Analysis IV

Walter Bergweiler

Sommersemester 2014
Fassung vom 4. April 2020

Inhaltsverzeichnis

Literatur

Die folgenden Bücher sind nur eine kleine Auswahl aus der umfangreichen Literatur zum Thema:

- Lars V. Ahlfors, Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable. 3. Auflage, McGraw-Hill, New York, 1978.

- Folkmar Bornemann, Funktionentheorie, Birkhäuser, Basel, 2013; im CAU-Netz als E-Book verfügbar:
  `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-0348-0472-1`

- John B. Conway, Functions of one complex variable. 2. Auflage. Springer, New York-Berlin, 1978.

- Wolfgang Fischer, Ingo Lieb, Funktionentheorie. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1980.

- Wolfgang Fischer, Ingo Lieb, Einführung in die komplexe Analysis: Elemente der Funktionentheorie. Vieweg+Teubner/Springer, 2010; im CAU-Netz als E-Book verfügbar:
  `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8348-9377-2`

- Eberhard Freitag, Rolf Busam, Funktionentheorie. Springer, Berlin, 1993; im CAU-Netz als E-Book verfügbar:
  `http://dx.doi.org/10.1007/3-540-32058-X`

- Klaus Jänich, Funktionentheorie. Springer, Berlin, 1993.

- Jürgen Müller, Konzepte der Funktionentheorie: Reelle und komplexe Analysis einer Variablen. Springer Spektrum, Berlin, 2018; im CAU-Netz als E-Book verfügbar:
  `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-56260-4`

- Reinhold Remmert, Funktionentheorie. I. Springer, Berlin, 1984.

- Dietmar A. Salamon, Funktionentheorie. Birkhäuser, Basel, 2012; im CAU-Netz als E-Book verfügbar:
  `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-0348-0169-0`

- Hermann Weyl, Einführung in die Funktionentheorie. Bearbeitet von Ralf Meyer und Samuel J. Patterson. Birkhäuser, Basel, 2008; im CAU-Netz als E-Book verfügbar:
  `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-7643-8846-1`

Ein Überblick

In Analysis I und II wurde zunächst die Differential- und Integralrechnung für Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$ entwickelt, wobei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist. Große Teile der Theorie gelten unverändert für Funktionen $f\colon I \to \mathbb{C}$ oder $f\colon I \to \mathbb{R}^n$, allgemeiner sogar $f\colon I \to X$ mit einem Banachraum X. (Ein Unterschied ist der Mittelwertsatz der Differentialrechnung, der in der allgemeineren Situation zur Mittelwertungleichung wird.) In Analysis II betrachtet man die Differenzierbarkeit von Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, wobei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ offen ist.

In dieser Vorlesung betrachten wir Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ wobei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen ist. Für diese wird komplexe Differenzierbarkeit über den Grenzwert des Differenzenquotienten definiert. Resultate wie Produktregel oder Kettenregel übertragen sich unmittelbar aus Analysis I. Ansonsten ergeben sich aber wesentliche Unterschiede zur dortigen Theorie. Einige Beispiele sind die Folgenden:

- Einmal komplex differenzierbare Funktionen sind beliebig oft komplex differenzierbar.
- Komplex differenzierbare Funktionen können in Potenzreihen entwickelt werden.
- Der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge komplex differenzierbarer Funktionen ist komplex differenzierbar, und die Ableitung des Grenzwerts ist der Grenzwert der Ableitungen.

Eine nützliche Übung ist, sich zu überlegen, dass die entsprechenden Resultate für Differenzierbarkeit im Sinne der Analysis I nicht gelten.

Neben der Differentialrechnung werden wir auch wieder Integralrechnung betreiben. Das Integral über ein Intervall, wie wir es in Analysis II kennen gelernt haben, wird dabei durch ein Integral über eine Kurve in $\mathbb{C}$ ersetzt.

Die Theorie der komplex differenzierbaren Funktionen heißt *Funktionentheorie*. Diese hat vielfältige Anwendungen, von denen wir auch einige behandeln. So geben wir einen kurzen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Als anderes Anwendungsbeispiel sei die Berechnung gewisser reeller Integrale genannt, beispielsweise

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\log x}{1+x^2} dx = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}.$$

Schließlich sei gesagt, dass viele Ergebnisse der reellen Analysis erst durch die Betrachtung komplexer Funktionen verständlich werden. So ist etwa aus Sicht der reellen Analysis nicht klar, warum die Taylorreihen von auf ganz $\mathbb{R}$ definierten und beliebig oft differenzierbaren Funktionen wie

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \quad \text{oder} \quad x \mapsto \frac{1}{e^x+1}$$

nicht auch auf ganz $\mathbb{R}$ konvergieren. Die Funktionentheorie lässt die Gründe erkennen, warum der Konvergenzradius 1 bzw. π ist: Die betrachteten Funktionen haben Singularitäten bei $\pm i$ bzw. $\pm i\pi$.

1 Komplexe Differenzierbarkeit

Definition 1.1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in \Omega$. Dann heißt f *(komplex) differenzierbar* in z_0, falls

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. Der Grenzwert heißt dann *Ableitung* von f in z_0.

Ist f in jedem Punkt von Ω komplex differenzierbar, so heißt f *holomorph*. Weiter heißt f holomorph in z_0, falls z_0 eine offene Umgebung U hat, so dass $f|_U$ holomorph ist.

Beispiele. 1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$. Dann gilt

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \ldots + z_0^{n-1} \to n z_0^{n-1}$$

für $z \to z_0$. Also ist f holomorph und es gilt $f'(z) = nz^{n-1}$.

2. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$, also $f(x + iy) = x - iy$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $h \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = 1 \to 1 \quad \text{für } h \to 0$$

und

$$\frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih} = \frac{-ih}{ih} = -1 \to -1 \quad \text{für } h \to 0.$$

Damit existiert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

nicht. Also ist f nicht komplex differenzierbar.

Analog zu Analysis I gilt das folgende Resultat.

Lemma 1.2. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*

(*i*) *f ist komplex differenzierbar in z_0.*

(*ii*) *Es existiert $m \in \mathbb{C}$, so dass*

$$f(z) = f(z_0) + m(z - z_0) + r(z)$$

wobei

$$\lim_{z \to z_0} \frac{r(z)}{|z - z_0|} = 0.$$

Gelten diese Aussagen, so gilt $m = f'(z_0)$.

Wie in Analysis I gelten, mit den gleichen Beweisen, die Produktregel, die Quotientenregel und die Kettenregel. Ebenso gilt natürlich die Regel für die Ableitung einer Summe. Es folgt zum Beispiel, dass Polynome holomorph sind. Wie in Analysis I gilt auch: *Differenzierbare Abbildungen sind stetig.*

Wir fassen jetzt die Abbildung $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ als Abbildung einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^2$ auf und betrachten Differenzierbarkeit im Sinne der Analysis II. (Es ist ja $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$!) Wir erinnern an den dortigen Differenzierbarkeitsbegriff: Die Abbildung $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ ist *total differenzierbar* in $z_0 = (x_0, y_0)$, falls eine lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existiert, so dass

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + T(x-x_0, y-y_0) + r(x,y)$$

wobei

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{r(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0.$$

Die zur linearen Abbildung T gehörige Matrix ist die *Jacobi-Matrix* und wird mit J_f bezeichnet. Mit

$$f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = u + iv$$

gilt

$$J_f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

und

$$T(h,k) = J_f(x_0,y_0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

Mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial y}$$

folgt

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + r(x,y).$$

Nun gilt $x = \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z+\overline{z}) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\overline{z}$ und $y = \operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}i(z-\overline{z}) = -\frac{1}{2}iz + \frac{1}{2}i\overline{z}$. Mit $z = (x,y) = x+iy$ und $z_0 = (x_0,y_0) = x_0 + iy_0$ folgt

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\left(\frac{1}{2}(z-z_0) + \frac{1}{2}\left(\overline{z-z_0}\right)\right) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\left(-\frac{1}{2}i(z-z_0) + \frac{1}{2}i\left(\overline{z-z_0}\right)\right) + r(z) \\ &= f(z_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)\ (z-z_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)\ (\overline{z-z_0}) + r(z). \end{aligned}$$

Wir setzen

$$f_z(z_0) := \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)$$

und

$$f_{\overline{z}}(z_0) := \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)$$

und nennen dies die *Wirtinger-Ableitungen* von f. Man beachte, dass dies keine wirklichen Ableitungen sind (da z und $\overline{z}$ keine unabhängigen Veränderlichen sind).

Die obigen Überlegungen liefern folgendes Resultat.

Lemma 1.3. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ $(= \mathbb{R}^2)$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*

(*i*) *f ist total differenzierbar in z_0.*

(*ii*) *Es existieren $A, B \in \mathbb{C}$ mit*

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + B(\overline{z - z_0}) + r(z)$$

wobei

$$\lim_{z\to z_0} \frac{r(z)}{|z - z_0|} = 0.$$

Gelten diese Aussagen, so gilt

$$A = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \quad \textit{und} \quad B = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0).$$

Es folgt aus Lemma 1.2 und 1.3, dass eine komplex differenzierbare Funktion auch total differenzierbar ist. (Man setze $A = m$ und $B = 0$.) Umgekehrt folgt wegen

$$\frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{|z - z_0|} \not\to 0 \quad \text{für } z \to z_0,$$

dass eine total differenzierbare Funktion genau dann komplex differenzierbar ist, wenn $B = 0$ gilt. Wir erhalten damit folgendes Resultat.

Satz 1.4. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in \Omega$. Dann sind äquivalent:*

(*i*) *f ist komplex differenzierbar in z_0.*

(*ii*) *f ist total differenzierbar in z_0 und*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0.$$

Es gilt dann

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0).$$

Wir erinnern daran, dass f total differenzierbar in Ω ist, falls die partiellen Ableitungen von f existieren und stetig in Ω sind. Damit ist f holomorph, falls die partiellen Ableitungen existieren und stetig sind und außerdem $\partial f/\partial \overline{z} = 0$ gilt.

Man nennt dies die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*. Wir schreiben diese für

$$f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = u + iv$$

auch noch in verschiedenen anderen Formen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad &\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} \\
\Leftrightarrow \quad &\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
\Leftrightarrow \quad &\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Für eine in z_0 komplex differenzierbare Funktion f folgt dann

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

Beispiel. Sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0\} = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0\}$ und

$$f \colon \Omega \to \mathbb{C}, \quad f(x,y) = \frac{1}{2}\log\big(x^2+y^2\big) + i\arctan\frac{y}{x},$$

also

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\log\big(x^2+y^2\big), \quad v(x,y) = \arctan\frac{y}{x}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{x}{x^2+y^2}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{y}{x^2+y^2}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{-y}{x^2}\right) = -\frac{\partial u}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Damit ist f holomorph.

2 Kurven, Zusammenhang und Wegzusammenhang

Wir werden den Begriff des Zusammenhangs nur für Teilmengen von $\mathbb{C}$ benötigen. Die grundlegenden Definitionen und Resultate sind aber allgemeiner formuliert.

Definition 2.1. Ein metrischer Raum (M,d) heißt *unzusammenhängend*, falls nichtleere, offene Teilmengen U und V von M existieren, so dass $M = U \cup V$ und $U \cap V = \emptyset$ gilt. Andernfalls heißt (M,d) *zusammenhängend*.

Bemerkungen. 1. Aus $U, V \neq \emptyset$ und $U \cap V = \emptyset$ folgt $U, V \neq M$.

2. Statt zu fordern, dass U und V beide offen sind, kann man auch fordern, dass U und V beide abgeschlossen sind. Denn sind U und V wie in Definition 2.1, so sind $A := M\backslash U$ und $B := M\backslash V$ abgeschlossen, nichtleer und es gilt $A \cup B = M$ und $A \cap B = \emptyset$.

3. Eine Teilmenge N von M heißt (un)zusammenhängend, falls dies für den metrischen Raum $(N, d|_{N\times N})$ gilt. Die Mengen U und V mit $N = U \cup V$ und $N \cap V = \emptyset$ wie in Definition 2.1 müssen also relativ offen in N sein.

Es folgt (vgl. Satz 7.24 der Analysis-Vorlesung von Herrn Nieß), dass N genau dann unzusammenhängend ist, wenn (in M) offene Mengen $U', V' \subseteq M$ existieren, so dass $U' \cap N \neq \emptyset$, $V' \cap N \neq \emptyset$, $N \subseteq U' \cup V'$ und $U' \cap V' \cap N = \emptyset$.

Der folgende Satz zeigt, dass für Teilmengen von $\mathbb{R}$ obige Definition mit Definition 3.29 der Analysis-Vorlesung von Herrn Nieß übereinstimmt. (Dabei werden einpunktige Mengen als Intervalle betrachtet.)

Satz 2.2. *Eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist.*

Beweis. Einpunktige Mengen sind offensichtlich zusammenhängend. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ und I enthalte mindestens zwei Punkte.

Sei zunächst I zusammenhängend. Seien $\alpha, \beta \in I$ mit $\alpha < \beta$ und sei $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Dann folgt $\gamma \in I$, da sonst mit $U' := (-\infty, \gamma)$ und $V' = (\gamma, \infty)$ gilt, dass $I \subseteq U' \cup V'$, $U' \cap I \neq \emptyset$, $V' \cap I \neq \emptyset$ und $U' \cap V' = \emptyset$. Mit $a := \inf I$ und $b := \sup I$ folgt hieraus, dass I eines der Intervalle $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ oder (a, b) ist.

Sei nun I Intervall. Wir nehmen an, dass I nicht zusammenhängend ist, etwa $I = A \cup B$ mit nichtleeren, disjunkten, in I relativ abgeschlossenen Teilmengen A und B von I. Sei $a \in A$ und $b \in B$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $a < b$. Wegen $a, b \in I$ folgt dann $[a, b] \subseteq I$. Sei $c := \sup(A \cap [a, b])$. Dann gilt $c \in A$ (und damit insbesondere $c < b$), da A abgeschlossen. Andererseits ist $(c, b] \subseteq B$ und wegen der Abgeschlossenheit von B also auch $c \in B$. Insgesamt folgt $c \in A \cap B$, ein Widerspruch. □

Satz 2.3. *Seien (M, d_M) und (N, d_N) metrische Räume, M zusammenhängend und $f : M \to N$ stetig. Dann ist $f(M)$ zusammenhängend.*

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $f(M) = N$. Sei N unzusammenhängend, etwa $N = U \cup V$ mit nichtleeren, disjunkten, offenen Teilmengen U und V von N. Mit $U^* := f^{-1}(U)$ und $V^* := f^{-1}(V)$ gilt $M \subseteq U^* \cup V^*$, und es sind U^* und V^* offen, nichtleer und disjunkt. Damit ist M unzusammenhängend. □

Definition 2.4. Seien (M, d) metrischer Raum und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to M$ heißt *Weg* oder *Kurve* von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$. Die Punkte $\gamma(a)$ bzw. $\gamma(b)$ heißen dann *Anfangs-* bzw. *Endpunkt* des Weges γ und $\mathrm{Sp}(\gamma) := \gamma([a, b])$ heißt *Spur* von γ. Weiter heißt γ *geschlossen*, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$, und γ heißt *Jordankurve*, falls γ geschlossen ist und $\gamma|_{[a,b)}$ injektiv ist.

Ist $K \subseteq M$, so heißt ein Weg γ mit $\mathrm{Sp}(\gamma) = K$ eine *Parametrisierung* von K.

Die Bezeichnungen sind uneinheitlich. Manchmal wird auch die Menge, die wir Spur der Kurve genannt haben, als Kurve bezeichnet.

Beispiele. 1. Für $x, y \in \mathbb{R}^d$ ist $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$, $\gamma(t) = x+t(y-x)$, eine Parametrisierung der Strecke $[x, y] := \{x+t(y-x)\colon 0 \le t \le 1\}$. Eine andere Parametrisiertung ist beispielsweise durch $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$, $\gamma(t) = x + t^2(y-x)$, gegeben, aber wir werden im Allgemeinen die erste Parametrisierung bevorzugen und nennen diese die *Standardparametrisierung* der Strecke.

2. Durch $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, ist eine Parametrisierung von $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon \|(x,y)\| = 1\}$ gegeben. Mit $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ gilt in komplexer Schreibung $\gamma(t) = e^{it}$, und γ ist eine Parametrisierung von $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$.

Definition 2.5. Ein metrischer Raum (M, d) heißt *wegzusammenhängend*, wenn für alle $x, y \in M$ ein Weg von x nach y existiert.

Satz 2.6. *Ein wegzusammenhängender metrischer Raum ist zusammenhängend.*

Beweis. Sei (M, d) wegzusammenhängender metrischer Raum. Wir nehmen an, dass M unzusammenhängend ist, etwa $M = U \cup V$ mit nichtleeren, disjunkten, offenen Teilmengen U und V von M. Seien $u \in U$ und $v \in V$. Dann existiert ein Weg $\gamma\colon [a,b] \to M$ von u nach v. Es ist dann $\gamma([a,b])$ unzusammenhängend, nach Satz 2.3 also $[a,b]$ unzusammenhängend, im Widerspruch zu Satz 2.2. $\square$

Die Umkehrung gilt nicht; das heißt, im Allgemeinen sind zusammenhängende Mengen nicht wegzusammenhängend. Ein Beispiel ist in Abbildung 1 dargestellt.

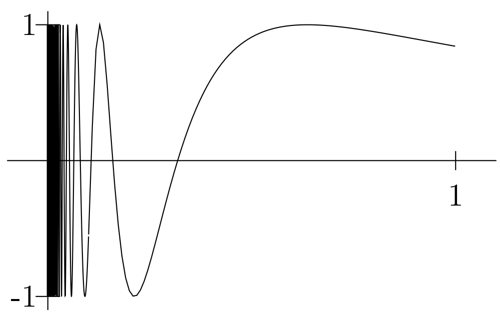

Abbildung 1: Die Menge $\{(x, \sin(1/x))\colon 0 < x \le 1\} \cup \{(0,y)\colon -1 \le y \le 1\}$, mit der euklidischen Metrik, ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

Eine offene zusammenhängende Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ heißt *Gebiet*. Wir zeigen, dass Gebiete wegzusammenhängend sind. Für offene Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ stimmen die beiden Zusammenhangsbegriffe also überein. Um zu zeigen, dass unsere Definition des Gebiets mit Definition 8.33 der Analysis-Vorlesung von Herrn Nieß übereinstimmt, benötigen wir folgende Definition.

Definition 2.7. Sei V Vektorraum (über $\mathbb{R}$). Für $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ heißt

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] := [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n]$$

Polygonzug oder *Streckenzug* (von x_1 nach x_n).

Dabei ist natürlich die Strecke $[x, y] = \{x + t(y-x)\colon 0 \le t \le 1\}$ in einem Vektorraum wie in $\mathbb{R}^d$ definiert.

Satz 2.8. *Sei $(V, \|\cdot\|)$ normierter Raum und $M \subseteq V$ offen und zusammenhängend. Dann existiert für alle $x, y \in M$ ein in M verlaufender Polygonzug von x nach y. Insbesondere ist M wegzusammenhängend.*

Beweis. Sei $x \in M$. Wir betrachten die Menge U aller $y \in M$, für die ein in M verlaufender Polygonzug von x nach y existiert. Zu zeigen ist, dass $U = M$ gilt.

Wir zeigen zunächst, dass U offen ist. Sei dazu $y \in U$ und $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ein in M verlaufender Polygonzug von x nach y. Da M offen ist und $y \in U \subseteq M$ gilt, existiert $\varepsilon > 0$, für welches $K(y, \varepsilon) := \{z \in V : \|z - y\| < \varepsilon\}$ in M liegt. Für $z \in K(y, \varepsilon)$ ist dann $[x_1, x_2, \ldots, x_n, z]$ ein in M verlaufender Polygonzug von x nach z. Es folgt $K(y, \varepsilon) \subseteq U$ und damit ist U offen.

Ein analoges Argument zeigt, dass auch $V := M \backslash U$ offen ist. Wegen $U \neq \emptyset$, $U \cup V = M$ und $U \cap V = \emptyset$ folgt nun aus dem Zusammenhang von M, dass $V = \emptyset$, also $U = M$. $\square$

Definition 2.9. Eine bezüglich der Inklusion maximale (weg)zusammenhängende Teilmenge eines metrischen Raumes heißt (Weg)zusammenhangskomponente.

Beispielsweise hat $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ die Wegzusammenhangskomponenten (und auch Zusammenhangskomponenten) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ und $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$.

Ist (M, d) metrischer Raum und $x \in M$, so ist die Menge aller $y \in M$, für die ein Weg von x nach y existiert, eine Wegzusammenhangskomponente.

Definition 2.10. Eine differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ heißt *glatt*, falls $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Existiert eine Zerlegung $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ von $[a, b]$ (also $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$), so dass $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ glatt (bzw. differenzierbar) ist, so heißt γ *stückweise glatt*. (bzw. *stückweise differenzierbar*).

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ Kurve und $\varphi : [a', b'] \to [a, b]$ stetig, monoton steigend und bijektiv. Dann heißt die Kurve $\gamma \circ \varphi$ *Umparametrisierung* von γ. Ist φ stückweise glatt, so ist $\gamma \circ \varphi$ genau dann stückweise glatt, wenn dies für γ gilt. Durch

$$\gamma \sim \gamma^* :\Leftrightarrow \gamma^* \text{ ist (stückweise glatte) Umparametrisierung von } \gamma$$

ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der (stückweise glatten) Kurven gegeben.

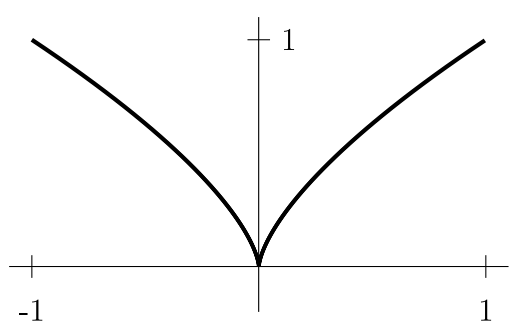

Abbildung 2: Die Kurve $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^3, t^2)$, ist stetig differenzierbar, aber nicht glatt. Die Kurve $\gamma^* : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\operatorname{sign}(t)|t|^{3/2}, |t|)$ ist eine stückweise glatte Umparametrisierung von γ.

Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$ Kurve. Dann heißt

$$(-\gamma)\colon [-b,-a] \to \mathbb{R}^d, \quad (-\gamma)(t) = \gamma(-t)$$

die zu γ *inverse Kurve.*

Für $j \in \{1,2\}$ seien $\gamma_j\colon [a_j,b_j] \to \mathbb{R}^d$ Kurven mit $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_1)$. Dann ist die *Summe* $\gamma_1+\gamma_2$ definiert durch $(\gamma_1+\gamma_2)\colon [a_1, b_1+b_2-a_2] \to \mathbb{R}^d$,

$$(\gamma_1+\gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & a_1 \leq t \leq b, \\ \gamma_2(t+a_2-b_1), & b_1 < t \leq b_1+b_2-a_2. \end{cases}$$

Es ist also $(\gamma_1+\gamma_2)|_{[a_1,b_1]} = \gamma_1$ und $(\gamma_1+\gamma_2)|_{[b_1,b_1+b_2-a_2]}$ ist eine Umparametrisierung von γ_2.

Sind speziell γ_1 und γ_2 Parametrisierungen von Strecken und setzt man $x_1 := \gamma_1(a_1)$, $x_2 := \gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_1)$ und $x_3 := \gamma_2(b_2)$, so ist $\gamma_1+\gamma_2$ Parametrisierung des Streckenzugs $[x_1,x_2,x_3]$. Analog lassen sich längere Polygonzüge parametrisieren.

3 Kurvenintegrale

Definition 3.1. Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve, $f\colon \operatorname{Sp}(\gamma) \to \mathbb{R}^d$ stetig und $g\colon \operatorname{Sp}(\gamma) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$$\int_\gamma \langle f(x), dx\rangle = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \; dt$$

(orientiertes) *Kurvenintegral* von f über γ,

$$\int_\gamma g(x)|dx| = \int_a^b g(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|_2 \; dt$$

(nichtorientiertes) *Kurvenintegral* von g über γ und

$$L(\gamma) = \int_\gamma 1 \; |dx| = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \; dt$$

Länge von γ. Dabei ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt. (Wenn das Skalarprodukt anders bezeichnet wird, ändert sich die Bezeichnung für das orientierte Kurvenintegral natürlich entsprechend.)

Ist $d=2$, also $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, so heißt

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

(komplexes) Kurvenintegral von f über γ. Dabei ist $f(\gamma(t))\gamma'(t)$ das Produkt der komplexen Zahlen $f(\gamma(t))$ und $\gamma'(t)$.

