzt

$$\sqrt[n]{a} := \sup\{x \in \mathbb{R} : x^n \leq a\}, \quad a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}, \quad a^{-\frac{m}{n}} := \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

sowie $a^0 := 1$ und $\sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$.

Ähnlich wie im Beweis von Satz 1.8.5 zeigt man $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. Darüberhinaus sieht man leicht, das $\sqrt[n]{a}$ die einzige positive reelle Zahl ist, deren n-te Potenz a ist, d. h., $\{x \in \mathbb{R} : x^n = a\} = \{\sqrt[n]{a}\}$. Desweiteren zeigt man leicht, dass $a^{\frac{m}{n}}$ wohldefiniert ist, d. h., dass für $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ auch $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m'}{n'}}$ gilt.

Satz 1.8.6 *Seien $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $r, s \in \mathbb{Q}$. Dann gilt*

(i) $a^r a^s = a^{r+s}$,

(ii) $(a^r)^s = a^{rs}$,

(iii) $(ab)^r = a^r b^r$,

(iv) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$,

(v) $a < b \wedge r > 0 \Rightarrow a^r < b^r$ *und* $a < b \wedge r < 0 \Rightarrow a^r > b^r$,

(vi) $r < s \wedge a > 1 \Rightarrow a^r < a^s$ *und* $r < s \wedge a < 1 \Rightarrow a^r > a^s$.

Der Beweis sei als Übung überlassen. Man kann die Idee in Definition 1.8.1 auch benutzen, um die Potenz a^x für $a \in \mathbb{R}_+$ und $x \in \mathbb{R}$ durch $a^x := \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q} \wedge r \leq x\}$ zu definieren. Wir werden dies später (in §2.5) auf etwas anderem Wege tun.

Mit Hilfe der folgenden Definition werden wir einen weiteren wichtigen Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ beschreiben.

Definition 1.8.2 Es sei M Menge, $M \neq \emptyset$.

- M heißt *endlich*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion (d. h., eine bijektive Abbildung) $\phi : \{1, \ldots, n\} \to M$ gibt.
- M heißt *abzählbar*, falls es eine Bijektion $\phi : \mathbb{N} \to M$ gibt.
- M heißt *höchstens abzählbar*, falls M endlich oder abzählbar ist.
- M heißt *überabzählbar*, falls M nicht endlich oder abzählbar ist.

Satz 1.8.7 $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar.*

Beweisskizze. Wir beginnen mit 0, durchlaufen die Zahlen $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ wie in dem folgenden Schema angedeutet und fügen die Zahl $-\frac{m}{n}$ hinter $\frac{m}{n}$ ein.

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc}
 & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & \ldots \\
\hline
1 & 1 & \rightarrow & 2 & & 3 & \rightarrow & 4 & & 5 & \ldots \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
2 & \frac{1}{2} & & 1 & & \frac{3}{2} & & 2 & & \frac{5}{2} & \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & \\
3 & \frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & 1 & & \frac{4}{3} & & \frac{5}{3} & \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & & & & & \\
4 & \frac{1}{4} & & \frac{1}{2} & & \frac{3}{4} & & 1 & & \frac{5}{4} & \\
 & \downarrow & \nearrow & & & & & & & & \\
5 & \frac{1}{5} & & \frac{2}{5} & & \frac{3}{5} & & \frac{4}{5} & & 1 & \\
\ldots & \ldots & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Bereits einmal durchlaufene Zahlen lassen wir weg und kommen so zu folgender Anordnung der rationalen Zahlen:

$$0, 1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 3, -3, 4, -4, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$$

Die durch $\phi(1) = 0, \phi(2) = 1, \phi(3) = -1, \phi(4) = 2, \ldots$ definierte Funktion $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ ist dann bijektiv. $\square$

Satz 1.8.8 $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

Bevor wir diesen Satz beweisen, formulieren wir folgendes Resultat.

Satz 1.8.9 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall $I(n)$ gegeben, d. h., es sei I eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in die Menge der beschränkten, abgeschlossenen Intervalle. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $I(n+1) \subset I(n)$. Dann gilt*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I(n) \neq \emptyset.$$

Der Beweis sei als Übung überlassen. (In der Formulierung des Satzes ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} I(n)$ eine abkürzende Schreibweise für $\bigcap_{I\in\{I(\mathbb{N})\}} I$. Entsprechende Schreibweisen werden wir im folgenden häufiger benutzen.)

