

**Übungsklausur zu Analysis I****14. Dezember 2006**

Für die Bearbeitung der folgenden 6 Aufgaben werden jeweils maximal 6 Punkte vergeben. Die Klausur hat im Ernstfall bestanden, wer insgesamt mindestens 18 der 36 zu vergebenden Punkte erreicht hat. Viel Erfolg!

Bearbeitungszeit: 2 Stunden

1. Wie lautet

- (a) die Definition des Supremums?
- (b) die Definition der Injektivität einer Funktion?
- (c) der Satz von Bolzano-Weierstrass?

2. Sei  $M$  die Menge der Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , für die  $f(0) = 0$  gilt. Zeigen Sie, dass die durch

$$f \prec g :\Leftrightarrow g - f \text{ ist monoton steigend}$$

definierte Relation  $\prec$  eine Halbordnung auf  $M$  ist.

3. Zeigen Sie, dass für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$  die Ungleichung  $3n \leq 2^n + 1$  gilt.

4. Bestimmen und skizzieren Sie die Menge aller  $z \in \mathbb{C}$ , für die

$$\operatorname{Re} \left( \frac{z + 6i}{z - 8} \right) < 0$$

gilt.

5. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge

$$\left( \left( n + \frac{2}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

6. Die reelle Zahlenfolge  $(x_n)$  sei definiert durch  $x_1 = 0$  und

$$x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4}$$

für  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass die Folge  $(x_n)$  konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.