Bemerkungen. 1. Für $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ ist γ' natürlich durch $\gamma' = (\gamma_1', \dots, \gamma_d')$ definiert. Eventuell ist γ' an endlich vielen Stellen nicht definiert (da γ nur stückweise stetig differenzierbar ist). Dies ist für die auftretenden Integrale irrelevant.

Man könnte die Voraussetzungen an γ und f noch deutlich abschwächen, etwa für f nur fordern, dass die Integrale in Lebesgueschem Sinne existieren. Auch die Voraussetzungen für γ können abgeschwächt werden. Wir werden aber nur über stückweise stetig differenzierbare Kurven integrieren und nennen solche Kurven *Integrationswege.*

2. Die Definition der Länge stimmt mit der aus Analysis II überein (vgl. Satz 7.43 der Analysis-Vorlesung von Herrn Nieß).

Beispiele. 1. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$. Sei

$$f\colon \mathbb{C}\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{z - z_0}.$$

Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)dz \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t) - z_0} ire^{it} dt = \int_0^{2\pi} i\ dt = 2\pi i.$$

2. Sei $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$,

$$f\colon \mathbb{C}\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k}$$

und γ wie in Beispiel 1. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(re^{it})^k} ire^{it} dt = \frac{i}{r^{k-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-k)t} dt = \frac{i}{r^{k-1}} \left. \frac{e^{i(1-k)t}}{i(1-k)} \right|_{t=0}^{t=2\pi} = 0.$$

Statt $\int_\gamma f(z)dz$ schreiben wir auch $\int_{|z-z_0|=r} f(z)dz$.

Bemerkungen. 1. Die oben definierten Kurvenintegrale sowie die Länge einer Kurve sind invariant unter stückweise glatten Umparametrisierungen. Dies folgt direkt aus der Substitutionsregel.

2. Ist M eine Menge, die in offensichtlicher Weise als Spur einer stückweise glatten Kurve dargestellt werden kann, so schreibt man auch $\int_M \dots$ statt $\int_\gamma \dots$. Man beachte aber, dass $\mathrm{Sp}(-\gamma) = \mathrm{Sp}(\gamma)$ ist, nach Substitutionsregel aber

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz,$$

$$\int_{-\gamma} \langle f(x), dx\rangle = -\int_\gamma \langle f(x), dx\rangle$$

und

$$\int_{-\gamma} g(x)|dx| = \int_\gamma g(x)|dx|$$

gilt. Bei der Schreibweise $\int_M \dots$ muss also auch klar sein, wie die Kurve γ mit $\mathrm{Sp}(\gamma) = M$ orientiert ist.

Außerdem gilt

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz,$$

wobei f, γ_1, γ_2 so seien, dass die obigen Integrale definiert sind. Entsprechendes gilt für orientierte und nichtorientierte Kurvenintegrale.

3. Orientierte Kurvenintegrale können physikalisch zum Beispiel wie folgt gedeutet werden: Wird ein Massenpunkt entlang einer Kurve γ in einem Kraftfeld f bewegt, so ist $\int_\gamma \langle f(x), dx\rangle$ die dabei verrichtete Arbeit.

Den folgenden Hilfssatz werden wir des Öfteren benutzen.

Lemma 3.2. *Seien γ, f, g wie in Definition* 3.1. *Dann gilt*

$$\left|\int_\gamma \langle f(x), dx\rangle\right| \leq \int_\gamma \|f(x)\|_2 \, |dx| \leq L(\gamma) \max_{x\in\mathrm{Sp}(\gamma)} \|f(x)\|_2 \,,$$

$$\left|\int_\gamma g(x)|dx|\right| \leq L(\gamma) \max_{x\in\mathrm{Sp}(\gamma)} |g(x)|$$

und

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)| \cdot |dz| \leq L(\gamma) \max_{z\in\mathrm{Sp}(\gamma)} |f(z)| \,.$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle| \leq \|f(\gamma(t))\|_2 \cdot \|\gamma'(t)\|_2$$

sowie Standardabschätzungen für Integrale. □

4 Stammfunktionen

Nach Hauptsatz der Differentialrechnung reduziert sich die Berechnung eines Integrals einer stetigen Funktion über ein Intervall in $\mathbb{R}$ auf die Auswertung einer Stammfunktion an den Endpunkten des Intervalls. Entsprechendes gilt für orientierte und komplexe Kurvenintegrale.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ stetig und $U\colon \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Gilt $f = \operatorname{grad} U$, so heißt U *P*otential von f, vgl. Analysis III. Der Gradient $\operatorname{grad} U$ von U ist dabei definiert durch

$$\operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_d}\right).$$

Satz 4.1. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ stetig und $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ Integrationsweg. Hat f ein Potential U, so gilt*

$$\int_\gamma \langle f(x), dx\rangle = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)).$$

Beweis. Mit $f = (f_1, \dots, f_d)$ gilt $f_j = \partial U / \partial x_j$. Mit $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ folgt

$$\begin{aligned}\int_\gamma \langle f(x), dx \rangle &= \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \sum_{j=1}^d \frac{\partial U}{\partial x_j}(\gamma(t)) \cdot \gamma_j'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{dU(\gamma(t))}{dt} dt \\ &= U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))\end{aligned}$$

nach Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. □

Für das komplexe Kurvenintegral erhalten wir Entsprechendes.

Definition 4.2. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Sei $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit $F' = f$. Dann heißt F *S*tammfunktion von f.

Satz 4.3. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ Integrationsweg. Hat f eine Stammfunktion F, so gilt*

$$\int_\gamma f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),\end{aligned}$$

nach Kettenregel und Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. □

Folgerung 4.4. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Gilt $f'(z) = 0$ für alle $z \in \Omega$, so ist f konstant.

Beweis. Seien $p, q \in \Omega$. Zu zeigen ist, dass $f(p) = f(q)$. Da Ω zusammenhängend ist, existiert ein Integrationsweg in Ω mit Anfangspunkt p und Endpunkt q, etwa $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ mit $\gamma(a) = p$ und $\gamma(b) = q$. Da f Stammfunktion von f' ist, folgt

$$f(q) - f(p) = \int_\gamma f'(z) dz = \int_\gamma 0 \; dz = 0.$$ □

Bemerkung. Ist Ω offen, aber kein Gebiet (also nicht zusammenhängend), so folgt unter den Voraussetzungen von Folgerung 4.4, dass f auf jeder Wegzusammenhangskomponente von Ω konstant ist. Häufig betrachtet man in der Funktionentheorie der Einfachheit halber nur auf Gebieten definierte Funktionen. Die entsprechenden Aussagen für den Fall, dass der Definitionsbereich offen, aber nicht zusammenhängend ist, enthält man dann in der Regel wieder sehr leicht.

Ist $f = (f_1, \dots, f_d)\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar, so folgt aus der Existenz eines Potentials, dass

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}$$

für alle $j, k \in \{1, \dots, d\}$, denn ist U ein Potential, so gilt mit dem Satz von Schwarz

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial U}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial U}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}.$$

Ist Ω sternförmig, das heißt, existiert $\xi \in \Omega$ so dass $[\xi, x] \subset \Omega$ für alle $x \in \Omega$, so folgt umgekehrt aus den so genannten Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \quad \text{für alle } j, k \in \{1, \dots, n\}$$

die Existenz eines Potentials. In der Tat ist durch

$$U(x) = \int_{[\xi,x]} \langle f(w), dw\rangle = \int_0^1 \langle f(\xi + t(x-\xi), x - \xi\rangle dt$$

ein Potential gegeben. (Dies war eine Übungsaufgabe der Analysis III.)

Sei nun $f = (u, v) = u + iv\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei f' stetig. Wir setzen

$$g = \overline{f} = (u, -v) = u - iv \quad \text{und} \quad h = i\overline{f} = (v, u) = v + iu.$$

Dann erfüllen g und h auf Grund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen die Integrabilitätsbedingungen, also

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(-v)}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Ist Ω sternförmig, so existieren Potentiale U und V von g und h, das heißt, es gilt $g = \operatorname{grad} U$ und $h = \operatorname{grad} V$. Sei nun

$$F = (U, V) = U + iV.$$

Dann ist F total differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial U}{\partial x} = u = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -v = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Damit ist F holomorph und es gilt

$$F' = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = u + iv = f.$$

Also ist F Stammfunktion von f.

Wir haben folgenden Satz bewiesen.

Satz 4.5. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sternförmiges Gebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei f' stetig. Dann hat f eine Stammfunktion.*

Alternativ hätte man zum Beweis des Satzes – analog zum oben angegebenen Integral für das Potential – eine Stammfunktion F auch direkt durch

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\xi) d\xi$$

definieren können, falls Ω sternförmig bezüglich z_0 ist. Dabei wird $[z_0, z]$ durch $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$, $\gamma(t) = z_0 + t(z - z_0)$, parametrisiert, also

$$F(z) = \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0) dt = \int_0^1 g(z,t) dt$$

mit

$$g(z,t) = f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0).$$

Mit dem Satz über Parameterintegrale aus Analysis III (vgl. Satz 6.3 unten) folgt

$$\frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}} = \int_0^1 \frac{\partial g(z,t)}{\partial \bar{z}} dt = \int_0^1 0 \, dt = 0$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(z)}{\partial z} &= \int_0^1 \frac{\partial g(z,t)}{\partial z} dt \\ &= \int_0^1 f'(z_0 + t(z - z_0)) t (z - z_0) + f(z_0 + t(z - z_0)) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(z_0 + t(z - z_0))t) dt \\ &= f(z). \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass F holomorph ist und $F' = f$ gilt.

Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass in Satz 4.5 auf die Voraussetzung der Stetigkeit von f' verzichtet werden kann. Insofern ist Satz 4.5 für den Aufbau der Funktionentheorie entbehrlich. Die obigen Argumente zeigen aber den Zusammenhang zu Sätzen der reellen Analysis über die Existenz von Potentialen.

Zunächst halten wir aber noch einige Resultate über Stammfunktionen fest.

Satz 4.6. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Dann hat f genau dann eine Stammfunktion, wenn $\int_\gamma f(z) dz = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in Ω.*

Beweis. Ist $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ geschlossener Integrationsweg, also $\gamma(a) = \gamma(b)$, und ist F Stammfunktion von f, so gilt nach Satz 4.3

$$\int_\gamma f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0.$$

Sei umgekehrt $\int_\gamma f(z) dz = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg γ. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass Ω wegzusammenhängend ist. (Sonst betrachten wir jede Wegzusammenhangskomponente separat.) Sei $z_0 \in \Omega$ fest. Wir definieren $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ durch

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta,$$

wobei γ_z ein Integrationsweg in Ω mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z ist. Dies ist wohldefiniert, denn ist γ_z^* ein weiterer Integrationsweg mit dieser Eigenschaft, so ist $\gamma_z - \gamma_z^*$ ein geschlossener Integrationsweg, also

$$0 = \int_{\gamma_z - \gamma_z^*} f(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta - \int_{\gamma_z^*} f(\zeta)d\zeta$$

und damit

$$\int_{\gamma_z^*} f(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta.$$

Sei nun $z \in \Omega$ und $r > 0$ mit

$$D(z,r) := \{\zeta \in \mathbb{C} \colon |\zeta - z| < r\} \subseteq \Omega.$$

Für $h \in \mathbb{C}$ mit $|h| < r$ gilt dann $[z, z+h] \subseteq \Omega$. Durch $\sigma \colon [0,1] \to \Omega$, $\sigma(t) = z + th$, ist eine Parametrisierung der Strecke $[z, z+h]$ gegeben. Da $\gamma_{z+h} - \sigma - \gamma_z$ geschlossener Integrationsweg ist, folgt

$$0 = \int_{\gamma_{z+h}} f(\zeta)d\zeta - \int_\sigma f(\zeta)d\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta = F(z+h) - h\int_0^1 f(z+th)dt - F(z)$$

und damit

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \int_0^1 f(z+th)dt - f(z) \right| \\ &= \left| \int_0^1 (f(z+th) - f(z))dt \right| \\ &\leq \max_{\zeta \in [z,z+h]} |f(\zeta) - f(z)|. \end{aligned}$$

Da f stetig ist, folgt

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z),$$

das heißt, F ist komplex differenzierbar und $F' = f$. Also ist F Stammfunktion von f. □

Ist Ω sternförmig bezüglich z_0, so kann man γ_z als (Parametrisierung der) Verbindungsstrecke von z_0 nach z wählen. Der Beweis zeigt, dass es reicht, die Voraussetzung $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für die Kurven γ zu machen, die Ränder von in Ω enthaltenen Dreiecken sind.

Damit erhalten wir folgendes Resultat.

Satz 4.7. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sternförmiges Gebiet und sei $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Dann hat f genau dann eine Stammfunktion, wenn $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck Δ in Ω gilt.*

Ein abgeschlossenes Dreieck ist dabei die konvexe Hülle dreier Punkte in $\mathbb{C}$. Während im obigen Satz die Orientierung des Randes keine Rolle spielt, werden wir im Folgenden bei (nicht zu einer Strecke degenerierten) Dreiecken die Parametrisierung des Randes immer mit positiver Orientierung wählen, also gegen den Uhrzeigersinn.

5 Das Lemma von Goursat

Wir wollen zeigen, dass in Satz 4.5 auf die Stetigkeit der Ableitung verzichtet werden kann. Wesentliches Hilfsmittel dabei ist folgendes Resultat.

Satz 5.1 (Lemma von Goursat). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

für jedes abgeschlossene Dreieck Δ in Ω.

Beweis. Wir zerlegen Δ durch Verbinden der Seitenmittelpunkte in vier Dreiecke $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \Delta^4$; vgl. Abbildung 3.

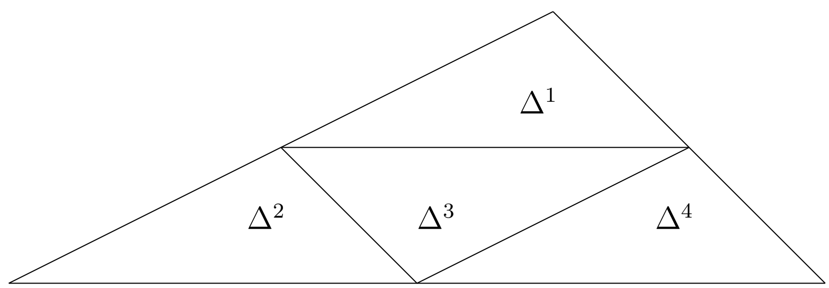

Abbildung 3: Unterteilung eines Dreiecks Δ in Dreiecke $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \Delta^4$.

Es gilt dann

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial\Delta^k} f(z)dz,$$

also

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \leq \sum_{k=1}^{4} \left|\int_{\partial\Delta^k} f(z)dz\right| \leq 4 \max_{k=1,\dots,4} \left|\int_{\partial\Delta^k} f(z)dz\right|.$$

Damit existiert $k_1 \in \{1,\dots,4\}$ mit

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \leq 4 \left|\int_{\partial\Delta^{k_1}} f(z)dz\right|.$$

Wir setzen $\Delta_1 = \Delta^{k_1}$ und zerlege Δ_1 in vier Dreiecke $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \Delta_1^3, \Delta_1^4$. Eines dieser vier Dreiecke, welches wir mit Δ_2 bezeichnen, erfüllt

$$\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)dz\right| \leq 4 \left|\int_{\partial\Delta_2} f(z)dz\right|.$$

Wir erhalten induktiv eine Folge (Δ_k) von Dreiecken mit $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$ und

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \leq 4^n \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right|,$$

wobei die Länge $L(\partial\Delta_n)$ des Randes

$$L(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2}L(\partial\Delta_{n-1}) = \cdots = \frac{1}{2^n}L(\partial\Delta)$$

erfüllt.

Da die Δ_n kompakt sind und $\Delta_{n+1} \subset \Delta_n$ für alle $n \in N$ gilt, ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$ nicht leer. Wegen $L(\partial\Delta_n) \to 0$ besteht der Schnitt nur aus einem Punkt, das heißt, es gilt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = \{z_0\}$$

für ein $z_0 \in \Delta \subset \Omega$.

Nach Definition der komplexen Differenzierbarkeit (siehe Lemma 1.2) existiert nun $r\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z)$$

und $r(z) = o(|z - z_0|)$ für $z \to z_0$. Damit hat r die Form $r(z) = (z - z_0)\eta(z)$ wobei $\lim_{z\to z_0} \eta(z) = 0 = \eta(z_0)$. Nun gilt

$$\int_{\partial\Delta_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))dz = 0,$$

denn

$$z \mapsto f(z_0)z + \frac{1}{2}f'(z_0)(z - z_0)^2$$

ist Stammfunktion des Integranden. Es folgt, dass

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_n} r(z)dz,$$

also

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right| &= \left|\int_{\partial\Delta_n} (z - z_0)\eta(z)dz\right| \\ &\leq L(\partial\Delta_n) \max_{z\in\partial\Delta_n} |(z - z_0)\eta(z)| \\ &\leq L(\partial\Delta_n)^2 \max_{z\in\partial\Delta_n} |\eta(z)|.\end{aligned}$$

Dies liefert

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| &\leq 4^n \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right| \\ &\leq 4^n L(\partial\Delta_n)^2 \max_{z\in\partial\Delta_n} |\eta(z)| \\ &= L(\partial\Delta)^2 \max_{z\in\partial\Delta_n} |\eta(z)|.\end{aligned}$$

Mit $n \to \infty$ folgt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0. \qquad \square$$

Eine einfache Folgerung ist nun das nächste Resultat.

Satz 5.2 (Cauchyscher Integralsatz für sternförmige Gebiete). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sternförmiges Gebiet und sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg in Ω.*

Beweis. Nach Satz 5.1 gilt $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck Δ in Ω. Nach Satz 4.7 hat f damit eine Stammfunktion. Hieraus folgt aber die Behauptung mit Satz 4.6. □

Wir werden noch die folgende, geringfügig stärkere Version des Lemmas von Goursat benötigen.

Satz 5.3. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in \Omega$. Es sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Weiter sei f holomorph in $\Omega \setminus \{z_0\}$. Dann gilt*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

für jedes abgeschlossene Dreieck Δ in Ω. Ist Ω sternförmig, so gilt auch

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in Ω.

Beweis. Die zweite Behauptung folgt wie in Beweis von Satz 5.2 aus der ersten. Sei Δ abgeschlossenes Dreieck in Ω. Die Behauptung

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

folgt aus dem Lemma von Goursat, falls $z_0 \notin \Delta$.

Sei im Folgenden also $z_0 \in \Delta$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass z_0 Eckpunkt von Δ ist. Wir zerlegen Δ in drei Teildreiecke Δ_1, Δ_2 und Δ_3, wobei z_0 Eckpunkt von Δ_1 ist, und für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ die Seitenlängen von Δ_1 kleiner als ε sind; vgl. Abbildung 4.

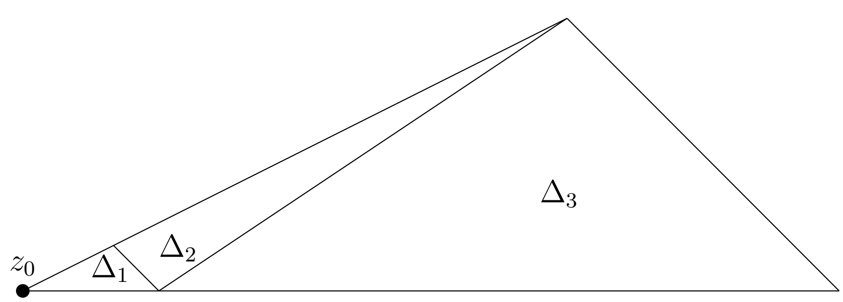

Abbildung 4: Unterteilung eines Dreiecks, dass z_0 als Eckpunkt hat.

Es gilt nach Lemma von Goursat dann

$$\int_{\partial\Delta_2} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_3} f(z)dz = 0.$$

Damit gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial\Delta_j} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz.$$

Nun gilt

$$\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)dz\right| \leq L(\partial\Delta_1) \max_{z\in\Delta_1} |f(z)| \leq 3\varepsilon \max_{z\in\Delta} |f(z)|.$$

Da so eine Unterteilung von Δ für jedes $\varepsilon > 0$ gefunden werden kann, folgt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz = 0.$$

Ist $z_0 \in \Delta$, aber z_0 kein Eckpunkt von Δ, so unterteilt man Δ in Dreiecke, die z_0 als Eckpunkt haben (vgl. Abbildung 5), und wendet das bereits Bewiesene auf diese an. □

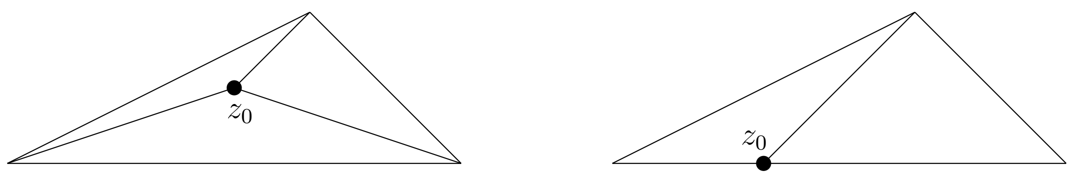

Abbildung 5: Unterteilung eines Dreiecks, welches z_0 enthält, in kleinere Dreiecke, welche z_0 als Eckpunkt haben.

6 Die Cauchy-Integralformel

Satz 6.1 (Cauchy-Integralformel). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei $z_0 \in \Omega$ und $r > 0$ mit $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$. Für $z \in D(z_0, r)$ gilt dann*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Beweis. Zunächst existiert $R > r$ mit $D(z_0, R) \subseteq \Omega$. Sei $z \in D(z_0, r)$ fest und sei $g\colon D(z_0, R) \to \mathbb{C}$,

$$g(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \neq z, \\ f'(z), & \zeta = z. \end{cases}$$

Dann ist g stetig in $D(z_0, R)$ und holomorph in $D(z_0, R)\backslash\{z\}$. Satz 5.3 liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{|\zeta - z_0| = r} g(\zeta)d\zeta \\ &= \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - f(z) \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \end{aligned}$$

Nun gilt wegen $|z - z_0| < r = |\zeta - z_0|$, dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0 + z_0 - z} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0}\left(\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}\right) \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}},\end{aligned}$$

wobei die Reihe gleichmäßig konvergiert. Die Integrale

$$\int_{|\zeta - z_0| = r}\frac{d\zeta}{(\zeta - z_0)^m}$$

wurden bereits berechnet. Sie haben den Wert 0 für $m \in \mathbb{Z}\backslash\{1\}$ und den Wert $2\pi i$ für $m = 1$. Es folgt

$$\int_{|\zeta - z_0| = r}\frac{d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty}(z - z_0)^k\int_{|\zeta - z_0| = r}\frac{d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}} = 2\pi i.$$

Die Behauptung folgt. □

Wir ziehen einige wichtige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel.

Satz 6.2. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \Omega$ und $R > 0$ mit $D(z_0, R) \subseteq \Omega$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, so dass*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für alle $z \in D(z_0, R)$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $0 < r < R$ gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta.$$

Beweis. Für $0 \leq |z - z_0| < r$ folgt mit der Cauchyschen Integralformel und der Reihenentwicklung von $1/(\zeta - z)$ aus dem vorigen Beweis, dass

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = r} f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right)(z - z_0)^n.\end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit wurde im Wesentlichen bereits in Analysis I/II bewiesen (siehe Satz 5.26 der Vorlesung von Herrn Nieß). Man erhält sie auch aus Folgerung 6.5 unten.

Alternativ schließt man wie folgt: Konvergiert die Potenzreihe in $D(z_0, R)$, so konvergiert Sie gleichmäßig auf $\partial D(z_0, r)$ und es gilt

$$\begin{aligned}\int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta &= \int_{|\zeta - z_0|=r} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\zeta - z_0)^k \frac{1}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{|\zeta - z_0|=r} a_k (\zeta - z_0)^{k-n-1} d\zeta \\ &= 2\pi i a_n. \end{aligned}$$

□

Als Nächstes halten wir fest, dass der Satz aus Analysis III über die Differenzierbarkeit von Parameterintegralen auch für komplexe Differenzierbarkeit gilt. Wir benötigen dieses Ergebnis in der folgenden Form.