Oft wird die in Satz 1.8.9 angegebene Eigenschaft auch als Definition der Vollständigkeit genommen (anstelle der Eigenschaft, dass jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt). Dies führt aber zu einem anderen Vollständigkeitsbegriff, und zur Charakterisierung von $\mathbb{R}$ muss dann noch eine der Aussagen von Satz 1.8.2, Folgerung 1.8.1 oder Folgerung 1.8.2 hinzugenommen werden. Die hinzugenommene Aussage wird dann als *Archimedisches Axiom* bezeichnet.

Beweis von Satz 1.8.8. Sei $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Dann existiert ein abgeschlossenes Intervall $I(1)$ mit $\phi(1) \notin I(1)$. Weiter existiert ein abgeschlossenes Intervall $I(2) \subset I(1)$ mit $\phi(2) \notin I(2)$. Induktiv erhält man für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ein abgeschlossenes Intervall $I(n) \subset I(n-1)$ mit $\phi(n) \notin I(n)$. Nach Satz 1.8.9 ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} I(n) \neq \emptyset$ und damit existiert $s \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I(n)$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt damit $s \in I(n)$, wegen $\phi(n) \notin I(n)$ also $s \neq \phi(n)$. Es folgt $s \notin \phi(\mathbb{N})$. Daher ist ϕ nicht surjektiv. □

1.9 Komplexe Zahlen

Historisch tauchten komplexen Zahlen zuerst im 16. Jahrhundert bei der Lösung kubischer Gleichungen durch del Ferro, Tartaglia und Cardano auf. So hat die Gleichung $x^3 = 6x + 2$ drei reelle Lösungen. Mit $y := \sqrt[3]{1+\sqrt{-7}}$ ist $x := y + 2/y$ eine Lösung, denn

$$\begin{aligned}
x^3 &= \left(y + \frac{2}{y}\right)^3 \\
&= y^3 + 6y + \frac{12}{y} + \frac{8}{y^3} \\
&= 1 + \sqrt{-7} + 6\left(y + \frac{2}{y}\right) + \frac{8}{1+\sqrt{-7}} \\
&= 1 + \sqrt{-7} + 6x + \frac{8(1-\sqrt{-7})}{(1+\sqrt{-7})(1-\sqrt{-7})} \\
&= 1 + \sqrt{-7} + 6x + 1 - \sqrt{-7} \\
&= 6x + 2.
\end{aligned}$$

All dies gilt natürlich nur dann, wenn man die Objekte $\sqrt{-7}$ und $\sqrt[3]{1+\sqrt{-7}}$ mit Sinn füllen kann und die üblichen Rechenregeln dafür gelten. Außerdem ist alles andere als klar, dass es sich bei obigem Ausdruck für x um eine reelle Zahl handelt und wie man diese gegebenenfalls berechnet.

Die Idee ist also, den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen so zu erweitern, dass Gleichungen wie $x^2 + 1 = 0$ eine Lösung haben. Ist etwa i eine Lösung dieser Gleichung, also $i^2 = -1$, so kann man Elemente der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ betrachten. Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ erhält man, wenn man die üblichen Rechenregeln als gegeben hinnimmt, und zusätzlich die Regel $i^2 = -1$ benutzt, dann $(a + ib) \cdot (c + id) = ac + aid + ibc + i^2bd = ac - bd + i(ad + bc)$.

Formal geht man wie folgt vor: auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definieren wir eine Addition "+" und eine Multiplikation "$\cdot$" wie folgt:

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Es gilt dann, dass $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ Körper ist. Dabei ist $(0, 0)$ das Nullelement und $(1, 0)$ das Einselement.

Wir verzichten darauf, alle Körperaxiome nachzuweisen, sondern beschränken uns exemplarisch auf zwei, nämlich (M4) (Existenz des multiplikativen Inversen) und (D) (Distributivgesetz).