Satz 6.3. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, γ Integrationsweg in $\mathbb{C}$ und $f \colon \Omega \times \mathrm{Sp}(\gamma) \to \mathbb{C}$ stetig. Für alle $\zeta \in \mathrm{Sp}(\gamma)$ sei die durch $z \mapsto f(z, \zeta)$ gegebene Funktion holomorph in Ω und*

$$(z, \zeta) \mapsto \frac{\partial}{\partial z} f(z, \zeta)$$

sei stetig in $\Omega \times \mathrm{Sp}(\gamma)$. Dann ist

$$F \colon \Omega \to \mathbb{C}, \quad F(z) = \int_{\gamma} f(z, \zeta) d\zeta$$

holomorph und es gilt

$$F'(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial z} f(z, \zeta) d\zeta.$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass F in jeder Kreisscheibe D mit $\overline{D} \subset \Omega$ holomorph ist und dort die Formel für F' gilt. Sei D so eine Kreisscheibe. Da $\overline{D} \times \mathrm{Sp}(\gamma)$ kompakt ist, ist f dort beschränkt. Damit ist F nach dem Satz aus Analysis III über Stetigkeit von Parameterintegralen stetig in D.

Wegen

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f(z, \zeta) = 0$$

für $(z, \zeta) \in \Omega \times \mathrm{Sp}(\gamma)$ sind auch die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = i \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \right)$$

stetig in $\Omega \times \mathrm{Sp}(\gamma)$, also ebenfalls beschränkt in $\overline{D} \times \mathrm{Sp}(\gamma)$. Nach dem Satz über Differentiation von Parameterintegralen ist F damit partiell differenzierbar in D mit

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial x}(z, \zeta) d\zeta \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial y}(z, \zeta) d\zeta.$$

Außerdem sind die partiellen Ableitungen von F stetig in D und es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(z) + i\frac{\partial F}{\partial y}(z)\right)\\ &= \int_\gamma \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z,\zeta) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z,\zeta)\right) d\zeta\\ &= \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z,\zeta)d\zeta\\ &= \int_\gamma 0\ d\zeta = 0.\end{aligned}$$

Damit ist F holomorph in D. Die angegebene Formel für F' ergibt sich analog. $\square$

Satz 6.4. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f beliebig oft komplex differenzierbar und alle Ableitungen sind ebenfalls holomorph. Sind $z_0 \in \Omega$ und $r > 0$ mit $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$, so gilt*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta$$

für $z \in D(z_0, r)$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion über n. Der Fall $n = 0$ ist gerade die Cauchysche Integralformel. Sei also $n \in \mathbb{N}_0$ und f sei n-mal komplex differenzierbar, mit der angegebenen Formel für $f^{(n)}$. Da

$$z \mapsto \frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

für alle $\zeta \in \partial D(z_0, r)$ holomorph in $D(z_0, r)$ ist, mit

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}}\right) = \frac{n+1}{(\zeta - z)^{n+2}},$$

folgt aus Satz 6.3, dass $f^{(n)}$ komplex differenzierbar ist, mit

$$f^{(n+1)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}}\right) d\zeta = \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}}d\zeta$$

für $z \in D(z_0, r)$. $\square$

Folgerung 6.5. Die Koeffizienten a_n in Satz 6.2 haben die Form

$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0).$$

Der folgende Satz ist eine Umkehrung des Lemmas von Goursat.

Satz 6.6 (Satz von Morera). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Gilt*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

für jedes abgeschlossene Dreieck Δ in Ω, so ist f holomorph.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass für jede Kreisscheibe D in Ω die Funktion $f|_D$ holomorph ist. Nach Satz 4.7 hat $f|_D$ eine Stammfunktion F. Nach Satz 6.4 ist $f|_D = F'$ holomorph. □

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 5.3 und Satz 6.6 ist der folgende Satz.

Satz 6.7. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Ist f holomorph in $\Omega \backslash \{z_0\}$, so ist f holomorph in Ω.*

Satz 6.8 (Satz von Weierstraß). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei (f_k) eine Folge in Ω holomorpher Funktionen, die auf jeder kompakten Teilmenge von Ω gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ konvergiert.*

Dann ist f holomorph und für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert $(f_k^{(n)})$ auf jeder kompakten Teilmenge von Ω gleichmäßig gegen $f^{(n)}$.

Beweis. Nach Analysis I/II ist der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen stetig. Es folgt, dass die Einschränkung von f auf jede kompakte Teilmenge von Ω stetig ist. Damit ist f aber auch stetig in Ω.

Die Holomorphie von f zeigen wir mit Hilfe des Satzes von Morera. Sei dazu Δ abgeschlossenens Dreieck in Ω. Da $\partial\Delta$ kompakt ist, konvergiert $(f_k|_{\partial\Delta})$ gleichmäßig gegen $f|_{\partial\Delta}$. Es folgt, dass

$$\int_{\partial\Delta} f_k(z)dz \to \int_{\partial\Delta} f(z)dz.$$

Da $\int_{\partial\Delta} f_k(z)dz = 0$ nach Lemma von Goursat, folgt $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$. Der Satz von Morera liefert jetzt, dass f holomorph ist.

Sei nun $z_0 \in \Omega$ und $r > 0$ mit $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$. Nach Satz 6.4 gilt

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad \text{und} \quad f_k^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

für $z \in D(z_0, r)$. Für $z \in D(z_0, r/2)$ folgt

$$\begin{aligned} \left| f_k^{(n)}(z) - f^{(n)}(z) \right| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f_k(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \right| \\ &\le \frac{n!}{2\pi} 2\pi r \max_{|\zeta - z_0| = r} \frac{|f_k(\zeta) - f(\zeta)|}{|\zeta - z|^{n+1}} \\ &\le \frac{2^{n+1} n!}{r^n} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f_k(\zeta) - f(\zeta)|. \end{aligned}$$

Es folgt, dass $(f_k^{(n)})$ auf $D(z_0, r/2)$ für $k \to \infty$ gleichmäßig gegen $f^{(n)}$ konvergiert. Da eine kompakte Teilmenge von Ω durch endlich viele Kreisscheiben $D(z_j, r_j)$, $j = 1, \ldots, N$, mit $\overline{D(z_j, r_j)} \subset \Omega$ überdeckt werden kann, folgt die Behauptung. □

In Satz 6.3 haben wir gezeigt, dass holomorphe Funktionen in Potenzreihen entwickelt werden können. Aus dem Satz von Weierstraß folgt unmittelbar, dass umgekehrt durch Potenzreihen gegebene Funktionen auch holomorph sind, das heißt, wir erhalten folgendes Resultat.

Folgerung 6.9. Sei

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r, wobei $0 < r \leq \infty$. Dann ist die Funktion

$$f \colon D(z_0, r) \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

holomorph und es gilt

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$$

für $z \in D(z_0, r)$. (Dabei ist $D(z_0, \infty) = \mathbb{C}$.)

Folgerung 6.9 zeigt insbesondere, dass die Exponentialfunktion $\exp \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$\exp z = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k,$$

holomorph ist und $\exp' = \exp$ gilt. Dies sieht man aber auch leicht anders ein, etwa mit Hilfe der Funktionalgleichung $e^{z+h} = e^z e^h$, welche

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^z$$

liefert, oder auch mit der Darstellung $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ und den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

Ebenso sind

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$

und

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

holomorph in $\mathbb{C}$.

Wir fassen die bisherigen Ergebnisse zusammen. Dabei sagen wir, dass eine Eigenschaft einer Funktion f *lokal* gilt, falls jeder Punkt des Definitionsbereichs eine Umgebung U hat, so dass die Eigenschaft für $f|_U$ gilt.

Für $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und stetiges $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ sind dann die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) f ist holomorph;

(b) jeder Punkt von Ω hat eine Umgebung U, so dass $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in U;

(c) f hat lokal eine Stammfunktion;

(d) f ist lokal in eine Potenzreihe entwickelbar;

(e) f ist stetig partiell differenzierbar und genügt den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen.

Es ist eine nützliche Übung, sich zu überlegen, aus welchen Sätzen die einzelnen Implikationen folgen.

7 Der Identitätssatz

Häufig werden wir uns auf holomorphe Funktionen auf Gebieten, also (weg-)zusammenhängenden offenen Teilmengen beschränken. Ein Grund dafür ist Folgerung 4.4, welche besagt, dass eine in einem Gebiet holomorphe Funktion konstant ist, wenn die Ableitung verschwindet. Auch im folgenden Satz wird benötigt, dass der Definitionsbereich zusammenhängend ist.

Satz 7.1. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph. Gilt $f(z) = 0$ für alle z aus einer nichtleeren, offenen Teilmenge von G, so gilt $f(z) \equiv 0$.*

Beweis. Sei W nichtleere, offene Teilmenge von G mit $f(z) = 0$ für alle $z \in W$. Sei

$$U = \left\{ z \in G\colon f^{(k)}(z) = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Dann ist $U \neq \emptyset$, da $W \subseteq U$. Weiter ist U abgeschlossen, da alle $f^{(k)}$ stetig sind. Andererseits ist U offen, da für $z_0 \in U$ und $r > 0$ mit $D(z_0, r) \in G$ in $D(z_0, r)$ eine Potenzreihenentwicklung existiert, wobei sämtliche Koeffizienten 0 sind, also $f(z) = 0$ für alle $z \in D(z_0, r)$ gilt. Da G zusammenhängend ist, folgt wegen $U \neq \emptyset$, dass $U = G$. $\square$

Folgerung 4.4 und Satz 7.1 gelten natürlich nicht in unzusammenhängenden offenen Mengen, man betrachte etwa das Beispiel $G = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ und die Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$, $f(z) = 1$ für $\operatorname{Im} z > 0$ und $f(z) = 0$ für $\operatorname{Im} z < 0$.

Satz 7.2. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$. Ist $f(z) \not\equiv 0$, so existiert $n \in \mathbb{N}_0$ mit $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Sei $N = \min\{n \in \mathbb{N}_0\colon f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$. Dann existiert eine holomorphe Funktion $g\colon G \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = (z - z_0)^N g(z)$ für $z \in G$ und $g(z_0) \neq 0$.*

Beweis. Sei $r > 0$ mit $D(z_0, r) \subseteq G$. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für $z \in D(z_0, r)$, mit $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$.

Wäre $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so wäre $f(z) = 0$ für $z \in D(z_0, r)$, nach Satz 7.1 also $f(z) \equiv 0$. Damit gilt $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Mit N wie im Satz definiert folgt

$$f(z) = (z - z_0)^N \sum_{n=N}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-N} = (z - z_0)^N \sum_{k=0}^{\infty} a_{N+k} (z - z_0)^k,$$

wobei $a_N = f^{(N)}(z_0)/N! \neq 0$. Die Reihe rechts konvergiert in $D(z_0, r)$. Es folgt

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^N} = a_N.$$

Damit ist die durch

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^N}, & z \in G \setminus \{z_0\}, \\ a_N, & z = z_0, \end{cases}$$

definierte Funktion g stetig in G und holomorph in $G \setminus \{z_0\}$, nach Satz 6.7 also holomorph in G. Wegen $g(z_0) = a_N \neq 0$ hat g die verlangten Eigenschaften. □

Bemerkung. Seien f, G, z_0 wie in Satz 7.2. Gilt $N \geq 1$, so ist $f(z_0) = 0$. Dann heißt z_0 *Nullstelle* und N heißt *Ordnung* oder *Vielfachheit* der Nullstelle. Allgemeiner heißt für $a \in \mathbb{C}$ der Punkt $z_0 \in G$ eine a-Stelle der Ordnung N, falls z_0 eine N-fache Nullstelle von $f - a$ ist.

Satz 7.3 (Isoliertheit der a-Stellen). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph und $a \in \mathbb{C}$. Ist $f(z) \not\equiv a$, so hat die Menge der a-Stellen von f keinen Häufungspunkt in G.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $a = 0$. Sei $f(z) \not\equiv 0$ und sei $z_0 \in G$ Häufungspunkt der Nullstellen von f. Da f stetig ist, gilt auch $f(z_0) = 0$. Nach Satz 7.2 existieren eine holomorphe Funktion $g\colon G \to \mathbb{C}$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $f(z) = (z - z_0)^N g(z)$ für $z \in G$ und $g(z_0) \neq 0$. Da g stetig ist, existiert eine Umgebung U von z_0 mit $g(z) \neq 0$ für $z \in U$. Es folgt $f(z) \neq 0$ für $z \in U \setminus \{z_0\}$. Damit ist z_0 kein Häufungspunkt der Nullstellen. Das ist ein Widerspruch. □

Bemerkungen. 1. Sei M eine Teilmenge eines metrischen Raumes X und $x \in M$. Dann heißt x *isoliert* (oder *isolierter Punkt* von M), falls x kein Häufungspunkt von $M \setminus \{x\}$ ist. Besteht M nur aus isolierten Punkten, so heißt M *diskret*. Dabei kann M durchaus Häufungspunkte in $X \setminus M$ haben; vgl. auch die folgende Bemerkung.

Satz 7.3 besagt, dass die a-Stellen eine diskrete Teilmenge von G bilden, außer wenn $f(z) \equiv a$ gilt.

2. Die a-Stellen können sich durchaus in ∂G häufen, etwa für $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \sin(\pi/z)$ gilt $f(1/k) = 0$, und es gilt $1/k \to 0 \in \partial G$.

Satz 7.4 (Identitätssatz). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet und seien $f, g\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph. Hat $\{z \in G\colon f(z) = g(z)\}$ einen Häufungspunkt in G, so gilt $f = g$.*

Beweis. Man wende Satz 7.3 auf $f - g$ und $a = 0$ an. □

Bemerkung. Satz 7.4 zeigt, dass eine Gleichung zwischen holomorphen Funktionen (z.B. eine Funktionalgleichung oder Differentialgleichung), die auf einer „kleinen“ Menge gilt, auch in einem größeren Gebiet gilt.

Beispiele. 1. Für $x \in [-1, 1]$ gilt

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Wir betrachten nun die durch

$$z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1}$$

definierte Funktion $f\colon D(0,1) \to \mathbb{C}$. Es gilt

$$\tan f(x) = \tan(\arctan x)) = x \quad \text{für } x \in (-1, 1).$$

Sei $P = \{(2k+1)\pi/2\colon k \in \mathbb{Z}\}$. Nach Identitätssatz ist

$$\left\{ z \in D(0,1) : f(z) = \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi \right\}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ diskrete Teilmenge von $D(0,1)$. Hieraus folgt mit der Stetigkeit von f leicht, dass auch $f^{-1}(P) = \{z \in D(0,1) : f(z) \in P\}$ diskrete Teilmenge von $D(0,1)$ ist. Insbesondere ist $D(0,1)\backslash f^{-1}(P)$ zusammenhängend. Da $\tan\colon \mathbb{C}\backslash P \to \mathbb{C}$ holomorph ist, folgt mit Identitätssatz

$$\tan f(z) = z \quad \text{für } z \in D(0,1)\backslash f^{-1}(P).$$

Die linke Seite ist in der Umgebung von Punkten von $f^{-1}(P)$ unbeschränkt, während die rechte beschränkt ist. Es folgt, dass $f^{-1}(P) = \emptyset$, also

$$\tan f(z) = z \quad \text{für } z \in D(0,1).$$

2. Wir hatten (als Beispiel zu den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen) gesehen, dass die durch

$$f(x+iy) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + i \arctan \frac{y}{x}$$

definierte Funktion $f\colon \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > 0\} \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Für $x > 0$ gilt $f(x) = \frac{1}{2}\log(x^2) = \log x$ und daher $\exp f(x) = x$. Nach Identitätssatz folgt $\exp f(z) = z$ für $\operatorname{Re} z > 0$.

In Polarkoordinaten hat f die Form

$$f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2} \log(r^2) + i\varphi = \log r + i\varphi,$$

für $r > 0$ und $|\varphi| < \pi/2$. Tatsächlich kann man f so für $|\varphi| < \pi$, also in $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ definieren. Die so erhaltene Funktion $f\colon \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ heißt *Hauptzweig des Logarithmus* und wird mit Log bezeichnet. Es ist also $\operatorname{Log}(re^{i\varphi}) = \log r + i\varphi$ für $r > 0$ und $-\pi < \varphi < \pi$.

Es gilt dann

$$\exp(\operatorname{Log} z) = z \quad \text{für } z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0],$$

wie man zum einen wieder mit dem Identitätssatz sieht, zum andern aber auch direkt nachrechnen kann.

Umgekehrt findet man

$$\operatorname{Log}(\exp z) = z \quad \text{für } |\operatorname{Im} z| < \pi.$$

Für andere $z \in \mathbb{C}$ gilt diese Gleichung aber nicht, beispielsweise ist $\operatorname{Log}(\exp(2\pi i)) = \log 1 = 0 \neq 2\pi i$.

Ist $k \in \mathbb{Z}$ und $g(z) = \operatorname{Log} z + 2\pi i k$, so gilt ebenfalls

$$\exp(g(z)) = z.$$

Man nennt solche Funktionen g auch Zweige des Logarithmus. Der Hauptzweig ist der mit $k = 0$.

8 Der Satz von Liouville

Satz 8.1 (Cauchy-Ungleichung). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $\overline{D(z_0, r)} \subset G$, $M \geq 0$ und $|f(z)| \leq M$ für $z \in \partial D(z_0, r)$. Dann gilt*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}$$

für alle $n \geq 0$.

Beweis. Es gilt nach Cauchy-Integralformel

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

also

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi r \, \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{n!M}{r^n}. \qquad \square$$

Bemerkung. Für die Koeffizienten a_n der Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

folgt unter den Voraussetzungen von Satz 8.1, dass

$$|a_n| = \frac{|f^n(z_0)|}{n!} \leq \frac{M}{r^n}.$$

Außerdem folgt unter den Voraussetzungen von Satz 8.1 für $z \in D(z_0, r)$, dass

$$|f^{(n)}(z)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{2\pi r M}{(r - |z - z_0|)^{n+1}} = \frac{n! r M}{(r - |z - z_0|)^{n+1}}$$

gilt, für $z \in D(z_0, r/2)$ etwa

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! \; 2^{n+1} M}{r^n}.$$

Auch diese Abschätzungen von a_n und $f^{(n)}(z)$ werden als Cauchy-Ungleichung bezeichnet.

Definition 8.2. Eine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion heißt *ganze Funktion*. Sie heißt *transzendent*, wenn sie kein Polynom ist.

Ist f ganz, so hat f eine in ganz $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Beispiele sind die Exponentialfunktion sowie Cosinus und Sinus. Offensichtlich ist eine ganze Funktion genau dann transzendent, wenn in der Potenzreihenentwicklung unendlich viele Koeffizienten von Null verschieden sind.

Satz 8.3. *Sei f ganz. Es gebe $A, B, C \geq 0$ mit*

$$|f(z)| \leq A + B|z|^C$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann ist f ein Polynom und es gilt $\mathrm{Grad}(f) \leq C$.

Beweis. Sei

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

die Potenzreihenentwicklung von f. Sei $r > 0$ und

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Dann gilt

$$M(r) \leq A + Br^C.$$

Aufgrund der Cauchy-Ungleichung (und der darauf folgenden Bemerkung) gilt

$$|a_k| \leq \frac{M(r)}{r^k} \leq \frac{A + Br^C}{r^k}$$

für alle r.

Für $k > C$ gilt nun

$$\lim_{r \to \infty} \frac{A + Br^C}{r^k} = 0.$$

Es folgt $a_k = 0$ für $k > C$. Die Behauptung folgt. □

Folgerung 8.4 (Satz von Liouville). Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Eine Anwendung des Satzes von Liouville ist das folgende Resultat.

Satz 8.5 (Fundamentalsatz der Algebra). *Sei $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein nichtkonstantes Polynom. Dann hat p eine Nullstelle (in $\mathbb{C}$).*

Zum Beweis benötigen wir folgendes Resultat.

Lemma 8.6. *Sei p ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$, also*

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad \text{für } z \in \mathbb{C},$$

mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $R > 0$ mit

$$(1-\varepsilon)|a_n||z|^n \leq |p(z)| \leq (1+\varepsilon)|a_n||z|^n \quad \text{für } |z| \geq R.$$

Beweis. Für $|z| \geq 1$ gilt

$$\left| \left| \frac{p(z)}{a_n z^n} \right| - 1 \right| \leq \left| \frac{p(z)}{a_n z^n} - 1 \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} z^{k-n} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right| |z|^{k-n} \leq \frac{1}{|z|} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right|.$$

Für

$$|z| \geq R := \max \left\{ 1, \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right| \right\}$$

ist die rechte Seite kleiner als ε, und die Behauptung folgt. □

Beweis von Satz 8.5. Sei $n = \mathrm{Grad}(p)$, also

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad \text{wobei } a_n \neq 0,\ n \geq 1.$$

Wir nehmen an, dass p keine Nullstelle hat. Dann ist $f = 1/p$ ganz. Mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und R wie im Hilfssatz gilt

$$|f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} \leq \frac{1}{\frac{1}{2}|a_n||z|^n} \leq \frac{2}{|a_n|R^n}$$

für $|z| \geq R$. Als stetige Funktion ist f auch auf $\overline{D(0,R)}$ beschränkt, also ist f beschränkt auf $\mathbb{C}$.

Nach dem Satz von Liouville ist f also konstant. Damit ist auch p konstant, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Bemerkung. Ist p ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ und z_1 eine Nullstelle von p, so existiert nach Satz 7.2 eine ganze Funktion p_1 mit $p(z) = (z - z_1)p_1(z)$ für $z \in \mathbb{C}$. Es ist leicht zu sehen, dass p_1 ein Polynom ist, und zwar vom Grad $n-1$. Induktiv erhält man so, dass $z_1, \dots, z_n, c \in \mathbb{C}$ existieren, so dass

$$p(z) = c(z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$$

für $z \in \mathbb{C}$. Die z_j müssen dabei nicht voneinander verschieden sein.

9 Das Maximumprinzip

Satz 9.1 (Mittelwerteigenschaft). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph und $\overline{D(z_0, r)} \subset G$. Dann gilt*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Beweis. Nach Cauchy-Integralformel gilt

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

□

Satz 9.2 (Maximumprinzip). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$. Es gelte $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in G$, also*

$$|f(z_0)| = \max_{z \in G} |f(z)|.$$

Dann gilt $f(z) = f(z_0)$ für alle $z \in G$, das heißt, f ist konstant.

Beweis. Sei $R > 0$ mit $D(z_0, R) \subseteq G$. Wir nehmen an, dass $z_1 \in D(z_0, R)$ mit

$$|f(z_1)| < |f(z_0)|$$

existiert. Sei etwa $z_1 = z_0 + re^{i\theta_0}$. Dann existieren $\delta, \varepsilon > 0$ mit $\delta < \pi$, so dass

$$|f(z_0 + re^{i\theta})| < |f(z_0)| - \varepsilon \quad \text{für } |\theta - \theta_0| < \delta.$$

Es folgt mit der Mittelwerteigenschaft, dass

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \delta} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0 + \delta}^{\theta_0 + 2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \delta(|f(z_0)| - \varepsilon) + \frac{1}{2\pi}(2\pi - \delta)|f(z_0)| \\ &= |f(z_0)| - \frac{\delta\varepsilon}{2\pi}. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch. Es folgt $|f(z)| = |f(z_0)|$ für $z \in D(z_0, R)$. Hieraus folgt $f(z) = f(z_0)$ für $z \in D(z_0, R)$ nach Übung. Mit Satz 7.1 folgt die Behauptung. □

Folgerung 9.3. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ beschränktes Gebiet, $f\colon \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig und $f|_G$ holomorph. Dann gilt

$$\max_{z \in \overline{G}} |f(z)| = \max_{z \in \partial G} |f(z)|,$$

also

$$|f(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)| \quad \text{für alle } z \in G.$$

Bemerkungen. 1. Man beachte, dass die Maxima existieren, da $\overline{G}$ und ∂G kompakt sind und f stetig ist.

2. Die Folgerung gilt nicht für unbeschränkte Gebiete. Man betrachte etwa $G = \{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Re} z > 0\}$ und $f = \exp|_G$. Dann gilt $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \partial G$, aber f ist unbeschränkt.

Satz 9.4 (Minimumprinzip). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$. Es gelte $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ für alle $z \in G$, also*

$$|f(z_0)| = \min_{z \in G} |(f(z)|.$$

Dann gilt $f(z) = f(z_0)$ für alle $z \in G$ oder $f(z_0) = 0$.

Beweis. Ist $f(z_0) \neq 0$, so gilt $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$. Damit ist $1/f$ holomorph. Die Anwendung des Maximumprinzips auf $1/f$ liefert die Behauptung. □

Folgerung 9.5. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ beschränktes Gebiet, $f\colon \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig und $f|_G$ holomorph. Existiert $z_0 \in G$ mit

$$|f(z_0)| < \min_{z \in \partial G} |f(z)|,$$

so hat f eine Nullstelle in G.

Bemerkung. Diese Folgerung liefert auch einen einfachen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Beispiel. Die durch $z \mapsto z^4 + e^z$ gegebene Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat eine Nullstelle in $D(0,2)$, denn für $|z| = 2$ gilt

$$|z^4 + e^z| \geq |z|^4 - |e^z| \geq 16 - e^2 > 1 = |f(0)|.$$

Spätere Sätze werden zeigen, dass f genau 4 Nullstellen in $D(0,2)$ hat.

Satz 9.6 (Prinzip der Gebietstreue). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet und sei $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann ist $f(G)$ ein Gebiet.*

Beweis. Da G (weg)zusammenhängend und f stetig ist, ist $f(G)$ (weg)zusammenhängend. Zu zeigen ist, dass $f(G)$ offen ist. Sei dazu $w_0 = f(z_0) \in f(G)$, mit $z_0 \in G$. Wegen der Isoliertheit der w_0-Stellen existiert $r > 0$ mit $\overline{D(z_0, r)} \subset G$ und $f(z) \neq w_0$ für $z \in \overline{D(z_0, r)} \setminus \{z_0\}$. Sei

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{|z - z_0| = r} |f(z) - w_0|.$$

Für $w \in D(w_0, \varepsilon)$ und $|z - z_0| = r$ gilt dann

$$\begin{aligned}
|f(z) - w| &= |f(z) - w_0 + w - w_0| \\
&\geq |f(z) - w_0| - |w - w_0| \\
&\geq 2\varepsilon - \varepsilon \\
&= \varepsilon \\
&> |f(z_0) - w|.
\end{aligned}$$

Das Minimumprinzip (bzw. die Folgerung daraus) liefert jetzt, dass die durch $z \mapsto f(z) - w$ definierte Funktion eine Nullstelle in $D(z_0, r)$ hat. Also hat f eine w-Stelle dort. Dies liefert $D(w_0, \varepsilon) \subseteq f(G)$. Also ist $f(G)$ offen. □

Bemerkungen. 1. Wir haben das Prinzip der Gebietstreue aus dem Maximum- bzw. Minimumprinzip hergeleitet. Es geht auch umgekehrt (siehe etwa das Buch von Fischer-Lieb).

2. Sofort folgt aus dem Prinzip der Gebietstreue auch dass f konstant ist, falls $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ oder $|f|$ konstant ist.

3. Seien X und Y metrische Räume und sei $f\colon X \to Y$. Dann heißt f *offen*, falls für jede offene Teilmenge U von X auch $f(U)$ offen ist. Aus dem Satz über Gebietstreue folgt, dass holomorphe Funktionen offene Abbildungen sind.

Zum Vergleich sei daran erinnert, dass $f\colon X \to Y$ stetig ist, wenn für jedes offene V in Y auch $f^{-1}(V)$ offen ist.

10 Die Windungszahl

Ist G sternförmiges Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt nach Cauchy-Integralsatz

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

für jeden geschlossener Integrationsweg γ in G. Nach Satz 4.6 ist dies äquivalent zur Existenz einer Stammfunktion.

Wir untersuchen, unter welchen Voraussetzungen an G und γ obige Gleichung gilt. Ganz ohne Voraussetzungen gilt dies nicht, wie das bereits zu Beginn von Abschnitt 3 diskutierte Beispiel $G = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $f(z) = 1/z$ und $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$, zeigt. Hier gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} = 2\pi i \neq 0.$$

Die entscheidende Voraussetzung wird sein, dass das „Innere“ der Kurve γ im G liegt. Um dies zu präzisieren, benötigen wir zunächst eine Definition.

Definition 10.1. Sei γ geschlossener Integrationsweg und $z \in \mathbb{C}\backslash\mathrm{Sp}(\gamma)$. Dann heißt

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

Windungszahl (oder *Umlaufzahl* oder *Index*) der Kurve γ bezüglich des Punktes z.

Wir werden später sehen, dass $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$ gilt. Zur Interpretation der Windungszahl betrachten wir eine geschlossene Kurve $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$, die in der Form $\gamma(t) = z + \varrho(t)e^{i\varphi(t)}$ mit stückweise stetig differenzierbaren Funktionen $\varrho\colon [a, b] \to (0, \infty)$ und $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben ist. Aus $\gamma(a) = \gamma(b)$ folgt $\varrho(a) = \varrho(b)$ und $\varphi(b) = \varphi(a) + 2\pi m$ mit $m \in \mathbb{Z}$. Es folgt

$$
\begin{aligned}
n(\gamma, z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\varrho'(t)e^{i\varphi(t)} + i\varphi'(t)\varrho(t)e^{i\varphi(t)}}{\varrho(t)e^{i\varphi(t)}}dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \left(\frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)} + i\varphi'(t)\right)dt \\
&= \left[\frac{1}{2\pi i}\log\varrho(t) + \frac{1}{2\pi}\varphi(t)\right]_{t=a}^{t=b} \\
&= \frac{1}{2\pi}(\varphi(b) - \varphi(a)) \\
&= m.
\end{aligned}
$$

Die Windungszahl $n(\gamma, z)$ zählt also, um welches Vielfache von 2π das Argument von $\zeta - z$ zu- oder abnimmt, wenn ζ die Kurve γ durchläuft.

Insbesondere folgt aus obiger Rechnung: Ist γ die Standardparametrisierung von $\partial D(z, r)$, so gilt $n(\gamma, z) = 1$.

Satz 10.2. *Sei γ geschlossener Integrationsweg. Dann gilt $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathrm{Sp}(\gamma)$. Weiter ist $z \mapsto n(\gamma, z)$ auf jeder Komponente von $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Sp}(\gamma)$ konstant und es gibt $n(\gamma, z) = 0$ für alle z aus der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Sp}(\gamma)$.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$. Wir definieren $h\colon [0,1] \to \mathbb{C}$,

$$
h(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma|_{[0,t]}} \frac{d\zeta}{z - \zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}ds.
$$

Es folgt

$$
h'(t) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}.
$$

Dies liefert

$$
\frac{d}{dt}\,\frac{e^{2\pi i h(t)}}{\gamma(t) - z} = \frac{2\pi i h'(t)e^{2\pi i h(t)}}{\gamma(t) - z} - \frac{\gamma'(t)e^{2\pi i h(t)}}{(\gamma(t) - z)^2} = 0,
$$

also

$$
\frac{e^{2\pi i h(1)}}{\gamma(1) - z} = \frac{e^{2\pi i h(0)}}{\gamma(0) - z}.
$$

Wegen $\gamma(1) = \gamma(0)$, $h(0) = 0$ und $h(1) = n(\gamma, z)$ folgt

$$
e^{2\pi i n(\gamma, z)} = e^{2\pi i 0} = 1,
$$

also $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$.

Es ist leicht zu sehen, dass $z \mapsto n(\gamma, z)$ stetig (in $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Sp}(\gamma)$) ist. Da $n(\gamma, z)$ nur ganzzahlige Werte annimmt, ist $n(\gamma, z)$ auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Sp}(\gamma)$ konstant.

Ist schließlich $R > 0$ mit $\mathrm{Sp}(\gamma) \subset D(0, R)$, so folgt für $|z| > R$ dass

$$|n(\gamma, z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{d\zeta}{|z| - |\zeta|} \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi} \frac{1}{|z| - R},$$

für $|z| > R + L(\gamma)/\pi$ also $|n(\gamma, z)| \leq \frac{1}{2}$ und damit $n(\gamma, z) = 0$ wegen $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$. Es folgt $n(\gamma, z) = 0$ für alle z aus den unbeschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Sp}(\gamma)$. □

Bemerkungen. 1. Die Konstanz von $n(\gamma, z)$ in den Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Sp}(\gamma)$ folgt auch aus

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} n(\gamma, z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\zeta - z} \right) d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{(\zeta - z)^2} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d}{d\zeta} \left(-\frac{1}{\zeta - z} \right) d\zeta = 0.
\end{aligned}$$

2. Wir machen einige heuristische Überlegungen zur Windungszahl: Dazu betrachten wir die Situation, wo eine Kurve γ einen Kreis in zwei Punkten schneidet und innerhalb des Kreises keine Selbstüberschneidungen hat; vgl. Abbildung 6.

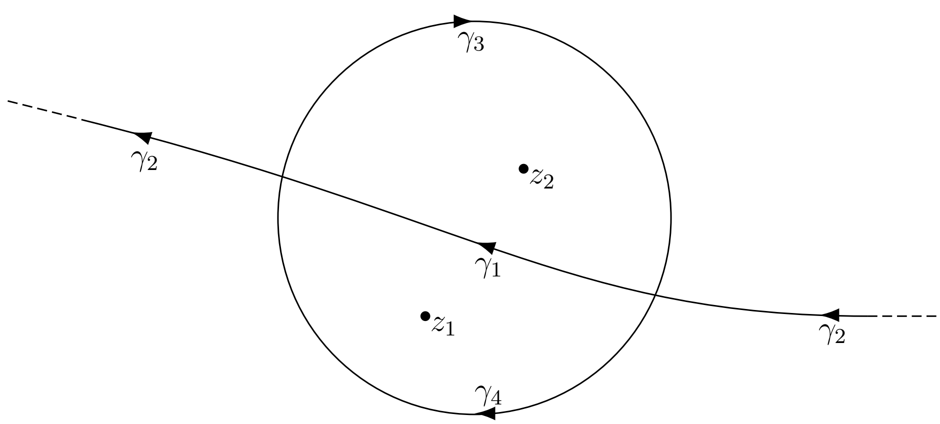

Abbildung 6: Für $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ gilt $n(\gamma, z_1) = n(\gamma, z_2) + 1$.

Wir behaupten, dass für die skizzierten Punkte z_1 und z_2

$$n(\gamma, z_1) = n(\gamma, z_2) + 1$$

gilt.

Zum Nachweis der Behauptung sei γ_1 der Teil von γ, der im Kreis enthalten ist, γ_2 der Teil von γ, der außerhalb des Kreises liegt, und γ_3 und γ_4 seien die skizzierten Teile des (negativ orientierten) Kreises. Dann ist $\gamma_1 + \gamma_3$ geschlossene Kurve und

z_1 liegt in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\gamma_1 + \gamma_3$. Also gilt $n(\gamma_1 + \gamma_3, z_1) = 0$. Analog ist $\gamma_1 - \gamma_4$ geschlossene Kurve und $n(\gamma_1 - \gamma_4, z_2) = 0$.

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
n(\gamma, z_1) - 1 &= n(\gamma_1 + \gamma_2, z_1) - 1 \\
&= n(\gamma_1 + \gamma_2, z_1) + n(\gamma_3 + \gamma_4, z_1) \\
&= \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\
&= n(\gamma_1 + \gamma_3, z_1) + n(\gamma_2 + \gamma_4, z_1) \\
&= 0 + n(\gamma_2 + \gamma_4, z_2) \\
&= n(\gamma_1 - \gamma_4, z_2) + n(\gamma_2 + \gamma_4, z_2) \\
&= n(\gamma_1 + \gamma_2, z_2) \\
&= n(\gamma, z_2).
\end{aligned}$$

Diese Betrachtung kann unter geeigneten Annahmen an γ auch präzisiert werden.

In zwei angrenzenden Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C}\backslash \mathrm{Sp}(\gamma)$ unterscheiden sich die Windungszahlen also um 1, unter der Annahme, dass γ den gemeinsamen Rand der Komponenten nur einmal durchläuft. Aus der Orientierung von γ lässt sich zudem ablesen, ob sich die Windungszahl beim Übergang von einer Komponente in die andere um 1 erhöht oder erniedrigt. Beginnend mit der unbeschränkten Komponente, wo die Windungszahl 0 ist, lässt sich so die Windungszahl in allen Komponenten von $\mathbb{C}\backslash \mathrm{Sp}(\gamma)$ bestimmen, vgl. Abbildung 7.

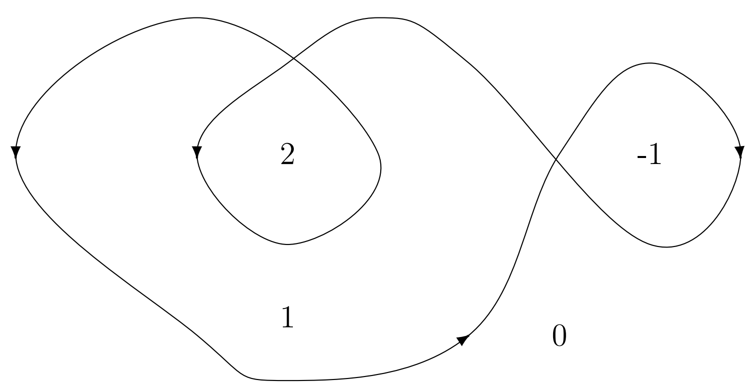

Abbildung 7: Eine geschlossene Kurve γ, mit Angabe der Windungszahlen in den Komponenten von $\mathbb{C}\backslash \mathrm{Sp}(\gamma)$.

Wir haben bisher für Kurven γ_1 und γ_2 die Kurve $\gamma_1 + \gamma_2$ nur dann definiert, wenn der Endpunkt von γ_1 der Anfangspunkt von γ_2 ist. Es gilt dann

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz,$$

falls f auf $\mathrm{Sp}(\gamma_1 + \gamma_2) = \mathrm{Sp}(\gamma_1) \cup \mathrm{Sp}(\gamma_2)$ stetig ist (und γ_1 und γ_2 Integrationswege sind).

Es ist möglich, dies auch für beliebige Integrationswege zu definieren. Wir benötigen dies nur für geschlossene Integrationswege. Seien $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ geschlossene

Integrationswege und $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z}$. Dann heißt die formale Linearkombination

$$\sum_{j=1}^{k} m_j \gamma_j$$

Zyklus. Eine präzise Definition ist: Ein Zyklus ist eine Funktion von der Menge der geschlossenen Integrationswege nach $\mathbb{Z}$, für die das Urbild von $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ endlich ist. Den durch

$$\Gamma(\gamma) = \begin{cases} m_j, & \text{falls } \gamma = \gamma_j \text{ für ein } j \in \{1, \dots, k\}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

gegebenen Zyklus schreiben wir dann aber als $\Gamma = \sum_{j=1}^{k} m_j \gamma_j$.

Man nennt dann

$$\operatorname{Sp}(\Gamma) = \bigcup_{j=1}^{k} \operatorname{Sp}(\gamma_j)$$

Spur des Zyklus und für eine stetige Funktion $f\colon \operatorname{Sp}(\Gamma) \to \mathbb{C}$ definiert man

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} m_j \int_{\gamma_j} f(z)dz \quad \text{und} \quad n(\Gamma, z) = \sum_{j=1}^{k} m_j \, n(\gamma_j, z).$$

Die Addition von Zyklen kann auf offensichtliche Weise definiert werden und es gilt dann

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz = \int_{\Gamma_1+\Gamma_2} f(z)dz,$$

falls f stetig auf $\operatorname{Sp}(\Gamma_1 + \Gamma_2) = \operatorname{Sp}(\Gamma_1) \cup \operatorname{Sp}(\Gamma_2)$ ist.

Alles über Windungszahlen Gesagte überträgt sich in offensichtlicher Weise auf Zyklen. Insbesondere gilt $n(\Gamma, z) \in \mathbb{Z}$ für jeden Zyklus Γ und $z \in \mathbb{C}\backslash\operatorname{Sp}(\Gamma)$.

Anstatt zu fordern, dass alle Integrationswege γ_j eines Zyklus $\Gamma = \sum_{j=1}^{k} m_j \gamma_j$ geschlossen sind, kann man allgemeiner auch nur fordern, dass jeder Punkt genauso oft als Anfangspunkt einer Kurve auftritt wie er also Endpunkt auftritt, gezählt bezüglich der Vielfachheiten m_j.

Definition 10.3. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und Γ Zyklus in Ω. Dann heißt Γ *nullhomolog in* Ω (geschrieben $\Gamma \sim_\Omega 0$), falls $n(\Gamma, z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$. Zwei Zyklen Γ_1, Γ_2 in Ω heißen *homolog in* Ω (geschrieben $\Gamma_1 \sim_\Omega \Gamma_2$), falls $\Gamma_1 - \Gamma_2$ nullhomolog in Ω ist.

Beispiel. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $\varrho > 0$ und $\gamma_{z_0,\varrho}$ die Standardparametrisierung von $\partial D(z_0, \varrho)$, also

$$\gamma_{z_0,\varrho}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_{z_0,\varrho}(t) = z_0 + \varrho e^{it}.$$

Dann gilt $n(\gamma_{z_0,\varrho}, z_0) = 1$, also ist die Kurve $\gamma_{z_0,\varrho}$ nicht nullhomolog in $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$. Für $0 < r < \varrho < R$ ist $\gamma_{z_0,\varrho}$ auch nicht nicht nullhomolog im Kreisring

$$A = \{z \in \mathbb{C}\colon r < |z| < R\}.$$

Für $r < \varrho_1 < \varrho_2 < R$ sind also weder γ_{z_0,ϱ_2} noch γ_{z_0,ϱ_1} nullhomolog in A, aber der Zyklus

$$\Gamma := \gamma_{z_0,\varrho_2} - \gamma_{z_0,\varrho_1}$$

ist nullhomolog in A. Es gilt also $\gamma_{z_0,\varrho_2} \sim_A \gamma_{z_0,\varrho_1}$; vgl. auch Abbildung 8.

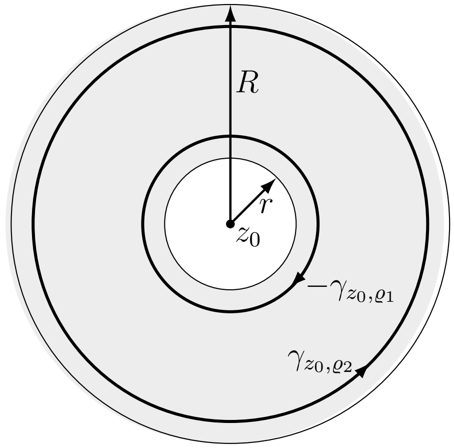

Abbildung 8: Der Zyklus $\Gamma = \gamma_{z_0,\varrho_2} - \gamma_{z_0,\varrho_1}$ im Kreisring $\{z\colon r < |z| < R\}$, mit $0 < r < \varrho_1 < \varrho_2 < R$.

In diesem und anderen Beispielen kommt man auch ohne die Einführung von Zyklen aus. Ist γ ein Integrationsweg in A mit Anfangspunkt r und Endpunkt R, so ist

$$\Gamma' := \gamma_{z_0,\varrho_2} - \gamma - \gamma_{z_0,\varrho_1} + \gamma$$

eine geschlossene Kurve und es gilt

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\Gamma'} f(z)dz$$

für jede stetige Funktion $f\colon \operatorname{Sp}(\Gamma') \to \mathbb{C}$. Ist f nicht in ganz A definiert, muss aber γ in Abhängigkeit von f gewählt werden. Durch die Einführung von Zyklen werden die Argumente einfacher und eleganter.

Satz 10.4. *In einem sternförmigen Gebiet ist jeder Zyklus nullhomolog.*

Beweis. Ist G sternförmiges Gebiet und $z \in \mathbb{C}\backslash G$, so ist $\zeta \mapsto 1/(\zeta - z)$ holomorph in G, also gilt nach Cauchy-Integralsatz für sternförmige Gebiete

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0$$

für jeden geschlossenen Integrationsweg Γ. Damit gilt dies auch für jeden Zyklus Γ in G. □

Ein der Homologie verwandter Begriff ist der der Homotopie.

Definition 10.5. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet und seien $\gamma_0, \gamma_1\colon [0,1] \to G$ Kurven mit den gleichen Anfangs- und Endpunkten. Dann heißen γ_0 und γ_1 *homotop* (relativ der Endpunkte) in G, wenn eine stetige Funktion $H\colon [0,1]^2 \to G$ existiert, so dass

(*i*) $H(t,0) = \gamma_0(t)$ und $H(t,1) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [0,1]$ und

(*ii*) $H(0,s) = \gamma_0(0)$ und $H(1,s) = \gamma_0(1)$ für alle $s \in [0,1]$.

Die Abbildung H heißt *Homotopie.*

Eine geschlossene Kurve $\gamma\colon [0,1] \to G$ heißt *nullhomotop* in G, wenn sie homotop zur konstanten Kurve $\sigma\colon [0,1] \to G$, $\sigma(t) = \gamma(0)$, ist.

Anschaulich bedeutet die Homotopie zweier Kurven, dass eine stetig in die andere deformiert werden kann (bei festgehaltenen Endpunkten), vgl. Abbildung 9. Eine geschlossene Kurve ist nullhomotop, wenn sie stetig zu einem Punkt zusammengezogen werden kann.

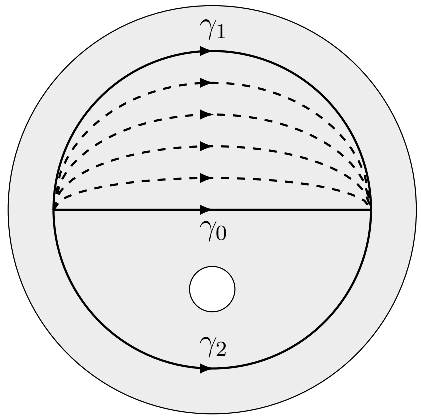

Abbildung 9: Die Strecke γ_0 und der Halbkreis γ_1 sind im skizzierten Gebiet homotop, γ_0 und der Halbkreis γ_2 aber nicht.

Wir haben den Begriff der Windungszahl nur für Integrationswege (also stückweise stetig differenzierbare Kurven) definiert. Man kann zeigen, dass für einen nullhomotopen Integrationsweg die Homotopie H in Definition 10.5 so gewählt werden kann, dass $\gamma_s\colon [0,1] \to G$, $\gamma_s(t) = H(t,s)$, für alle $s \in (0,1)$ ebenfalls stückweise glatt ist. Da $s \mapsto n(\gamma_s, z)$ für $z \notin G$ stetig ist, andererseits aber nur ganzzahlige Werte annimmt, ist diese Funktion konstant. Dies liefert folgenden Satz.

Satz 10.6. *Ein nullhomotoper geschlossener Integrationsweg ist nullhomolog.*

Die Umkehrung gilt nicht, ein Beispiel ist in Abbildung 10 skizziert.

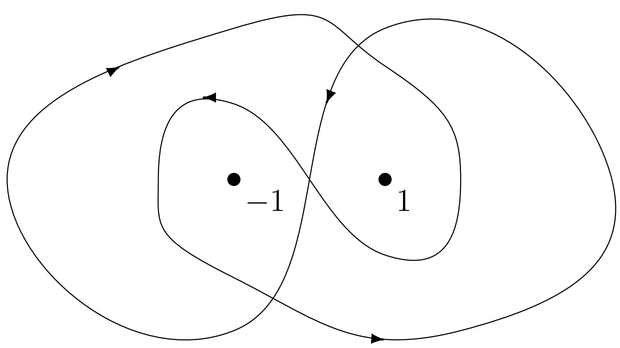

Abbildung 10: Eine nullhomologe Kurve in $\mathbb{C}\backslash\{-1,1\}$, die nicht nullhomotop ist.

Wir verzichten auf einen Beweis, warum die Kurve in Abbildung 10 nicht nullhomotop ist, aber wir beschreiben informell kurz den mathematischen Kontext. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $z_0 \in G$ fest. Sei X die Menge der geschlossenen Kurven in G mit Anfangs- und Endpunkt z_0 und sei $\sim_G$ die Äquivalenzrelation der Homotopie.

Man nennt $\pi_1(G, z_0) := X/\sim_G$ die *Fundamentalgruppe* von G bezüglich z_0. Die Elemente der Fundamentalgruppe sind also Äquivalenzklassen von Kurven (bezüglich der Äquivalenzrelation Homotopie).

Für $\alpha, \beta \in X$ ist die Summe $\alpha + \beta$ definiert. Entsprechend kann man eine Verknüpfung auf $\pi_1(G, z_0)$ definieren. Diese schreibt man aber im Allgemeinen als Multiplikation, da sie nicht kommutativ ist. Für $a = [\alpha]$ und $b = [\beta]$ setzt man also $ab = [\alpha + \beta]$. Dies ist wohldefiniert, und mit der so definierten Verknüpfung ist $\pi_1(G, z_0)$ eine Gruppe. Das neutrale Element e ist natürlich die Äquivalenzklasse der nullhomotopen Kurven. Die Wahl des Punktes z_0 ist dabei unwesentlich: Ist z_1 ein anderer Punkt in G, so sind $\pi_1(G, z_0)$ und $\pi_1(G, z_1)$ isomorph.