Nachweis von (M4). Sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2, (a, b) \neq (0, 0)$. Dann ist $a^2 + b^2 > 0$ und es gilt

$$\begin{aligned}
(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) &= \left(a\frac{a}{a^2 + b^2} - b\frac{-b}{a^2 + b^2}, a\frac{-b}{a^2 + b^2} + b\frac{a}{a^2 + b^2} \right) \\
&= \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab + ab}{a^2 + b^2} \right) \\
&= (1, 0).
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

Nachweis von (D). Seien $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
((a, b) + (c, d)) \cdot (e, f) &= (a + c, b + d) \cdot (e, f) \\
&= ((a + c)e - (b + d)f, (a + c)f + (b + d)e) \\
&= (ae - bf + ce - df, af + be + cf + de) \\
&= (ae - bf, af + be) + (ce - df, cf + de) \\
&= (a, b) \cdot (e, f) + (c, d) \cdot (e, f)
\end{aligned}$$

Wir nennen den erhaltenen Körper den Körper der *komplexen Zahlen* und bezeichnen ihn mit $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ oder kurz auch $\mathbb{C}$. (Es gilt also $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$!)

Weiter zeigt man leicht, dass $(\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}, +, \cdot)$ ein Teilkörper von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist. Dieser Teilkörper ist "isomorph" zum Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, denn die Abbildung $\phi : \mathbb{R} \to \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}, a \mapsto (a, 0)$ ist bijektiv und erfüllt $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$ und $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

Wir identifizieren daher die reelle Zahl a mit der komplexen Zahl $(a, 0)$ und betrachten in diesem Sinne die reellen Zahlen als Teilmenge von $\mathbb{C}$. Weiter setzen wir $i := (0, 1)$. Es gilt dann $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ und $i \cdot a = (0, 1) \cdot (a, 0) = (0, a)$ für $a \in \mathbb{R}$. Damit ist $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = a + ib$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Im allgemeinen schreiben wir komplexe Zahlen in der letzten Form.

Wir führen einige weitere Bezeichungen ein. Dazu seien $x, y \in \mathbb{R}$ und damit $z := (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$. Wir nennen x den *Realteil* von z und y den *Imaginärteil* von z. Dafür benutzen wir die Notation $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$.

Weiter heißt $\overline{z} := x - iy$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl* und $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ der Betrag von z. (Man beachte, dass für $z \in \mathbb{R}$ der hier definierte Betrag mit dem vorher definierten übereinstimmt.) Wir stellen einige Rechenregeln zusammen, die für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten.

(i) $|z| \geq 0$

(ii) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(iii) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

(iv) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(v) $z + \overline{z} = 2\text{Re } z$

(vi) $z - \overline{z} = 2i\text{Im } z$

(vii) $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

(viii) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

(ix) $z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$

(x) $|\overline{z}| = |z|$

(xi) $|\text{Re } z| \leq |z|$

(xii) $|\text{Im } z| \leq |z|$

(xiii) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(xiv) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)

(xv) $||z| - |w|| \leq |z - w|$

Wir beweisen hier nur einige der obigen Rechenregeln. Dazu sei $z = x + iy$ und $w = u + iv$, mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.
zu (iv):

$$\begin{aligned}
\overline{zw} &= \overline{(x + iy)(u + iv)} \\
&= \overline{xu - yv + i(xv + yu)} \\
&= xu - yv - i(xv + yu) \\
&= xu - (-y)(-v) + i(x(-v) + (-y)u) \\
&= (x - iy)(u - iv) \\
&= \overline{z}\,\overline{w}
\end{aligned}$$

zu (viii): $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$
zu (xiii): Nach den gerade bewiesenen Rechenregeln ist

$$|z \cdot w|^2 = z \cdot w \cdot \overline{z \cdot w} = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2$$

und damit $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

zu (xiv): Es ist

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} \\ &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z| \cdot |w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

und damit $|z+w| \leq |z| + |w|$.

Identifizieren wir die komplexe Zahl $z = x + iy = (x, y) \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit dem Punkt der Ebene mit Koordinaten x und y, so können wir die Addition komplexer Zahlen geometrisch deuten. Sie entspricht der Addition von Vektoren; siehe Abbildung 2. Der Betrag $|z|$ ist der Abstand von z zum Ursprung des Koordinatensystems.

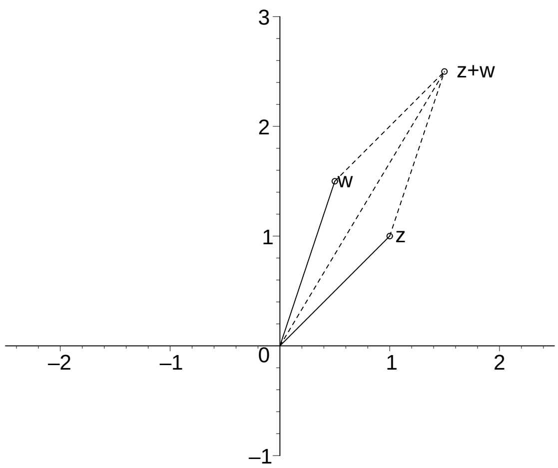

Abbildung 2: Geometrische Interpretation der Addition komplexer Zahlen.