Die Fundamentalgruppe von $\mathbb{C}\backslash\{1, -1\}$ wird von zwei Elementen erzeugt: einer Schlaufe a um -1 und einer Schlaufe b um 1. Man kann zeigen, dass $ab \neq ba$ gilt, was anschaulich auch klar ist. Die Fundamentalgruppe ist also nicht abelsch. Für den Kommutator $aba^{-1}b^{-1}$ gilt also $aba^{-1}b^{-1} \neq e$, das heißt, die Repräsentanten des Kommutators sind nicht nullhomotop. Die in Abbildung 10 skizzierte Kurve ist ein Repräsentant des Kommutators $aba^{-1}b^{-1}$.

Anschaulich kann man dies wie folgt interpretieren: Entsprechen die Punkte ± 1 Nägeln in einer Wand und die Kurve γ aus Abbildung 10 einem Seil, so wird ein an diesem Seil aufgehängtes Bild nicht herunterfallen – denn γ ist nicht nullhomotop in $\mathbb{C}\backslash\{1, -1\}$. Entfernt man aber einen der Nägel, ersetzt also das Gebiet $\mathbb{C}\backslash\{1, -1\}$ durch $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ oder $\mathbb{C}\backslash\{-1\}$, so wird das Bild herunterfallen, denn in diesen Gebieten ist γ nullhomotop. Mathematisch entspricht das Entfernen eines Nagels dem Ersetzen von a oder b durch das neutrale Element – und dies zeigt, dass γ im neuen Gebiet nullhomotop ist.

Analog kann man ein Bild an 3 Nägeln aufhängen, so dass es herunterfällt, wenn einer der 3 Nägel entfernt wird; vgl. Abbildung 11.

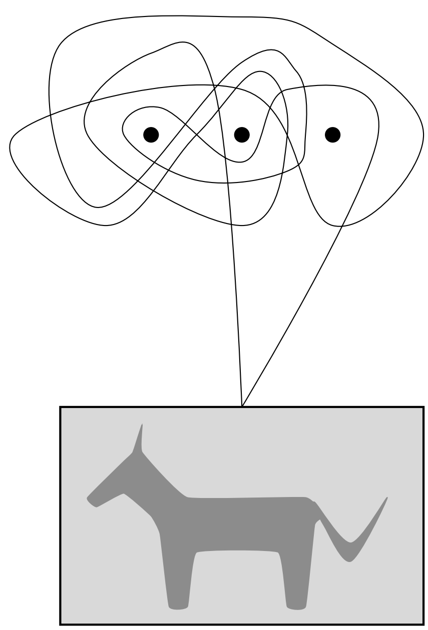

Abbildung 11: Ein an drei Nägeln aufgehängtes Bild.

Denn sind a, b, c Erzeuger der entsprechenden Fundamentalgruppe, so wählt man γ als Repräsentant des Kommutators von $aba^{-1}b^{-1}$ und c, also

$$aba^{-1}b^{-1}c(aba^{-1}b^{-1})^{-1}c^{-1} = aba^{-1}b^{-1}cbab^{-1}a^{-1}c^{-1}.$$

Die Verallgemeinerung auf eine beliebige Zahl von Nägeln sollte nun offensichtlich sein.

Die mathematische Disziplin, in der Fundamentalgruppen genauer studiert werden, ist die algebraische Topologie.

11 Der allgemeine Cauchy-Integralsatz

Satz 11.1 (Allgemeiner Cauchy-Integralsatz und allgemeine Cauchy-Integralformel). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph und Γ nullhomologer Zyklus in G. Dann gilt*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

und

$$n(\Gamma, z)f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}d\zeta \quad \text{für } z \in G\backslash\mathrm{Sp}(\Gamma) \text{ und } k \in \mathbb{N}_0.$$

Bemerkung. Die bisherigen Versionen des Cauchy-Integralsatzes und der Cauchy-Integralformel sind Spezialfälle dieses Resultats.

Das Beispiel zu Beginn von Abschnitt 10 zeigt, dass die Voraussetzung „Γ nullhomolog" wesentlich ist.

Beweis von Satz 11.1. Wir zeigen zunächst die zweite Behauptung. Es reicht, den Fall $k = 0$ zu betrachten, da der Fall $k \geq 1$ hieraus mit dem Satz über Parameterintegrale (Satz 6.3) folgt. Zu zeigen ist für $z \in G\backslash\mathrm{Sp}(\Gamma)$ also

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - n(\Gamma, z)f(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - f(z)\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}d\zeta, \end{aligned}$$

mit $h\colon G\backslash\mathrm{Sp}(\Gamma) \to \mathbb{C}$,

$$h(z) = \int_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}d\zeta,$$

also $h(z) \equiv 0$.

Die Idee ist zu zeigen, dass h zu einer ganzen Funktion fortgesetzt werden kann, auf die dann der Satz von Liouville angewandt werden kann.

Sei zunächst $G_0 = \{z \in \mathbb{C}\backslash\mathrm{Sp}(\Gamma)\colon n(\Gamma, z) = 0\}$. Da Γ nullhomolog in G, gilt $\mathbb{C}\backslash G \subset G_0$, also $G \cup G_0 = \mathbb{C}$. Sei $h_0\colon G_0 \to \mathbb{C}$,

$$h_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Nach obiger Rechnung gilt $h(z) = h_0(z)$ für $z \in G_0 \cap G \backslash \mathrm{Sp}(\Gamma)$.

Damit haben wir bereits eine Fortsetzung auf $G_0 \cup G \backslash \mathrm{Sp}(\Gamma) = \mathbb{C} \backslash \mathrm{Sp}(\Gamma)$. Um h auch auf $\mathrm{Sp}(\Gamma)$ fortzusetzen, definieren wir $g\colon G \times G \to \mathbb{C}$,

$$g(\zeta, z) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \neq z, \\ f'(z), & \zeta = z. \end{cases}$$

Wir zeigen zunächst, dass g stetig ist. Die Stetigkeit in Punkten $(\zeta_0, z_0) \in G \times G$ mit $\zeta_0 \neq z_0$ folgt aus der Stetigkeit von f.

Sei $z_0 \in G$. Wir zeigen die Stetigkeit in (z_0, z_0). Aus der Stetigkeit von f' folgt, dass zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $|f'(z) - f'(z_0)| < \varepsilon$ für $|z - z_0| < \delta$. Wir können dabei annehmen, dass $D(z_0, \delta) \subseteq G$. Wir werden zeigen, dass

$$|g(\zeta, z) - g(z_0, z_0)| < \varepsilon \quad \text{für } |\zeta - z_0| < \delta \text{ und } |z - z_0| < \delta$$

gilt, woraus die Stetigkeit von g in (z_0, z_0) folgt. Wegen

$$g(\zeta, z) - g(z_0, z_0) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} - f'(z_0), & \zeta \neq z, \\ f'(z) - f'(z_0), & \zeta = z. \end{cases}$$

folgt dies unmittelbar, falls $\zeta = z$.

Seien also $\zeta, z \in D(z_0, \delta)$ mit $\zeta \neq z$. Es folgt

$$\begin{aligned} |g(\zeta, z) - g(z_0, z_0)| &= \left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} - f'(z_0) \right| \\ &= \left| \frac{1}{\zeta - z} \int_{[z,\zeta]} (f'(w) - f'(z_0))\, dw \right| \\ &\leq \max_{\omega \in [z,\zeta]} |f'(w) - f'(z_0)| \end{aligned}$$

und damit wiederum

$$|g(\zeta, z) - g(z_0, z_0)| < \varepsilon.$$

Also ist g stetig.

Damit wird durch

$$h_1(z) = \int_\Gamma g(\zeta, z) d\zeta$$

eine stetige Funktion $h_1\colon G \to \mathbb{C}$ definiert. Des Weiteren ist für alle $\zeta \in G$ die Funktion $z \mapsto g(\zeta, z)$ stetig in G und holomorph in $G \backslash \{\zeta\}$, nach Satz 6.7 also holomorph in G. Mit Satz 6.3 folgt, dass h_1 holomorph ist. Außerdem gilt $h_1(z) = h(z)$ für $z \in G \backslash \mathrm{Sp}(\Gamma)$.

Wir definieren nun $H\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$H(z) = \begin{cases} h_0(z), & z \in G_0, \\ h_1(z), & z \in G. \end{cases}$$

Wegen $G_0 \cap G = \mathbb{C}$ und $h_0(z) = h(z) = h_1(z)$ für $z \in G_0 \cap G = G_0 \cap G \backslash \mathrm{Sp}(\Gamma)$ ist dies wohldefiniert.

Sei $R > 0$ mit $\mathrm{Sp}(\Gamma) \subset D(0,R)$. Für $|z| > R$ gilt dann

$$|H(z)| = |h_0(z)| = \left|\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\right| \leq L(\Gamma) \max_{\zeta \in \mathrm{Sp}(\Gamma)} \frac{|f(\zeta)|}{|z| - |\zeta|} \leq \frac{L(\Gamma)}{|z| - R} \max_{\zeta \in \mathrm{Sp}(\Gamma)} |f(\zeta)|.$$

Es folgt $|H(z)| \to 0$ für $|z| \to \infty$. Also ist H beschränkt und nach Satz von Liouville damit konstant. Wegen $|H(z)| \to 0$ für $|z| \to \infty$ folgt $H(z) \equiv 0$, also auch $h(z) = 0$ für $z \in G \backslash \mathrm{Sp}(\Gamma)$. Damit ist die zweite Behauptung bewiesen.

Zum Beweis der ersten sei $a \in G\backslash\mathrm{Sp}(\Gamma)$ und $F\colon G \to \mathbb{C}$, $F(z) = (z-a)f(z)$. Dann gilt nach dem bereits Bewiesenen

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma \frac{F(z)}{z-a} dz = 2\pi i\, n(\Gamma, a) F(a) = 0. \qquad \square$$

Folgerung 11.2. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph. Seien Γ_1, Γ_2 Zyklen mit $\Gamma_1 \sim_G \Gamma_2$. Dann gilt

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz.$$

Beweis. Man wende Satz 11.1 auf $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$ an. $\square$

Beispiel. Ist f holomorph in $\{z \in \mathbb{C}\colon r < |z - z_0| < R\}$ und gilt $r < r_1 < r_2 < R$, so gilt

$$\int_{|z-z_0|=r_1} f(z)dz = \int_{|z-z_0|=r_2} f(z)dz,$$

man vgl. auch Abbildung 8.

Bemerkung. Mit der Cauchy-Integralformel können oft gewisse reelle Integrale berechnet werden. Wir betrachten hier nur ein Beispiel, diskutieren die Methode später (in Abschnitt 13) aber in einem allgemeineren Rahmen ausführlicher.

Das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx, \quad \text{wobei } a, b > 0,$$

existiert wegen

$$\left|\frac{\cos ax}{x^2 + b^2}\right| \leq \frac{1}{x^2 + b^2}$$

nach Majorantenkriterium.

Wir betrachten für $R > b$ den in Abbildung 12 skizzierten Integrationsweg $\gamma_R = \alpha_R + \beta_R$.

Mit $f\colon \mathbb{C}\backslash\{-ib\} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{z + ib},$$

gilt wegen $n(\gamma_R, ib) = 1$

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2} dz = \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z - ib} dz = 2\pi i\, n(\gamma_R, ib) f(ib) = 2\pi i \frac{e^{-ab}}{2ib} = \frac{\pi e^{-ab}}{b}.$$

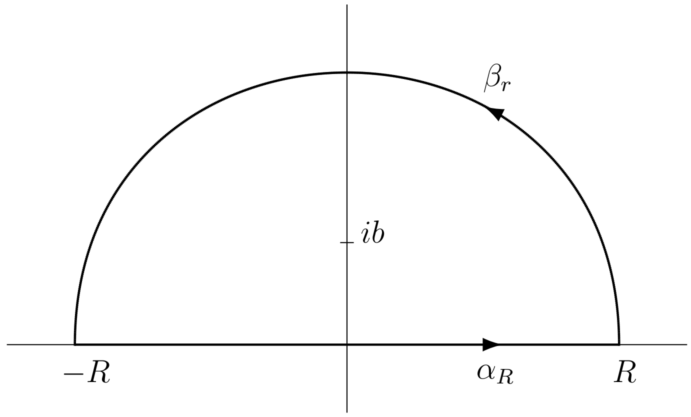

Abbildung 12: Der Integrationsweg $\alpha_R + \beta_R$.

Weiter gilt wegen

$$|e^{iaz}| = e^{\mathrm{Re}(iaz)} = e^{-a\,\mathrm{Im}(z)},$$

dass

$$\left|\int_{\beta_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2} dz\right| \le \int_{\beta_R} \frac{|dz|}{|z^2+b^2|} \le \frac{\pi R}{R^2-b^2},$$

also

$$\int_{\beta_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2} dz \to 0 \quad \text{für } R \to \infty.$$

Es folgt

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\alpha_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2} dz = \frac{\pi e^{-ab}}{b}.$$

Nun gilt

$$\int_{\alpha_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2} dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{iax}}{x^2+b^2} dx = \int_{-R}^{R} \frac{\cos ax}{x^2+b^2} dx + i \int_{-R}^{R} \frac{\sin ax}{x^2+b^2} dx.$$

Es folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2} dx = \frac{\pi e^{-ab}}{b}.$$

Außerdem erhält man auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x^2+b^2} dx = 0,$$

aber dies folgt auch direkt, da der Integrand ungerade ist.

Wir betrachten nun Gebiete, in denen die Voraussetzung des Cauchy-Integralsatzes, dass der betrachtete Zyklus nullhomolog ist, immer erfüllt ist.

Definition 11.3. Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, wenn jeder Zyklus in G nullhomolog in G ist.

Anschaulich bedeutet der einfache Zusammenhang von G, dass G keine „Löcher“ hat, vgl. Abbildung 13.

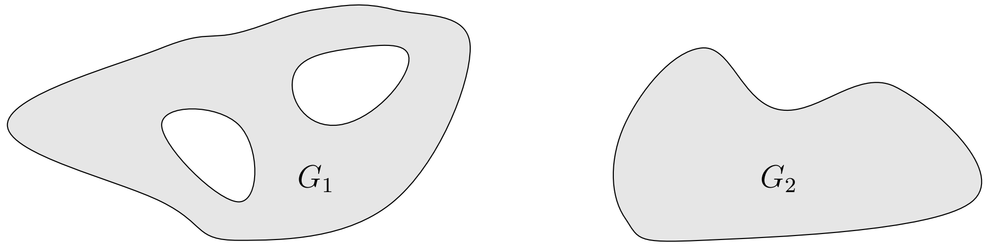

Abbildung 13: Das Gebiet G_1 ist nicht einfach zusammenhängend und das Gebiet G_2 ist einfach zusammenhängend.

Satz 11.4. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet. Dann sind äquivalent:*

(i) G ist einfach zusammenhängend;

(ii) Für jede holomorphe Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ und jeden Zyklus Γ in G gilt

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0\,;$$

(iii) Jede in G holomorphe Funktion besitzt eine Stammfunktion;

(iv) Zu jeder holomorphen Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ existiert eine holomorphe Funktion

$$g\colon G \to \mathbb{C} \quad \textit{mit} \quad f = \exp \circ g.$$

Bemerkung. Man nennt die Funktion g in (iv) auch Zweig des Logarithmus von f.

Beweis. Die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$ folgt aus dem Cauchy-Integralsatz und $(ii) \Rightarrow (iii)$ folgt aus Satz 4.6.

Zu $(iii) \Rightarrow (iv)$: Sei $f\colon G \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorph. Dann ist f'/f holomorph in G. Sei h Stammfunktion von f'/f, also $h' = f'/f$. Dann gilt

$$(e^{-h}f)' = e^{-h}(-h'f + f') = 0.$$

Also ist $e^{-h}f$ konstant, etwa $e^{-h}f = c \in \mathbb{C}$ und damit $f = ce^h$.

Wegen $f(z) \neq 0$ gilt $c \neq 0$. Damit existiert $b \in \mathbb{C}$ mit $e^b = c$. (Falls $c \notin (-\infty, 0]$, kann man $b = \operatorname{Log} c$ wählen, andernfalls $b = \log|c| + i\pi$.) Mit $g = h + b$ folgt

$$e^g = e^{h+b} = e^h e^b = \frac{f}{c}c = f.$$

Zu $(iv) \Rightarrow (i)$: Sei Γ Zyklus in G und $a \in \mathbb{C}\backslash G$. Zu zeigen ist, dass $n(\Gamma, a) = 0$.

Nun existiert eine holomorphe Funktion $g\colon G \to \mathbb{C}$ mit $e^{g(z)} = z - a$ für $z \in G$. Es folgt

$$g'(z)e^{g(z)} = 1,$$

also

$$g'(z) = \frac{1}{e^{g(z)}} = \frac{1}{z-a}.$$

Damit hat $z \mapsto 1/(z-a)$ die Stammfunktion g. Es folgt

$$n(\Gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z-a} = 0.$$

□

Bemerkungen. 1. Wir können sowohl in der Definition des einfachen Zusammenhangs wie auch in obigem Satz natürlich „Zyklen“ durch „geschlossene Integrationswege“ ersetzen. Denn offensichtlich gilt $n(\Gamma, z) = 0$ für jeden Zyklus Γ in G genau dann, wenn $n(\gamma, z) = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G gilt.

2. Gelten die Eigenschaften des Satzes und ist $f\colon G \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorph und $n \in \mathbb{N}$, so existiert $h\colon G \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorph mit $h^n = f$; das heißt, wir können n-te Wurzeln ziehen. Denn ist g wie in (iv), also $e^g = f$, so leistet $h := \exp(\frac{1}{n}g)$ das Verlangte.

12 Laurentreihen und isolierte Singularitäten

Definition 12.1. Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad \text{wobei } z, z_0, a_n \in \mathbb{C},$$

heißt *Laurentreihe*. Dabei heißt

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}(z-z_0)^{-m}$$

Hauptteil und

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

Nebenteil der Reihe.

Die Reihe heißt konvergent (bzw. gleichmäßig konvergent, absolut konvergent, usw.), wenn dies für Haupt- und Nebenteil gilt.

Sei R der Konvergenzradius des Nebenteils, wobei $0 \le R \le \infty$. Der Nebenteil konvergiert in $D(z_0, R)$ und divergiert in $\mathbb{C}\backslash\overline{D}(z_0, R)$ bzw. in $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ falls $R = 0$. Sei ϱ der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}w^m$. Dann konvergiert der Hauptteil, falls $1/|z-z_0| < \varrho$, das heißt, falls $|z-z_0| > 1/\varrho$, und er divergiert für $|z-z_0| < 1/\varrho$. Sei $r = 1/\varrho$, wobei wir $1/\infty = 0$ und $1/0 = \infty$ setzen. Gilt $0 \le r < R \le \infty$, so konvergiert die Laurentreihe im Kreisring

$$A(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C}\colon r < |z-z_0| < R\}.$$

Auf jeder kompakten Teilmenge des Kreisrings konvergiert die Reihe gleichmäßig.

Satz 12.2. *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le \infty$ und $f\colon A(z_0, r, R) \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann existieren holomorphe Funktionen*

$$g\colon D(z_0, R) \to \mathbb{C} \quad \textit{und} \quad h\colon \{z \in \mathbb{C}\colon |z-z_0| > r\} \to \mathbb{C},$$

so dass $f(z) = g(z) + h(z)$ für $z \in A(z_0, r, R)$.

Dabei kann h so gewählt werden, dass $\lim_{|z|\to\infty} h(z) = 0$. *Bei dieser Wahl von h sind g und h eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei $z \in A(z_0, r, R)$. Wir wählen r', R' mit $r < r' < |z - z_0| < R' < R$ und setzen

$$g(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = R'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

und

$$h(z) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Nach dem Beispiel zu Folgerung 11.2 hängen die Integrale rechts nicht von der Wahl von r' und R' ab, solange $r < r' < |z - z_0| < R' < R$.

Sei Γ der Zyklus, der aus dem positiv orientierten Kreisrand $\partial D(z_0, R')$ und dem negativ orientierten Kreisrand $\partial D(z_0, r')$ besteht. Dann ist Γ nullhomolog in $A(z_0, r, R)$ und nach Cauchy-Integralformel folgt

$$\begin{aligned}
f(z) &= n(\Gamma, z) f(z) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = R'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
&= g(z) + h(z).
\end{aligned}$$

Des Weiteren ist die durch die obige Formel definierte Funktion g nicht nur in $A(z_0, r, R)$ definiert und holomorph, sondern auch in $D(z_0, R)$. Zunächst ist sie nach dem Satz über Parameterintegrale zwar nur in $D(z_0, R')$ holomorph, aber da $R' < R$ beliebig war, ist sie auch in $D(z_0, R)$ holomorph. Analog ist durch obige Formel auch eine holomorphe Funktion $h\colon \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| > r\} \to \mathbb{C}$ definiert.

Für $|z - z_0| > r'$ folgt außerdem

$$\begin{aligned}
|h(z)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|\zeta - z_0| = r'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r' \max_{|\zeta - z_0| = r'} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0 - z_0 - z|} \\
&\leq \frac{r'}{|z - z_0| - r'} \max_{|\zeta - z_0| = r'} |f(\zeta)|.
\end{aligned}$$

Es folgt $h(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$.

Seien nun g^* und h^* Funktionen mit den gleichen Eigenschaften, also

$$f(z) = g(z) + h(z) = g^*(z) + h^*(z)$$

für $z \in A(z_0, r, R)$ und $\lim_{|z| \to \infty} h^*(z) = 0$. Dann gilt

$$g(z) - g^*(z) = h^*(z) - h(z)$$

für $z \in A(z_0, r, R)$. Durch

$$F(z) = \begin{cases} g(z) - g^*(z), & |z| < R, \\ h^*(z) - h(z), & |z| > r, \end{cases}$$

wird damit eine ganze Funktion F definiert. Wegen

$$\lim_{|z|\to\infty} F(z) = \lim_{|z|\to\infty} (h^*(z) - h(z)) = 0$$

folgt mit dem Satz von Liouville, dass $F(z) \equiv 0$. Damit sind g und h eindeutig bestimmt. $\square$

Satz 12.3. *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le \infty$ und $f\colon A(z_0, r, R) \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann existiert eine eindeutig bestimmte in $A(z_0, r, R)$ konvergente Laurentreihenentwicklung*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Für $r < \varrho < R$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt dabei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \varrho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Beweis. Wir schreiben $f(z) = g(z) + h(z)$ gemäß Satz 12.2. Mit Satz 6.2 folgt

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für gewisse $a_n \in \mathbb{C}$ und $z \in D(z_0, R)$.

Um die Reihe für h zu erhalten, beachten wir zunächst, dass

$$\varphi\colon D\left(0, \frac{1}{r}\right) \setminus \{0\} \to \{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_0| > r\}, \quad \varphi(w) = z_0 + \frac{1}{w}$$

holomorph und bijektiv ist, mit $\varphi^{-1}(u) = 1/(u - z_0)$. Damit ist $H = h \circ \varphi$ holomorph in $D(0, 1/r) \setminus \{0\}$. Wegen

$$\lim_{w\to 0} H(w) = \lim_{w\to 0} h(\varphi(w)) = \lim_{|z|\to\infty} h(z) = 0$$

ist H stetig fortsetzbar auf $D(0, 1/r)$. Die stetige Fortsetzung sei wieder mit H bezeichnet. Es gilt dann $H(0) = 0$.

Nach Satz 6.7 ist H holomorph und besitzt damit eine Potenzreihenentwicklung

$$H(w) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m w^m$$

in $D(0, 1/r)$. Dies liefert

$$h(z) = H(\varphi^{-1}(z)) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \left(\frac{1}{z - z_0}\right)^m = \sum_{n=-\infty}^{-1} b_{-n} (z - z_0)^n.$$

Mit $a_n = b_{-n}$ erhält man eine Laurentreihe für f.

Die Formel für die a_n erhält man wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe auf $\partial D(z_0, \varrho)$, wobei $r < \varrho < R$, wie folgt. Zunächst gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = \varrho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = \varrho} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (\zeta - z_0)^{k-n-1} d\zeta \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = \varrho} (\zeta - z_0)^{k-n-1} d\zeta.\end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = \varrho} (\zeta - z_0)^{k-n-1} d\zeta = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq n, \\ 1 & \text{für } k = n, \end{cases}$$

folgt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = \varrho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = a_n.$$

Hieraus erhält man auch die Eindeutigkeit der Entwicklung. □

Beispiel. Sei $f \colon \mathbb{C}\backslash\{1, 2\} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}.$$

Für $1 < |z| < 2$ gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} \\ &= -\frac{1}{z}\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} - \frac{1}{2}\frac{1}{1 - \frac{z}{2}} \\ &= -\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^j \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}} z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \end{aligned}$$

mit

$$a_n = \begin{cases} -1, & n \leq 1, \\ -\frac{1}{2^{n+1}}, & n \geq 0. \end{cases}$$

Für $|z| < 1$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}\frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n$$

mit

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \leq -1, \\ 1 - \dfrac{1}{2^{n+1}} & \text{für } n \geq 0. \end{cases}$$

Man kann auch eine Laurentreihe für f angeben, die für $|z| > 2$ konvergiert.

Definition 12.4. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $z_0 \in G$ und $f\colon G\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann heißt z_0 *isolierte Singularität* von f.

Beispiele. 1. Sei $G = \mathbb{C}$, $z_0 = 1$ und

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z - 1}.$$

Wegen $z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$ gilt $f(z) = z + 1$. Mit $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $F(z) = z + 1$, gilt also $f = F|_{\mathbb{C}\backslash\{1\}}$.

2. Sei $G = \mathbb{C}$, $z_0 = 0$ und $f(z) = 1/z$. Es gilt $|f(z)| \to \infty$ für $z \to 0$.

3. Sei $G = \mathbb{C}$, $z_0 = 0$ und $f(x) = \exp(-1/z^2)$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) \to 0$ für $x \to 0$, aber $f(ix) \to \infty$ für $x \to 0$.

4. Sei

$$f(z) = \cot\frac{\pi}{z} = \frac{\cos \pi/z}{\sin \pi/z},$$

wobei $f\colon H \to \mathbb{C}$ mit

$$H = \mathbb{C}\backslash\left(\left\{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\right\} \cup \{0\}\right).$$

Für $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ ist $1/n$ isolierte Singularität. (Man setze $G = H \cup \{1/n\}$ und $z_0 = 1/n$ in Definition 12.4.) Der Punkt 0 ist aber keine *isolierte* Singularität.

Definition 12.5. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $z_0 \in G$ und $f\colon G\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, also z_0 isolierte Singularität von f. Dann heißt z_0

(*i*) *hebbar* (bzw. *hebbare Singularität*), falls eine holomorphe Funktion $F\colon G \to \mathbb{C}$ mit $F|_{G\backslash\{z_0\}} = f$ existiert,

(*ii*) *Pol* (oder *Polstelle*) von f, falls $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$,

(*iii*) *wesentliche Singularität* sonst.

Bemerkung. Nach Satz 6.7 ist z_0 bereits hebbar, falls eine stetige Funktion F mit $F|_{G\backslash\{z_0\}} = f$ existiert. Dies ist der Fall, falls $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existiert.

Allgemeiner ist folgender Satz.

Satz 12.6 (Riemannscher Hebbarkeitssatz). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $z_0 \in G$ und $f\colon G\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, also z_0 isolierte Singularität von f. Gilt*

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0) f(z) = 0,$$

so ist z_0 hebbar.

Beweis. Sei $g\colon G \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)f(z), & z \neq z_0, \\ 0, & z = z_0. \end{cases}$$

Dann ist g holomorph in $G \backslash \{z_0\}$ und stetig in G. Damit ist g nach Satz 6.7 holomorph in G. Nach Satz 7.2 existiert eine holomorphe Funktion $F\colon G \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = (z - z_0)F(z)$. Offensichtlich gilt $F|_{G\backslash\{z_0\}} = f$. $\square$

Bemerkung. Insbesondere ist z_0 hebbar, wenn f beschränkt ist.

Satz 12.7. *Eine isolierte Singularität z_0 von f ist genau dann Pol, wenn $p \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ existieren, so dass*

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^p f(z) = c.$$

Beweis. Existieren p und c mit der gesamten Eigenschaft, so gilt offensichtlich $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$, das heißt, z_0 ist Pol.

Sei nun z_0 Pol. Dann existiert eine Umgebung U von z_0 mit $f(z) \neq 0$ für $z \in U\backslash\{z_0\}$. Sei $h\colon U\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$, $h(z) = 1/f(z)$. Dann ist h holomorph und es gilt $\lim_{z\to z_0} h(z) = 0$. Damit ist z_0 eine hebbare Singularität von h und für die holomorphe Fortsetzung H von h auf G gilt $H(z_0) = 0$. Nach Satz 7.2 existieren $p \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion $g\colon U \to \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$, so dass $H(z) = (z - z_0)^p g(z)$ für $z \in U$. Es folgt, dass

$$(z - z_0)^p f(z) = \frac{(z - z_0)^p}{h(z)} = \frac{1}{g(z)}$$

für $z \in U\backslash\{z_0\}$ und damit

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^p f(z) = \frac{1}{g(z_0)} \neq 0. \qquad \square$$

Bemerkung. Es ist leicht zu sehen, dass p und c in Satz 12.7 eindeutig bestimmt sind.

Definition 12.8. Sei z_0 Pol von f und $p \in \mathbb{N}$ gemäß Satz 12.7. Dann heißt p *Ordnung* (oder *Vielfachheit*) des Pols z_0.

Satz 12.9. *Seien $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $f\colon D(z_0, r)\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, also z_0 isolierte Singularität von f. Sei*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

die Laurentreihenentwicklung von f in $D(z_0, r)\backslash\{z_0\}$. Dann gilt:

(*i*) *f ist genau dann hebbar, wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$;*

(*ii*) *f ist genau dann Pol der Ordnung $p \in \mathbb{N}$, wenn $a_{-p} \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < -p$;*

(iii) f ist genau dann wesentliche Singularität, wenn unendlich viele $n < 0$ mit $a_n \neq 0$ existieren.

Beweis. Behauptung (i) folgt direkt aus der Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen.

Zum Beweis von (ii) sei z_0 Pol der Ordnung p. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz (oder auch Satz 6.7) kann

$$g\colon D(z_0, r)\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}, \quad g(z) = (z - z_0)^p f(z)$$

zu einer holomorphen Funktion $g\colon D(z_0, r) \to \mathbb{C}$ fortgesetzt werden, mit $g(z_0) \neq 0$. Sei

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$$

die Potenzreihenentwicklung von g. Es folgt, dass

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^{k-p} = \sum_{k=-p}^{\infty} b_{k+p} (z - z_0)^p,$$

also $a_{-p} = b_0 = g(z_0) \neq 0$ und $a_n = 0$ für $n < -p$.

Sei umgekehrt $a_{-p} \neq 0$ und $a_n = 0$ für $n < -p$. Dann gilt

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^p f(z) = \lim_{z \to z_0} \sum_{n=-p}^{\infty} a_n (z - z_0)^{p+n} = a_{-p} \neq 0,$$

also ist z_0 Pol der Ordnung p.

Behauptung (iii) folgt direkt aus (i) und (ii). □

Satz 12.10 (Satz von Casorati-Weierstraß). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $z_0 \in G$ und $f\colon G\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist z_0 wesentliche Singularität von f, so gilt*

$$\overline{f(U\backslash\{z_0\})} = \mathbb{C}$$

für jede Umgebung $U \subseteq G$ von z_0.

Beweis. Sei $a \in \mathbb{C}\backslash\overline{f(U\backslash\{z_0\})}$. Da $\mathbb{C}\backslash\overline{f(U\backslash\{z_0\})}$ offen ist, existiert $\delta > 0$ mit $D(a, \delta) \subset \mathbb{C}\backslash\overline{f(U\backslash\{z_0\})}$, das heißt, $D(a, \delta) \cap \overline{f(U\backslash\{z_0\})} = \emptyset$. Hieraus folgt, dass $|f(z) - a| \geq \delta$ für alle $z \in U$. Wir betrachten nun

$$g\colon U \to \mathbb{C}, \quad g(z) = \frac{1}{f(z) - a}.$$

Dann ist g holomorph und es gilt $|g(z)| \leq 1/\delta$ für $z \in U$. Damit ist z_0 nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz hebbare Singularität von g. Die holomorphe Fortsetzung von g bezeichnen wir wieder mit g. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: $g(z_0) \neq 0$. Dann gilt wegen $f(z) = 1/g(z) + a$, dass

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \frac{1}{g(z_0)} + a$$

Damit ist z_0 hebbare Singularität.

Fall 2: $g(z_0) = 0$. Dann folgt

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty.$$

Also ist z_0 Pol.

In beiden Fällen erhält man einen Widerspruch. $\square$

Bemerkung. Tatsächlich gilt unter den Voraussetzungen von Satz 12.10 eine wesentlich stärkere Aussage: $\mathbb{C} \backslash f(U \backslash \{z_0\})$ *enthält höchstens einen Punkt.* Diese Aussage ist der *(große) Satz von Picard.*

13 Der Residuensatz

Definition 13.1. Sei z_0 isolierte Singularität von f, das heißt, es existiert $R > 0$ so dass f holomorph in $D(z_0, R) \backslash \{z_0\}$ ist. Dann heißt

$$\operatorname{res}(f, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = r} f(z) dz,$$

wobei $0 < r < R$, das *Residuum* von f in z_0.

Bemerkung. Nach Folgerung 11.2 (und dem Beispiel dazu) hängt das Residuum nicht von der Wahl von r ab.

Satz 13.2. *Sei z_0 isolierte Singularität von f, also f holomorph in $D(z_0, R) \backslash \{z_0\}$ für ein $R > 0$. Hat f die Laurentreihenentwicklung*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

in $D(z_0, R) \backslash \{z_0\}$, so gilt $\operatorname{res}(f, z_0) = a_{-1}$.

Beweis. Die Behauptung ist eine unmittelbare Folgerung aus Satz 12.3. $\square$

Satz 13.3 (Residuensatz). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet und f holomorph in G bis auf isolierte Singularitäten, das heißt, es existiert eine diskrete Teilmenge S von G, so dass $f \colon G \backslash S \to \mathbb{C}$ holomorph ist.*

Sei Γ nullhomologer Zyklus in G, auf dessen Spur keine Singularität von f liegt, also $\operatorname{Sp}(\Gamma) \cap S = \emptyset$. *Dann ist*

$$E := \{z \in S \colon n(\Gamma, z) \neq 0\}$$

endlich und es gilt

$$\int_\Gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in E} \operatorname{res}(f, z)\, n(\Gamma, z)$$

Bemerkung. Die Summe rechts schreibt man auch in der Form

$$\sum_{z \in G} \operatorname{res}(f, z)\, n(\Gamma, z),$$

mit dem Verständnis, dass $\operatorname{res}(f, z) = 0$ für $z \in G \backslash S$.

Beweis von Satz 13.3. Es ist

$$K = \{z \in G \colon n(\Gamma, z) \neq 0\} \cup \mathrm{Sp}(\Gamma)$$

kompakte Teilmenge von G. Damit ist $E = K \cap S$ endlich, etwa $E = \{z_1, \dots, z_k\}$.

Sei $R_j > 0$ mit $D(z_j, R_j) \subseteq G$ und $D(z_j, R_j) \cap S = \{z_j\}$. Sei $0 < r_j < R_j$ und sei γ_j der Kreis um z_j vom Radius r_j (in Standardparametrisierung). Wir setzen

$$\Gamma' = \sum_{j=1}^{k} n(\Gamma, z_j)\gamma_j.$$

Dann gilt $n(\Gamma', z_j) = n(\Gamma, z_j)$ für $j = 1, \dots, k$ und für $s \in S \backslash E$ erhält man $n(\Gamma', s) = n(\Gamma, s) = 0$. Ebenso gilt $n(\Gamma', z) = n(\Gamma, z) = 0$ für alle $z \notin G$.

Es folgt, dass Γ und Γ' homolog in $G \backslash S$ sind, also

$$\Gamma \sim_{G \backslash S} \Gamma.$$

Damit folgt nach Cauchy-Integralsatz, bzw. einer unmittelbaren Folgerung daraus (Folgerung 11.2), dass

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma'} f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} n(\Gamma, z_j) \int_{\gamma_j} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} n(\Gamma, z_j)\mathrm{res}(f, z_j). \qquad \square$$

Der folgende Satz erlaubt die Berechnung des Residuums bei Polstellen.

Satz 13.4. *Sei z_0 Pol der Ordnung p von f und sei g die in einer Umgebung von z_0 holomorphe Fortsetzung der durch $z \mapsto (z - z_0)^p f(z)$ gegebenen Funktion. Dann gilt*

$$\mathrm{res}(f, z_0) = \frac{1}{(p-1)!} g^{(p-1)}(z_0) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left((z - z_0)^p f(z)\right).$$

Beweis. Sei f holomorph in $D(z_0, R) \backslash \{z_0\}$ mit Laurentreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{k=-p}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Es folgt

$$g(z) = \sum_{k=-p}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k+p} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j-p} (z - z_0)^j,$$

also

$$g^{(p-1)}(z_0) = (p-1)!\, a_{-1} = (p-1)!\, \mathrm{res}(f, z_0). \qquad \square$$

Bemerkungen. 1. Der Beweis zeigt, dass die Behauptung allgemeiner auch dann gilt, wenn p größer oder gleich der Ordnung des Pols z_0 ist.

2. Im Spezialfall $p = 1$ folgt

$$\operatorname{res}(f, z_0) = g(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Hieraus folgt, dass die Cauchy-Integralformel ein Spezialfall des Residuensatzes ist, denn es gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = n(\Gamma, z) \operatorname{res}\left(\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, z\right) = n(\Gamma, z) f(z).$$

Beispiel. Sei $f\colon \mathbb{C} \backslash \{\pm i\} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}.$$

Es sind $\pm i$ dreifache Pole. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}(f, i) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \to i} \frac{d^2}{dz^2} \left((z-i)^3 f(z)\right) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z \to i} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{(z+i)^3}\right) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z \to i} \frac{(-3) \cdot (-4)}{(z+i)^5} \\
&= \frac{1}{2} \frac{12}{(2i)^5} \\
&= \frac{3}{16i}.
\end{aligned}$$

Zu den bekanntesten Anwendungen des Residuensatzes zählt die Berechnung bestimmter reeller Integrale. Wir betrachten drei Beispiele.

Beispiele. 1. Wir wollen das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3} dx$$

berechnen.

Das Integral existiert nach Vergleichskriterium. Eigentlich benötigen wir den Residuensatz nicht, die Cauchy-Integralformel genügt, vgl. das Beispiel dort. Die Methode, auch Residuenkalkül genannt, soll aber illustriert werden.

Wir wählen für $R > 1$ Kurven α_R, β_R wie im dortigen Beispiel, vgl. Abbildung 12. Es gilt mit $\gamma_R = \alpha_R + \beta_R$ und

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$$

dann

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}(f, i) = 2\pi i \frac{3}{16i} = \frac{3\pi}{8}.$$

Weiter gilt

$$\left| \int_{\beta_R} f(z) dz \right| \leq \pi R \frac{1}{(R^2-1)^3},$$

also

$$\int_{\beta_R} f(z)dz \to 0 \quad \text{für } R \to \infty.$$

Es folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \lim_{R\to\infty} \int_{\alpha_R} f(z)dz = \frac{3\pi}{8} - \lim_{R\to\infty} \int_{\beta_R} f(z)dz = \frac{3\pi}{8}.$$

An Stelle der Funktion $x \mapsto 1/(x^2+1)^3$ kann man hier auch allgemeinere rationale Funktionen betrachten. Sei also R rational, etwa $R = P/Q$, wobei P und Q teilerfremde Polynome sind. Damit das Integral über R von $-\infty$ bis $+\infty$ existiert, muss $\operatorname{Grad}(Q) \geq \operatorname{Grad}(P) + 2$ und $Q(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten. Obige Methode liefert dann mit $E = \{\zeta \in \mathbb{C} \colon Q(\zeta) = 0, \operatorname{Im} \zeta > 0\}$ die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{\zeta \in E} \operatorname{res}(R, \zeta).$$

2. Sei R rational, also $R = P/Q$, wobei P und Q teilerfremde Polynome sind. Es gelte $\operatorname{Grad}(Q) \geq \operatorname{Grad}(P) + 1$ und $Q(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sei weiter $\alpha > 0$. Wir werden zeigen, dass mit $E = \{\zeta \in \mathbb{C} \colon Q(\zeta) = 0, \operatorname{Im} \zeta > 0\}$ die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{i\alpha x}dx = 2\pi i \sum_{\zeta \in E} \operatorname{res}(R(z)e^{i\alpha z}, \zeta)$$

gilt.

Falls $R(x) \in \mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R}$ folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos \alpha x dx = \operatorname{Re}\left(2\pi i \sum_{\zeta \in E} \operatorname{res}(R(\zeta)e^{i\alpha z}, \zeta)\right)$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin \alpha x dx = \operatorname{Im}\left(2\pi i \sum_{\zeta \in E} \operatorname{res}(R(z)e^{i\alpha z}, \zeta)\right).$$

Zum Beweis wählen wir $R_1, R_2 > 1$, setzen $R_3 = R_1 + R_2$ und betrachten die Integrationswege $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ wie in Abbildung 14 skizziert.

Wir wählen R_1, R_2 dabei so, dass für alle Nullstellen ζ von q die Ungleichungen $-R_2 < \operatorname{Re} \zeta < R_1$ und $|\operatorname{Im} \zeta| < R_3$ gelten. Mit $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ gilt also $n(\gamma, \zeta) = 1$ falls $Q(\zeta) = 0$ und $\operatorname{Im} \zeta > 0$. Mit $f(z) = R(z)e^{i\alpha z}$ folgt

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\zeta \in E} \operatorname{res}(f, \zeta).$$

Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen können, dass

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz \to 0 \quad \text{für } R_1 \to \infty, \qquad \int_{\gamma_4} f(z)dz \to 0 \quad \text{für } R_2 \to \infty,$$

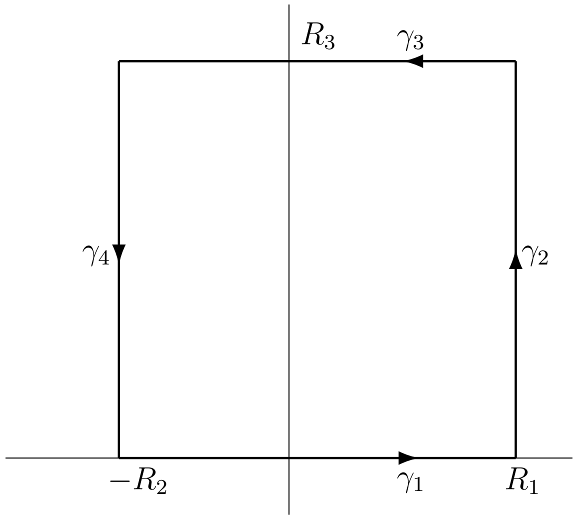

Abbildung 14: Der Integrationsweg $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$.

und

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz \to 0 \quad \text{für } R_3 \to \infty.$$

Denn dann konvergiert

$$\int_{-R_1}^{R_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

für $R_1 \to \infty$ und $R_2 \to \infty$ gegen den angegebenen Wert. Man beachte, dass $R_3 = R_1 + R_2 \to \infty$ falls $R_1 \to \infty$ oder $R_2 \to \infty$.

Wegen $\mathrm{Grad}(Q) \geq \mathrm{Grad}(P) + 1$ existieren $R_0 > 0$ und $K > 0$ mit

$$|R(z)| \leq K|z|^{\mathrm{Grad}(P)-\mathrm{Grad}(Q)} \leq \frac{K}{|z|}$$

für $|z| \geq R_0$. Wir können annehmen, dass $R_1, R_2 > R_0$ gilt. Es folgt

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| &\leq \int_{\gamma_2} |f(z)| \cdot |dz| \\
&\leq \frac{K}{R_1} \int_{\gamma_2} |e^{i\alpha z}| \cdot |dz| \\
&= \frac{K}{R_1} \int_0^{R_3} |e^{i\alpha(R_1+iy)}| dy \\
&= \frac{K}{R_1} \int_0^{R_3} e^{-\alpha y} dy \\
&= \frac{K}{R_1} \left(-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha R_3} + \frac{1}{\alpha}\right) \\
&\leq \frac{K}{\alpha R_1},
\end{aligned}$$

also

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz \to 0 \quad \text{für } R_1 \to 0.$$

Analog folgt

$$\int_{\gamma_4} f(z)dz \to 0 \quad \text{für } R_2 \to \infty.$$

Schließlich gilt

$$\left|\int_{\gamma_3} f(z)dz\right| \leq L(\gamma_3) \max_{z\in \mathrm{Sp}(\gamma_3)} |f(z)| \leq (R_1+R_2)\frac{K}{R_3}e^{-\alpha R_3} = Ke^{-\alpha R_3}.$$

Also gilt auch

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz \to 0 \quad \text{für } R_3 = R_1+R_2 \to \infty.$$

Die Behauptung folgt.

Als konkretes Beispiel betrachten wir

$$I = \int_0^\infty \frac{x\sin(ax)}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)^2}dx$$

wobei $a, b, c > 0$ und $b \neq c$.

Zunächst gilt $I = \frac{1}{2}J$ mit

$$J = \int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin(ax)}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)^2}dx = \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^\infty f(z)dz\right),$$

wobei

$$f(z) = \frac{ze^{iaz}}{(z^2+b^2)(z^2+c^2)^2}.$$

Die Funktion f hat die einfachen Pole $\pm ib$ und die doppelten Pole $\pm ic$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}(f, ib) &= \lim_{z\to ib}(z-ib)f(z) \\
&= \lim_{z\to ib}\left(\frac{ze^{iaz}}{(z+ib)(z^2+c^2)^2}\right) \\
&= \frac{ibe^{-ab}}{2ib(-b^2+c^2)^2} \\
&= \frac{e^{-ab}}{2(c^2-b^2)^2}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}(f, ic) &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to ic}\frac{d}{dz}\left((z-ic)^2 f(z)\right) \\
&= \lim_{z\to ic}\frac{d}{dz}\left(\frac{ze^{iaz}}{(z^2+b^2)(z+ic)^2}\right) \\
&= \lim_{z\to ic} e^{iaz}\left(\frac{1+iaz}{(z^2+b^2)(z+ic)^2} - \frac{z(2z(z+ic)+(z^2+b^2)2)}{(z^2+b^2)^2(z+ic)^3}\right) \\
&= e^{-ac}\left(\frac{1-ac}{(-c^2+b^2)(-4c^2)} - \frac{ic(2ic\cdot 2ic+(-c^2+b^2)2)}{(-c^2+b^2)^2(-8ic^3)}\right) \\
&= e^{-ac}\left(\frac{ac-1}{4c^2(b^2-c^2)} + \frac{-4c^2+2(b^2-c^2)}{8c^2(b^2-c^2)^2}\right) \\
&= e^{-ac}\left(\frac{a}{(b^2-c^2)4c} - \frac{1}{2(b^2-c^2)^2}\right).
\end{aligned}$$

Es folgt

$$J = \mathrm{Im}(2\pi i\ (\mathrm{res}(f, ib) + \mathrm{res}(f, ic))) = 2\pi\left(\frac{e^{-ab}}{2(c^2-b^2)^2} + \frac{ae^{-ac}}{4c(b^2-c^2)} - \frac{e^{-ac}}{2(b^2-c^2)^2}\right)$$

und damit

$$I = \frac{1}{2}J = \pi\left(\frac{e^{-ab}-e^{-ac}}{2(b^2-c^2)^2} + \frac{ae^{-ac}}{4c(b^2-c^2)}\right).$$

3. Wir berechnen das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{(x+c)^2}dx,$$

wobei $c > 0$, $-1 < \alpha < 1$ und $\alpha \neq 0$.

Wir betrachten $g\colon \mathbb{C}\backslash[0,\infty) \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = z^\alpha = \exp(\alpha \log z) = \exp(\alpha(\log|z| + i\arg z)) = |z|^\alpha \exp(i\alpha \arg z),$$

wobei $0 < \arg z < 2\pi$. Sei

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z+c)^2}$$

und für $0 < \varepsilon < r < c < R$ seien $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ die in Abbildung 15 skizzierten Integrationswege. Die Funktion f ist holomorph in $\mathbb{C}\backslash[0,\infty)$ und hat in $-c$ eine doppelte Polstelle.