Auch die Multiplikation komplexer Zahlen kann geometrisch gedeutet werden. Dies wird erst später erfolgen.

Satz 1.9.1 *Sei $w \in \mathbb{C}$. Dann existiert ein $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = w$.*

Beweis. Ist $w \in \mathbb{R}$, $w \leq 0$, so hat $z = i\sqrt{-w}$ die gewünschte Eigenschaft. Andernfalls gilt $|w| + \mathrm{Re}\ w > 0$ und (zur Übung empfohlenes!) Nachrechnen zeigt, dass

$$z = \frac{|w| + w}{\sqrt{2}\sqrt{|w| + \mathrm{Re}\ w}}$$

die geforderte Eigenschaft hat. $\square$

Allgemeiner zeigt man (durch quadratische Ergänzung), dass für beliebige $a, b \in \mathbb{C}$ die Gleichung $z^2 + az + b = 0$ eine Lösung hat. Noch allgemeiner gilt der folgende Satz.

Satz 1.9.2 (Fundamentalsatz der Algebra) *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei p ein Polynom vom Grad n, das heißt, es existieren $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$, so dass $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ für $z \in \mathbb{C}$ gilt. Dann existiert $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_1) = 0$.*

Einen *Beweis* dieses Satzes lernt man z. B. in einer Einführung in die Funktionentheorie kennen, wie sie i. a. in der Analysis IV geboten wird.

Sind p und z_1 wie in Satz 1.9.2, so existiert ein Polynom vom Grad $n - 1$, so dass $p(z) = (z - z_1)p_1(z)$ für $z \in \mathbb{C}$. Ist $n \geq 2$, so kann Satz 1.9.2 auf p_1 angewendet werden, und induktiv erhält man, dass $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ existieren, so dass $p(z) = a_n(z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$.

Satz 1.9.3 *Der Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ kann nicht angeordnet werden.*

Beweis. Es sei $\leq$ Ordnung und $<$ die zugehörige strikte Ordnung. Dann ist $0 < i^2 = -1$ und $0 < 1^2 = 1$. Es folgt $0 < -1 + 1 = 0$. Widerspruch! □

2 Folgen und Reihen

2.1 Folgen

Definition 2.1.1 Eine Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$ heißt *Folge*. Falls außerdem der Zielbereich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist, heißt sie (reelle bzw. komplexe) *Zahlenfolge*.

Sei M Menge und $f : \mathbb{N} \to M$ Folge. Für $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir statt $f(n)$ im allgemeinen f_n. Wir bezeichnen die Folge f mit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder kurz auch einfach mit (f_n). Gelegentlich schreiben wir auch $(f_1, f_2, f_3, \dots)$. Jede reelle Zahlenfolge kann auch als komplexe Zahlenfolge betrachtet werden.

Manchmal werden wir für ein $N \in \mathbb{Z}$ und eine Menge M auch Funktionen $f : \{n \in \mathbb{Z} : n \geq N\} \to M$ betrachten. Wir werden auch diese (Zahlen)folgen nennen und mit $(f_n)_{n \geq N}$ bezeichnen.

Begriffe wie "injektiv" sind, da sie für Funktionen definiert sind, insbesondere auch für Folgen erklärt. Begriffe wie "(nach oben/unten) beschränkt" oder "(streng) monoton fallend/steigend" definiert man für reelle Zahlenfolgen, indem man auf $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ die Ordnung "$\leq$" zugrunde legt.

Eine komplexe Zahlenfolge (a_n) heißt beschränkt, falls die reelle Zahlenfolge $(|a_n|)$ beschränkt ist. (Dabei kommt es natürlich nur darauf an, dass $(|a_n|)$ nach oben beschränkt ist, denn nach unten ist diese Folge immer durch 0 beschränkt).

Beispiel. Wir betrachten die reelle Zahlenfolge (a_n) wobei $a_n = \frac{n+1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Es ist also $(a_n) = (2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots)$.
Behauptung 1. (a_n) ist monoton fallend.