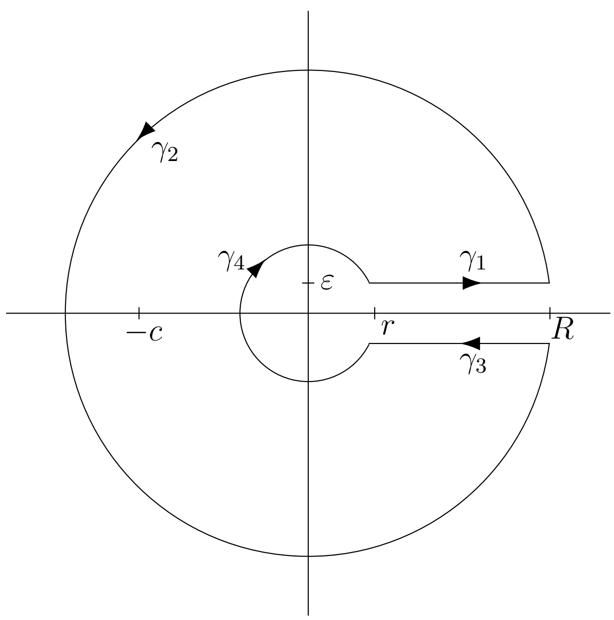

Abbildung 15: Der Integrationsweg $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$.

Die Kurve $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ ist nullhomolog in $\mathbb{C}\backslash[0,\infty)$ und damit gilt wegen $n(\gamma, -c) = 1$ und

$$g'(z) = \frac{\alpha}{z}g(z)$$

nach Residuensatz

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= 2\pi i \ \mathrm{res}(f, -c) \\ &= 2\pi i \ g'(-c) \\ &= 2\pi i \frac{\alpha}{-c} g(-c) \\ &= \frac{2\pi i\alpha}{-c} c^\alpha e^{i\alpha\pi} \\ &= -2\pi i\alpha c^{\alpha-1} e^{i\alpha\pi}.\end{aligned}$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgt

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz \to \int_r^R \frac{x^\alpha}{(x+c)^2} dx$$

und

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz \to -e^{i2\pi\alpha} \int_r^R \frac{x^\alpha}{(x+c)^2} dx.$$

Weiter gilt

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z)dz \right| \leq 2\pi R \frac{R^\alpha}{(R-c)^2} = 2\pi \frac{R^{1+\alpha}}{(R-c)^2}$$

und

$$\left| \int_{\gamma_4} f(z)dz \right| \leq 2\pi r \frac{r^\alpha}{(c-r)^2} = 2\pi \frac{r^{1+\alpha}}{(c-r)^2}.$$

Es folgt

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz \to 0$$

für $R \to \infty$ (da $\alpha < 1$) und

$$\int_{\gamma_4} f(z)dz \to 0$$

für $r \to 0$ (da $\alpha > -1$). Insgesamt folgt

$$(1 - e^{2\pi i\alpha}) \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{(x+c)^2} dx = -2\pi i\alpha c^{\alpha-1} e^{i\alpha\pi},$$

also

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{(x+c)^2} dx = \frac{-2\pi i\alpha c^{\alpha-1} e^{i\alpha\pi}}{1 - e^{2\pi i\alpha}} = \frac{-2\pi i\alpha \ c^{\alpha-1}}{e^{-i\alpha\pi} - e^{i\alpha\pi}} = \frac{\pi\alpha c^{\alpha-1}}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Bemerkung. Allgemeiner kann man mit der obigen Methode Integrale der Form

$$\int_0^\infty x^\alpha R(x) dx$$

berechnen, wobei $-1 < \alpha < 0$ und $R = P/Q$ mit Polynomen P und Q eine rationale Funktion ist, wobei $P(x) \in \mathbb{R}$ und $Q(x) \in \mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R}$ und $Q(x) \neq 0$ für $x \geq 0$. Außerdem soll das Integral natürlich existieren, das heißt, es muss

$\mathrm{Grad}(Q) > \mathrm{Grad}(P)$ gelten. Es gilt dann mit $f(z) = z^\alpha R(z)$, wobei z^α wie oben definiert ist, und $E = \{\zeta \in \mathbb{C} \colon Q(\zeta) = 0\}$

$$\int_0^\infty x^\alpha R(x)dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i\alpha}} \sum_{\zeta \in E} \mathrm{res}(f, \zeta).$$

Dies gilt auch für $0 < \alpha < 1$, falls $\mathrm{Grad}(Q) > \mathrm{Grad}(P) + 1$. Dies lässt sich auf den vorigen Fall zurückführen, indem man $zP(z)$ statt $P(z)$ betrachtet.

Neben der Berechnung gewisser reeller Integrale ist eine wichtige Anwendung des Residuensatzes in der reellen Analysis auch die Berechnung gewisser Reihen, etwa

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Allgemeiner betrachten wir die Reihen

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{2m}}$$

mit $m \in \mathbb{N}$. Wir werden den Residuensatz benutzen, um die Werte dieser Reihen zu bestimmen.

Zur Vorbereitung sei zunächst bemerkt, dass die durch $z \mapsto z/(e^z - 1)$ gegebene Funktion eine hebbare Singularität in 0 hat. Damit existiert eine in $D(0, 2\pi)$ konvergente Potenzreihenentwicklung

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^\infty \frac{B_k}{k!} z^k.$$

Es gilt $B_0 = \lim_{z\to 0} z/(e^z - 1) = 1$. Die weiteren B_k können aus

$$z = (e^z - 1) \sum_{k=0}^\infty \frac{B_k}{k!} z^k = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j!} z^j \sum_{k=0}^\infty \frac{B_k}{k!} z^k = \sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n-k)!} \right) z^n$$

durch Koeffizientenvergleich leicht rekursiv berechnet werden. Man findet etwa $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$ und $B_4 = -1/30$. Es folgt auch, dass alle B_k rationale Zahlen sind. Man nennt die B_k *Bernoullizahlen.*

Weiter gilt

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{2z + z(e^z - 1)}{2(e^z - 1)} = \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} = \frac{z}{2} \frac{\cosh z/2}{\sinh z/2} = \frac{z}{2} \coth \frac{z}{2}.$$

Da die rechte Seite eine gerade Funktion von z ist, folgt $B_{2j+1} = 0$ für $j \in \mathbb{N}$.

Wir erhalten

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^\infty \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}$$

und

$$\coth \frac{z}{2} = \frac{2}{z} \left(\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} \right) = 2 \sum_{k=0}^\infty \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1},$$

also

$$\cot z = i\coth iz = 2i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(2iz)^{2k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}z^{2k-1}.$$

Satz 13.5. *Für $m \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}} = (-1)^{m+1}\frac{2^{2m-1}B_{2m}}{(2m)!}\pi^{2m}.$$

Für $m = 1, 2, 3$ erhält man insbesondere

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Für die Werte der Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m+1}}$$

ist kein geschlossener Ausdruck bekannt. Apéry bewies 1979, dass der Wert für $m = 1$, also

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

irrational ist. Ob dies auch für die anderen Werte von m gilt, ist ein offenes Problem.

Beweis von Satz 13.5. Wir betrachten die in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ holomorphen, durch

$$g(z) = \pi\cot\pi z \quad \text{und} \quad f(z) = \frac{g(z)}{z^{2m}} = \frac{\pi\cot\pi z}{z^{2m}}$$

gegebenen Funktionen f und g. Die ganzen Zahlen sind isolierte Singularitäten von f und g und wegen

$$g(z) = \pi\cot\pi z = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}\pi^{2k}B_{2k}}{(2k)!}z^{2k-1}$$

und

$$f(z) = \frac{g(z)}{z^{2m}} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}\pi^{2k}B_{2k}}{(2k)!}z^{2k-1-2m}$$

folgt

$$\operatorname{res}(f, 0) = (-1)^m\frac{2^{2m}\pi^{2m}B_{2m}}{(2m)!}.$$

Für $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ ist n ein einfacher Pol von g und f und damit folgt mit Satz 13.4 wegen $\cos n\pi = (-1)^n$

$$\operatorname{res}(f, n) = \lim_{z\to n}(z-n)f(z) = \lim_{z\to n}\frac{(z-n)\pi\cos\pi z}{z^{2m}\sin\pi z} = \frac{(-1)^n}{n^{2m}}\lim_{z\to n}\frac{\pi(z-n)}{\sin\pi z}.$$

Den letzten Grenzwert kann man beispielsweise mit der Regel von de l'Hospital berechnen. (Dass diese auch im Komplexen gilt, erkennt man etwa durch Betrachten der Potenzreihenentwicklung.) Alternativ benutzt man $\sin(\zeta - n\pi) = (-1)^n \sin\zeta$ für $\zeta \in \mathbb{C}$ und erhält

$$\lim_{z\to n} \frac{\pi(z-n)}{\sin \pi z} = (-1)^n \lim_{z\to n} \frac{\pi(z-n)}{\sin \pi(z-n)} = (-1)^n \lim_{\zeta\to 0} \frac{\zeta}{\sin\zeta} = (-1)^n.$$

Insgesamt folgt

$$\operatorname{res}(f,n) = \frac{1}{n^{2m}}.$$

Sei nun $N \in \mathbb{N}$ und sei R_N das Rechteck mit den Ecken $\pm(N+\frac{1}{2}) \pm iN$. Dann gilt nach Residuensatz und den soeben berechneten Werten für die Residuen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R_N} f(z)dz = \sum_{n=-N}^{N} \operatorname{res}(f,n) = (-1)^m \frac{2^{2m}\pi^{2m}B_{2m}}{(2m)!} + 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{2m}}.$$

Hieraus folgt die Behauptung, wenn wir zeigen können, dass

$$\int_{\partial R_N} f(z)dz \to 0$$

für $N \to \infty$. Um dies zu zeigen, beachten wir zunächst, dass

$$\cot\zeta = \frac{e^{2i\zeta}+1}{e^{2i\zeta}-1}$$

für $\zeta \in \mathbb{C}$. Es folgt

$$g\left(\pm N + \frac{1}{2} + iy\right) = \pi\frac{e^{2\pi i(\pm N+1/2+iy)}+1}{e^{2\pi i(\pm N+1/2+iy)}-1} = \pi\frac{e^{\pi i - 2\pi y}+1}{e^{\pi i-2\pi y}-1} = \pi\frac{-e^{-2\pi y}+1}{-e^{-2\pi y}-1}$$

und damit

$$\left|g\left(\pm N + \frac{1}{2} + iy\right)\right| \le \pi$$

für $y \in \mathbb{R}$. Des Weiteren gilt

$$|g(x+iN)| = \left|\pi\frac{e^{2\pi i(x+iN)}+1}{e^{2\pi i(x+iN)}-1}\right| = \pi\left|\frac{e^{2\pi ix-2\pi N}+1}{e^{2\pi ix-2\pi N}-1}\right| \le \pi\frac{1+e^{-2\pi N}}{1-e^{-2\pi N}} \le 2\pi$$

und analog

$$|g(x-iN)| \le 2\pi$$

für $x \in \mathbb{R}$. Insgesamt folgt $|g(z)| \le 2\pi$ für alle $z \in \partial R_N$ und damit

$$|f(z)| \le \frac{2\pi}{N^{2m}}$$

für alle $z \in \partial R_N$. Es folgt

$$\left|\int_{\partial R_N} f(z)dz\right| \le L(\partial R_N)\frac{2\pi}{N^{2m}} = \frac{(8N+2)2\pi}{N^{2m}}$$

und damit

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\partial R_N} f(z)dz = 0. \qquad \square$$

14 Einige funktionentheoretische Anwendungen des Residuensatzes

Der Residuensatz erlaubt, unter gewissen Annahmen die Anzahl der Nullstellen einer holomorphen Funktion in einem gewissen Gebiet zu bestimmen. Ein allgemeines Resultat dieser Art ist der folgende Satz.

Satz 14.1 (Argumentprinzip). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet und f holomorph in G bis auf Polstellen, das heißt, es existiert eine diskrete Teilmenge P von G, so dass $f\colon G\backslash P \to \mathbb{C}$ holomorph ist und jeder Punkt von P eine Polstelle von f ist.*

Sei N die Menge der Nullstellen von f. Weiter sei $N = \{a_k\colon k \in I\}$ und $P = \{b_k\colon k \in J\}$, mit abzählbaren (oder endlichen) Indexmengen I und J. Für $k \in I$ sei n_k die Vielfachheit der Nullstelle a_k und für $k \in J$ sei p_k die Vielfachheit des Poles b_k. Schließlich sei Γ nullhomologer Zyklus in G, dessen Spur keine Null- oder Polstellen enthält. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k\in I} n(\Gamma, a_k)n_k - \sum_{k\in J} n(\Gamma, b_k)p_k,$$

wobei die Summen rechts endlich sind.

Beweis. Nach Residuensatz gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k\in I} n(\Gamma, a_k)\mathrm{res}\left(\frac{f'}{f}, a_k\right) - \sum_{k\in J} n(\Gamma, b_k)\mathrm{res}\left(\frac{f'}{f}, b_k\right).$$

Zu zeigen ist also nur, dass $\mathrm{res}(f'/f, a_k) = n_k$ und $\mathrm{res}(f'/f, b_k) = p_k$ für $k \in I$ bzw. $k \in J$. Sei $k \in I$. Dann gilt $f(z) = (z - a_k)^{n_k} g(z)$, wobei g holomorph in a_k mit $g(a_k) \neq 0$ ist. Es folgt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_k}{z - a_k} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

in einer Umgebung von a_k und damit $\mathrm{res}(f'/f, a_k) = n_k$. Der Fall eines Pols ist analog. □

Bemerkungen. 1. Seien f, G, P und N wie in Satz 14.1. Sei $\overline{D(z_0, r)} \subseteq G$ und $z \notin P \cup N$ für $z \in \partial D(z_0, r)$. Weiter sei n die Anzahl der Nullstellen in $D(z_0, r)$ und p die Anzahl der Pole in $D(z_0, r)$, jeweils gezählt gemäß Vielfachheit. Dann gilt nach Argumentprinzip

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = n - p.$$

2. Statt f kann man für $w \in \mathbb{C}$ auch $f - w$ betrachten. Das Integral

$$\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w}dz$$

„zählt“ dann die w-Stellen anstelle der Nullstellen, bzw. die Differenz der Anzahl der w-Stellen und der Anzahl der Polstellen.

3. Ist $\gamma\colon [a,b] \to G\backslash(P \cup N)$ geschlossener Integrationsweg, so gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\gamma'(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{(f\circ\gamma)'(t)}{(f\circ\gamma)(t)}dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma} \frac{dw}{w} \\ &= n(f\circ\gamma, 0).\end{aligned}$$

Gemäß Interpretation der Windungszahl gibt das Integral also an, wie stark das Argument von $f(z)$ wächst, wenn z die Kurve γ durchläuft, das heißt, wie stark das Argument von $f(\gamma(t))$ wächst, wenn t das Intervall $[a,b]$ durchläuft. Daher heißt obiger Satz „Argumentprinzip".

Die Anzahl der Nullstellen von f ist für eine holomorphe Funktion f also gleich der Windungszahl der Kurve $f\circ\gamma$ bezüglich des Nullpunkts. Analog ist $n(f\circ\gamma, w)$ die Anzahl der w-Stellen.

Ist etwa f holomorph in einem Gebiet G, welches die Kreisscheibe $\overline{D(z_0,r)}$ enthält, ist $f(z) \neq w$ für $z \in \partial D(z_0,r)$ und ist γ Parametrisierung von $\partial D(z_0,r)$, so ist $n(f\circ\gamma, w)$ die Anzahl der w-Stellen von f in $D(z_0,r)$; vgl. auch Abbildung 16.

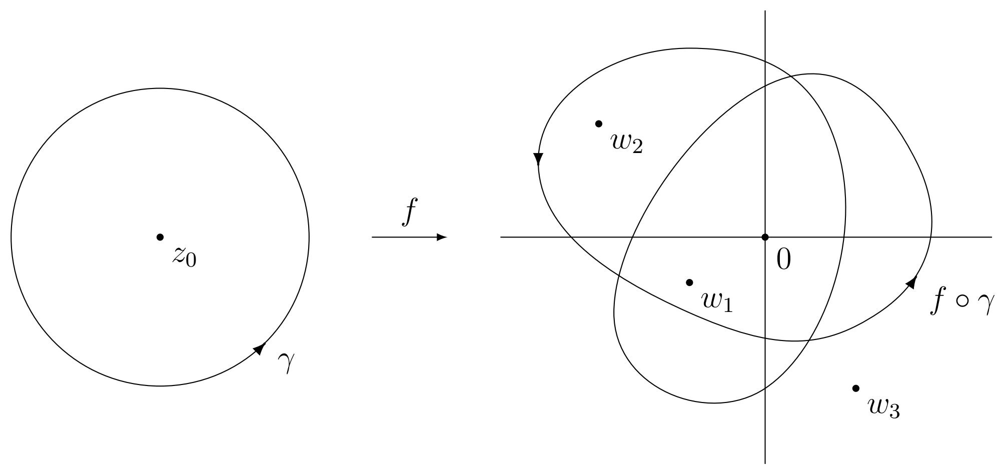

Abbildung 16: In der abgebildeten Situation hat f zwei Nullstellen und zwei w_1-Stellen, eine w_2-Stelle, und keine w_3-Stelle in der von γ berandeten Kreisscheibe.

Satz 14.2 (Satz von Rouché). *Seien $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $f, g\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph und Γ nullhomologer Zyklus in G mit $n(\Gamma, z) \in \{0,1\}$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash \operatorname{Sp}(\Gamma)$.*

Es gelte

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \quad \textit{für alle } z \in \operatorname{Sp}(\Gamma).$$

Dann haben f und g gleich viele Nullstellen in $\{z \in G\colon n(\Gamma, z) = 1\}$, gezählt gemäß Vielfachheit.

Beweis. Sei $F = f/g$. Zu zeigen ist, dass F genauso viele Nullstellen wie Polstellen in $V = \{z \in G \colon n(\Gamma, z) = 1\}$ hat. Da nach Voraussetzung $f(z), g(z) \neq 0$ für alle $z \in \operatorname{Sp}(\Gamma)$ gilt, folgt dies nach Argumentprinzip (vgl. auch die erste Bemerkung dazu), falls

$$\int_\Gamma \frac{F'(z)}{F(z)} dz = 0.$$

Nun gilt für $z \in \operatorname{Sp}(\Gamma)$

$$|F(z) - 1| = \left| \frac{f(z) - g(z)}{g(z)} \right| < \frac{|f(z)| + |g(z)|}{|g(z)|} = |F(z)| + 1,$$

also $F(z) \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Mit anderen Worten, mit $\Omega := F^{-1}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$ gilt $\operatorname{Sp}(\Gamma) \subseteq \Omega$. Mit dem Hauptwert Log des Logarithmus ist nun $\operatorname{Log} \circ F|_\Omega$ holomorph und Stammfunktion von $F'/F|_\Omega$. Es folgt

$$\int_\Gamma \frac{F'(z)}{F(z)} dz = 0. \qquad \square$$

Bemerkungen. 1. Oft wird die stärkere Voraussetzung $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ für alle $z \in \operatorname{Sp}(\Gamma)$ oder auch $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ für alle $z \in \operatorname{Sp}(\Gamma)$ gemacht. Die letzte Bedingung liefert $F(\operatorname{Sp}(\Gamma)) \subseteq D(1, 1)$ und vereinfacht die Situation insofern, als in $D(1, 1)$ der Logarithmus durch seine Potenzreihe definiert werden kann.

2. In einer typischen Situation ist Γ eine Jordankurve. Der Jordansche Kurvensatz besagt, dass dann $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}(\Gamma)$ aus zwei Komponenten besteht, einer beschränkten, die man das Innere von Γ nennt, und einer unbeschränkten, dem Äußeren von Γ. Bei entsprechender Orientierung gilt $n(\Gamma, z) = 1$ für z aus dem Inneren von Γ. Im Satz von Rouché ist also V das Innere einer Jordankurve.

Wir werden den Jordanschen Kurvensatz in seiner allgemeinen Form nicht benötigen. Andererseits sind die Integrationswege, die in vielen Beispielen zur Cauchy-Integralformel oder zum Residuensatz benutzt wurden, Jordankurven.

Beispiele. 1. Sei $p(z) = z^4 - 4z + 2$ und $f(z) = -4z + 2$. Dann gilt für $|z| = 1$, dass

$$|p(z) - f(z)| = |z^4| = 1 < 2 \leq |-4z + 2| = |f(z)|.$$

Da f die einfache Nullstelle $\frac{1}{2}$ und keine weiteren Nullstellen in $D(0, 1)$ hat, hat p nach Satz von Rouché genau eine Nullstelle in $D(0, 1)$. Sei $h(z) = z^4$. Für $|z| = 2$ gilt

$$|p(z) - h(z)| = |-4z + 2| \leq 10 < 16 = |z|^4 = |h(z)|.$$

Da h eine vierfache Nullstelle in 0 hat, hat p genau 4 Nullstellen in $D(0, 2)$, gezählt gemäß Vielfachheit.

2. Sei $f(z) = e^z + z^4$, vgl. das Beispiel zum Minimumprinzip. Mit $g(z) = z^4$ folgt für $|z| = 2$, dass

$$|f(z) - g(z)| \leq e^2 < 16 = |z|^4.$$

Damit hat f genau 4 Nullstellen in $D(0, 2)$, gezählt gemäß Vielfachheit. (Es ist leicht zu sehen, dass diese alle einfach sind, denn gilt $f(z) = f'(z) = 0$, so folgt $z^4 = 4z^3$, also $z = 0$, aber es gilt $f(0) \neq 0$.)

3. Sei

$$f(z) = z^5 - 1 + \frac{1}{2}e^z.$$

Wir behaupten, dass f genau zwei Nullstellen in der linken Halbebene

$$H_\ell = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z < 0\}$$

hat. Zum Beweis dieser Aussage betrachten wir

$$g(z) = z^5 - 1$$

und für $R \geq 2$ den in Abbildung 17 skizzierten Integrationsweg $\gamma_R = \alpha_R + \beta_R$.

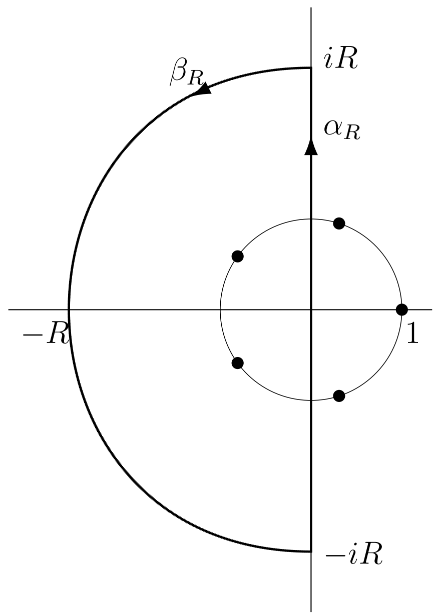

Abbildung 17: Der Integrationsweg $\alpha_R + \beta_R$.

Für $z \in \operatorname{Sp}(\beta_R)$ gilt

$$|f(z) - g(z)| = \frac{1}{2}|e^z| = \frac{1}{2}e^{\operatorname{Re} z} \leq \frac{1}{2} < R^5 - 1 = |z|^5 - 1 \leq |z^5 - 1| = |g(z)|$$

und für $z \in \operatorname{Sp}(\alpha_R)$ gilt

$$|f(z) - g(z)| = \frac{1}{2}e^{\operatorname{Re} z} = \frac{1}{2} < 1 = 1 - \operatorname{Re}(z^5) = -\operatorname{Re} g(z) \leq |g(z)|.$$

Damit gilt

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|$$

für alle $z \in \operatorname{Sp}(\alpha_R)$. Also haben f und g nach Satz von Rouché gleich viele Nullstellen in $\{z \in H_\ell \colon |z| < R\}$. Die Nullstellen von g sind die fünften Einheitswurzeln, von denen zwei in H_ℓ liegen. (In Abbildung 17 sind die Nullstellen durch Punkte markiert.)

Damit hat f ebenfalls zwei Nullstellen in $\{z \in H_\ell \colon |z| < R\}$. Da $R \geq 2$ beliebig war, hat f genau zwei Nullstellen in H_ℓ, gezählt gemäß Vielfachheit.

Satz 14.3. *Seien $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $w_0 = f(z_0)$. Sei k die Vielfachheit der w_0-Stelle z_0. Dann existieren (beliebig kleine) Umgebungen V von z_0 und W von w_0, so dass für alle $w \in W \setminus \{w_0\}$ die Anzahl der w-Stellen in V genau k ist, wobei alle w-Stellen einfach sind.*

Beweis. Für r klein genug gilt $f(z) \neq w_0$ und $f'(z) \neq 0$ für $z \in \overline{D(z_0, r)} \setminus \{z_0\}$. Sei γ Parametrisierung von $\partial D(z_0, r)$. Wir setzen $V = D(z_0, r)$ und wählen W als die Komponente von $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}(f \circ \gamma)$, die w_0 enthält. Sei $w \in W$. Für die Anzahl N_w der w-Stellen von f in V gilt dann nach Argumentprinzip

$$N_w = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - w} = n(f \circ \gamma, w) = n(f \circ \gamma, w_0) = N_{w_0} = k,$$

da $n(f \circ \gamma, w)$ auf den Komponenten von $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}(f \circ \gamma)$ konstant ist. $\square$

Bemerkung. In Satz 14.3 werden in V im Allgemeinen auch noch Punkte außerhalb von W angenommen. Die Komponente U von $f^{-1}(W)$, die z_0 enthält, ist nur eine Teilmenge von V; vgl. auch Abbildung 18. Die Punkte in $W \setminus \{w_0\}$ haben genau k Urbilder in $U \setminus \{z_0\}$.

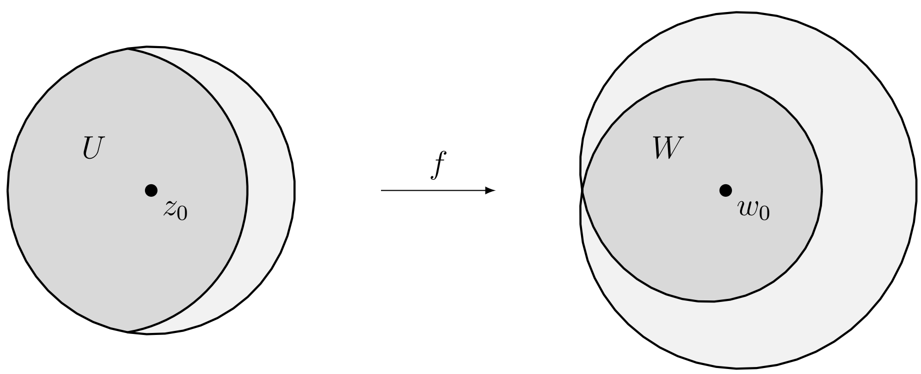

Abbildung 18: Illustration zum Beweis von Satz 14.3, für $f(z) = z^2 + z/3$, $z_0 = w_0 = 0$ und $r = 1$.

Folgerung 14.4. Seien $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$. Genau dann existiert eine Umgebung U von z_0, so dass $f|_U$ injektiv ist, wenn $f'(z_0) \neq 0$ gilt.

In der reellen Analysis muss die Umkehrfunktion einer differenzierbaren, bijektiven Funktion nicht differenzierbar sein; das Standardbeispiel ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, wo die Umkehrfunktion in $0 = f(0)$ nicht differenzierbar ist. Gilt aber $f'(x) \neq 0$, so existiert die Ableitung der Umkehrfunktion im Punkt $f(x)$, mit $(f^{-1})'(f(x)) = 1/f'(x)$. Der Beweis überträgt sich direkt auf komplexe Differenzierbarkeit. Da hier nach Folgerung 14.4 die Voraussetzung $f'(x) \neq 0$ automatisch erfüllt ist, erhält man folgendes Resultat.

Satz 14.5. *Seien $G, H \subseteq \mathbb{C}$ Gebiete und $f\colon G \to H$ holomorph und bijektiv. Dann ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} holomorph, mit $(f^{-1})'(f(z)) = 1/f'(z)$ für $z \in G$.*

Bijektive, holomorphe Funktionen nennt man auch *biholomorph*.

Das Argumentprinzip erlaubt auch, Aussagen über die Anzahl der Nullstellen des Grenzwerts einer Folge holomorpher Funktionen zu treffen. Der in der Funktionentheorie angemessene Grenzwertbegriff ist dabei die gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Teilmengen, wie sie bereits im Satz von Weierstraß (Satz 6.8) benutzt wurde. Im Beweis des dortigen Satzes wurde implizit bereits folgende Aussage bewiesen.

Lemma 14.6. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, (f_n) eine Folge in G holomorpher Funktionen und $f\colon G \to \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent*

- (i) *Für jedes Kompaktum $K \subset G$ konvergiert $(f_n|_K)$ gleichmäßig gegen $f|_K$;*
- (ii) *Jeder Punkt in G besitzt eine Umgebung $U \subseteq G$, so dass $(f_n|_U)$ gleichmäßig gegen $f|_U$ konvergiert.*

Bei (i) spricht man von *kompakter Konvergenz*, bei (ii) von *lokal gleichmäßiger Konvergenz*. Die Begriffe sind also äquivalent. Wir benutzen im Allgemeinen den zweiten.

Satz 14.7 (Satz von Hurwitz). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet und (f_n) eine Folge in G holomorpher Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ konvergiert.*

Sei $z_0 \in G$, $r > 0$, $\overline{D(z_0, r)} \subseteq G$ und $f(z) \neq 0$ für $z \in \partial D(z_0, r)$, insbesondere also $f \not\equiv 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N$ die Funktionen f_n und f gleich viele Nullstellen in $D(z_0, r)$ haben, gezählt gemäß Vielfachheit.

Beweis. Für n genügend groß gilt auch $f_n(z) \neq 0$ für $z \in \partial D(z_0, r)$. Nach Argumentprinzip ist durch das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\, dz$$

die Anzahl der Nullstellen von f_n in $D(z_0, r)$ gegeben. Nach dem Satz von Weierstraß konvergiert das Integral gegen

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

was wiederum nach Argumentprinzip die Anzahl der Nullstellen von f in $D(z_0, r)$ ist. Die Behauptung folgt. $\square$

Folgerung 14.8. Seien G, f_n, f wie in Satz 14.7. Dann gilt:

- (i) Ist $f_n(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ und $n \in \mathbb{N}$, so ist $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ oder $f \equiv 0$.
- (ii) Sind alle f_n injektiv, so ist f injektiv oder konstant.

15 Die Riemannsche Zahlenkugel und meromorphe Funktionen

Sei

$$S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon \|x\|_2 = 1\},$$

die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ und $N := (0,0,1) \in S^2$ der „Nordpol“. Sei $\varphi\colon S^2 \to \widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definiert durch

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \dfrac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}, & (x_1, x_2, x_3) \neq N, \\ \infty, & (x_1, x_2, x_3) = N. \end{cases}$$

Für $x \in S^2 \backslash \{N\}$ gilt, dass die Punkte N, x und $(\operatorname{Re}\varphi(x), \operatorname{Im}\varphi(x), 0)$ auf einer Geraden in $\mathbb{R}^3$ liegen. Die Abbildung φ (bzw. $\varphi|_{S^2\backslash\{N\}}$) heißt *stereographische Projektion*. Es wird also $S^2\backslash\{N\}$ auf die (x_1, x_2)-Ebene projiziert, die man mit $\mathbb{C}$ identifiziert (und entsprechend wird $(\operatorname{Re}\,\varphi(x), \operatorname{Im}\,\varphi(x), 0) \in \mathbb{R}^3$ mit $\varphi(x) \in \mathbb{C}$ identifiziert); vgl. Abbildung 19.

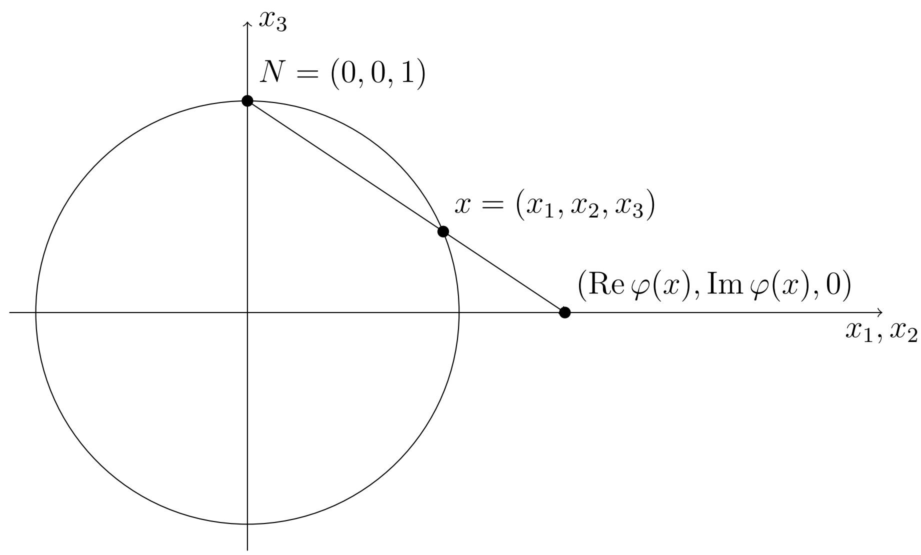

Abbildung 19: Die stereographische Projektion.

Die stereographische Projektion ist bijektiv und es gilt

$$\varphi^{-1}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{|z|^2 + 1}(2\operatorname{Re} z, 2\operatorname{Im} z, |z|^2 - 1), & z \in \mathbb{C}, \\ N, & z = \infty. \end{cases}$$

Man nennt $\widehat{\mathbb{C}}$ bzw. S^2 *Riemannsche Zahlenkugel*.

Für $z, w \in \widehat{\mathbb{C}}$ definiert man den *chordalen Abstand* $\widehat{d}(z, w)$ durch

$$\widehat{d}(z, w) = \|\varphi^{-1}(z) - \varphi^{-1}(w)\|_2.$$

Ausrechnen zeigt, dass für $z, w \neq \infty$

$$\widehat{d}(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}}$$

und
$$\widehat{d}(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$$
gilt. Tatsächlich bildet $\widehat{\mathbb{C}}$ mit dem Abstandsbegriff $\widehat{d}$ einen *metrischen Raum*; das heißt, $\widehat{d}$ ist eine *Metrik*, die sogenannte *chordale Metrik*. Der metrische Raum $(\widehat{\mathbb{C}}, \widehat{d})$ ist nach Konstruktion isometrisch zur mit der euklidischen Metrik versehenen Sphäre S^2. Dabei heißen zwei metrische Räume (X, d_x) und (Y, d_Y) *isometrisch*, falls eine bijektive Abbildung $T\colon X \to Y$ existiert, so dass $d_Y(T(x), T(x')) = d_X(x, x')$ für alle $x, x' \in X$. Die Abbildung T heißt dann *Isometrie*.

Begriffe wie offen, abgeschlossen, kompakt usw. betrachten wir für Teilmengen von $\widehat{\mathbb{C}}$ bezüglich der Metrik $\widehat{d}$. So ist also etwa eine Menge $M \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ *offen*, falls zu jedem $a \in M$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass
$$\widehat{D}(a,r) := \{z \in \widehat{\mathbb{C}}\colon \widehat{d}(z,a) < r\} \subseteq M.$$

Wir vergleichen Konvergenz bezüglich der euklidischen Metrik d mit Konvergenz bezüglich der chordalen Metrik $\widehat{d}$. Sei etwa (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$, die bezüglich der euklidischen Metrik gegen einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ konvergiert; das heißt, es gilt $d(z_n, z_0) = |z_n - z_0| \to 0$. Da $\widehat{d}(z,w) \leq 2|z-w|$ für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt, folgt, dass (z_n) auch bezüglich der chordalen Metrik gegen z_0 konvergiert; das heißt, es gilt $\widehat{d}(z_n, z_0) \to 0$. Es gilt aber auch die Umkehrung: Denn gilt $z_n \to z_0 \neq \infty$ bzgl. $\widehat{d}$, so existieren $\delta > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\widehat{d}(z_n, \infty) = 2/\sqrt{1+|z_n|^2} \geq \delta$ für $n \geq n_0$ und damit
$$|z_n - z_0| = \frac{1}{2}\widehat{d}(z_n, z)\sqrt{1+|z_n|^2}\sqrt{1+|z_0|^2} \leq \frac{1}{2}\widehat{d}(z_n, z)\frac{2}{\delta}\sqrt{1+|z_0|^2}$$
für $n \geq n_0$, also $|z_n - z_0| \to 0$.

Insgesamt gilt für eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ und einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, dass (z_n) genau dann bezüglich der euklidischen Metrik d gegen z_0 konvergiert, wenn (z_n) bezüglich der chordalen Metrik $\widehat{d}$ gegen z_0 konvergiert.

Weiterhin sieht man für eine Folge $(z_n) \in \mathbb{C}$ leicht, dass $z_n \to \infty$ bezüglich $\widehat{d}$ genau dann gilt, wenn $|z_n| \to \infty$ im Sinne des uneigentlichen Grenzwerts reeller-Zahlenfolgen gilt.

Wir definieren jetzt Holomorphie in Gebieten in $\widehat{\mathbb{C}}$, die den Punkt ∞ enthalten.

Definition 15.1. Sei $G \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ Gebiet mit $\infty \in G$. Eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ heißt holomorph, falls $f|_{G\setminus\{\infty\}}$ holomorph ist und mit $H = \{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\colon 1/z \in G\} \cup \{0\}$ auch $g\colon H \to \mathbb{C}$,
$$g(z) = \begin{cases} f(1/z), & z \neq 0, \\ f(\infty), & z = 0, \end{cases}$$
holomorph ist.

Bemerkung. Nach Satz 6.7 reicht es zu fordern, dass g stetig ist.

Eine isolierte Singularität z_0 einer holomorphen Funktion $G\setminus\{z_0\}$ heißt nach Definition 12.5 ja Pol, falls $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$. Betrachten wir den Grenzwert bezüglich der chordalen Metrik, so können wir diese Bedingung auch in der Form $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ schreiben. Es liegt nahe, $f(z_0) = \infty$ zu setzen. Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 15.2. Sei $G \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ Gebiet. Eine Funktion $f\colon G \to \widehat{\mathbb{C}}$ heißt *meromorph*, falls mit $P := f^{-1}(\infty)$ die Funktion f holomorph in $G \backslash P$ ist und jeder Punkt von P ein Pol von f ist.

Bemerkungen. 1. Insbesondere wird verlangt, dass jeder Punkt von P *isolierte* Singularität von $f|_{G \backslash P}$ ist; das heißt, P hat keine Häufungspunkte in G, ist also diskrete Teilmenge von G.

2. Meromorphe Funktionen sind stetig (bzgl. $\widehat{d}$). Denn die Stetigkeit in P folgt nach Definition des Pols, die in $G \backslash P$ aus der Stetigkeit holomorpher Funktionen.

3. Sind f und g meromorph in G, so sind $f \pm g$, $f \cdot g$ und im Falle $g \not\equiv 0$ auch f/g holomorph in G bis auf isolierte Punkte, und diese Punkte sind Pole oder hebbare Singularitäten. Also sind $f \pm g$, $f \cdot g$ und f/g zu in G meromorphen Funktionen fortsetzbar. Wir verstehen unter $f \pm g$, $f \cdot g$ und f/g immer die bereits fortgesetzten Funktionen.

Insbesondere sind rationale Funktionen meromorph in $\widehat{\mathbb{C}}$; das heißt, sind p und q Polynome mit $q \not\equiv 0$, so kann die durch $f(z) = p(z)/q(z)$ definierte Funktion $f\colon \{z \in \mathbb{C}\colon q(z) \neq 0\} \to \mathbb{C}$ zu einer meromorphen Funktion $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ fortgesetzt werden. Sind p und q teilerfremd, so heißt $\operatorname{Grad}(f) := \max\{\operatorname{Grad}(p), \operatorname{Grad}(q)\}$ der Grad von f.

Der folgende Satz ist eine Umkehrung der letzten Bemerkung.

Satz 15.3. *Sei $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph. Dann ist f rational; das heißt, es gibt Polynome p und q mit $f = p/q$.*

Beweis. Sei $P = f^{-1}(\infty)$ die Menge der Pole von f. Da P diskret und $\widehat{\mathbb{C}}$ kompakt ist, ist P endlich. Sei $P \cap \mathbb{C} = \{a_1, ..., a_m\}$. Sei m_j die Vielfachheit des Poles a_j und sei

$$q(z) = \prod_{j=1}^{m} (z - a_j)^{m_j} \quad \text{und} \quad p(z) = f(z)q(z).$$

(Genauer sind p und q die meromorphen Fortsetzungen dieser Ausdrücke auf $\widehat{\mathbb{C}}$.) Dann ist p holomorph in $\mathbb{C}$ und meromorph in $\widehat{\mathbb{C}}$. Zu zeigen ist, dass p Polynom ist. Dies folgt etwa durch Betrachten der Potenzreihe $p(z) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j$, die in ganz $\mathbb{C}$ konvergiert. Da ∞ keine wesentliche Singularität ist, sind nur endlich viele c_j von 0 verschieden. $\square$

Definition 15.4. Eine rationale Funktion vom Grad 1 heißt *Möbiustransformation.*

Ist f Möbiustransformation, so existieren $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

falls $z \neq \infty$ und $f(z) \neq \infty$. Wegen $\operatorname{Grad}(f) = 1$ gilt $ad - bc \neq 0$. Es ist leicht zu sehen, dass Möbiustransformationen bijektive Abbildungen von $\widehat{\mathbb{C}}$ nach $\widehat{\mathbb{C}}$ sind. Hat f obige Form, so ist die Umkehrabbildung durch

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

gegeben.

Satz 15.5. *Sei $G \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ Gebiet, $f\colon G \to \widehat{\mathbb{C}}$, $f \not\equiv \infty$. Dann ist f genau dann meromorph in G, wenn jeder Punkt in G eine Umgebung besitzt, in der f oder $1/f$ holomorph ist.*

Bemerkung. Dass f meromorph ist, wenn jeder Punkt eine entsprechende Umgebung besitzt, ist klar, da für holomorphes $g \neq 0$ die Funktion $1/g$ meromorph ist.

Sei jetzt f meromorph. Aus der Stetigkeit von f folgt, dass jeder Punkt eine Umgebung U besitzt, so dass $\widehat{d}(f(z), f(w)) < 2$ für $z, w \in U$. Wegen $\widehat{d}(0, \infty) = 2$ gilt also $f(z) \neq 0$ oder $f(z) \neq \infty$ für alle $z \in U$. Im zweiten Fall ist f holomorph, im ersten $1/f$.

Mit Satz 15.5 übertragen sich viele Eigenschaften holomorpher Funktionen auf meromorphe Funktionen, etwa der Satz von Weierstraß (Satz 6.8).

Satz 15.6 (Weierstraß). *Sei $G \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ Gebiet und (f_k) eine Folge in G meromorpher Funktionen. Es gelte $f_k \to f\colon G \to \widehat{\mathbb{C}}$ lokal gleichmäßig bzgl. $\widehat{d}$. Dann ist f meromorph oder $f \equiv \infty$. Ist $f \not\equiv \infty$, so gilt für $n \in \mathbb{N}$ auch $f_k^{(n)} \to f^{(n)}$ lokal gleichmäßig.*

Die Riemannsche Zahlenkugel erlaubt auch die folgende Charakterisierung einfach zusammenhängender Gebiete.

Satz 15.7. *Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn $\widehat{\mathbb{C}} \backslash G$ zusammenhängend ist.*

Beweis. Sei $\widehat{\mathbb{C}} \backslash G$ zusammenhängend und sei Γ Zyklus in G. Zu zeigen ist, dass Γ nullhomotop in G ist, also $n(\Gamma, z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \backslash G$ gilt.

Wir setzen

$$A := \{z \in \mathbb{C} \backslash G\colon n(\Gamma, z) \neq 0\} \quad \text{und} \quad B := \{z \in \mathbb{C} \backslash G\colon n(\Gamma, z) = 0\} \cup \{\infty\}.$$

Zu zeigen ist also, dass $A = \emptyset$.

Offensichtlich gilt $A \cup B = \widehat{\mathbb{C}} \backslash G$ und $A \cap B = \emptyset$. Weil $n(\Gamma, z)$ ganzzahlig ist und stetig von z abhängt, und außerdem $n(\Gamma, z) = 0$ für alle z aus der unbeschränkten Komponente von $G \backslash \operatorname{Sp}(\Gamma)$ gilt, sind A und B abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{C}$ und damit auch von $G \backslash \operatorname{Sp}(\Gamma)$. Da $\infty \in B$, gilt $B \neq \emptyset$. Zusammen mit $A \cup B = \widehat{\mathbb{C}} \backslash G$ und $A \cap B = \emptyset$ folgt nun aus dem Zusammenhang von $\widehat{\mathbb{C}} \backslash G$, dass $A = \emptyset$.

Die Umkehrung beweisen wir per Kontraposition. Sei also $\widehat{\mathbb{C}} \backslash G$ nicht zusammenhängend. Wir wollen zeigen, dass G nicht einfach zusammenhängend ist. Dazu werden wir einen nicht nullhomologen Zyklus in G konstruieren.

Da $\widehat{\mathbb{C}} \backslash G$ nicht zusammenhängend ist, existieren nicht leere, abgeschlossene Teilmengen A und B von $\widehat{\mathbb{C}} \backslash G$ mit mit $A \cup B = \widehat{\mathbb{C}} \backslash G$ und $A \cap B = \emptyset$. Da $\widehat{\mathbb{C}} \backslash G$ abgeschlossen sind, sind A und B auch abgeschlossen in $\widehat{\mathbb{C}}$. Ohne Einschränkung gelte $\infty \in B$. Da A abgeschlossen ist, folgt hieraus leicht, dass A beschränkt und damit auch kompakt ist. Damit ist

$$\delta := \min_{(a,b) \in A \times B} |a - b| > 0.$$

Sei nun $a \in A$. Wir setzen $\alpha = \operatorname{Re} a + \delta/2$ und $\beta = \operatorname{Im} a + \delta/2$. Für $j, k \in \mathbb{Z}$ sei

$$Q_{j,k} = \{x + iy \colon j\delta \le x - \alpha \le (j+1)\delta, k\delta \le y - \beta \le (k+1)\delta\}.$$

Dann ist a der Mittelpunkt von $Q_{0,0}$ und es gilt

$$\mathbb{C} = \bigcup_{j,k \in \mathbb{Z}} Q_{j,k},$$

das heißt, die Quadrate $Q_{j,k}$ überdecken $\mathbb{C}$. Da A beschränkt ist, ist nur für endlich viele der $Q_{j,k}$ ihr Durchschnitt mit A nicht leer. Sei

$$I := \left\{(j,k) \in \mathbb{Z}^2 : Q_{j,k} \cap A \neq \emptyset\right\}.$$

Nach Wahl von δ gilt $Q_{j,k} \cap B = \emptyset$ für $(j,k) \in I$. Es sei

$$\Gamma = \sum_{(j,k) \in I} \partial Q_{j,k},$$

wobei die Kurven $\partial Q_{j,k}$ positiv orientiert seien. Es gilt dann $n(\Gamma, a) = 1$, denn $n(\partial Q_{0,0}, a) = 1$ und $n(\partial Q_{j,k}, a) = 0$ für $(j,k) \in I \backslash \{(0,0)\}$

Die Kurve $\partial Q_{j,k}$ besteht aus 4 Strecken. Enthält eine dieser Strecken einen Punkt von A, so existiert ein Quadrat $Q_{j',k'}$ mit $(j,k), (j',k') \in I$ und $j = j'$ und $|k - k'| = 1$ oder $|j - j'| = 1$ und $k = k'$, so dass auch $\partial Q_{j',k'}$ diesen Punkt enthält. Die Quadrate $Q_{j,k}$ und $Q_{j',k'}$ haben also eine gemeinsame Kante.

Die entsprechende Strecke ist sowohl in $\partial Q_{j,k}$ wie auch $\partial Q_{j',k'}$ enthalten, aber in umgekehrter Orientierung. Das Weglassen dieser Strecke ändert also die Windungszahlen nicht. Sei Γ' der Zyklus, der aus Γ entsteht, wenn all diese Strecken weggelassen werden; vgl. Abbildung 20.

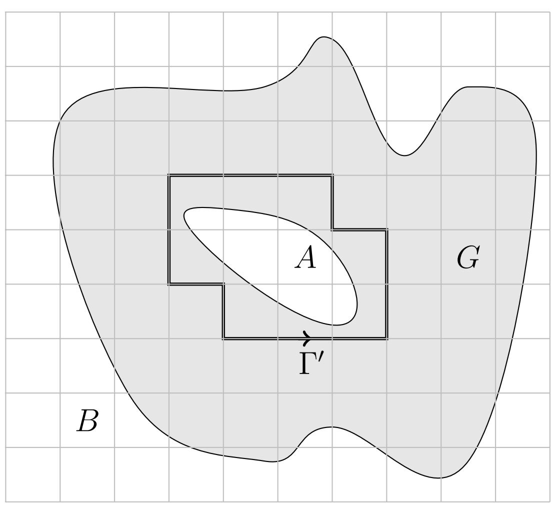

Abbildung 20: Konstruktion eines nicht nullhomologen Zyklus in einem Gebiet, dessen Komplement eine beschränkte Komponente hat.

Dann gilt $n(\Gamma', a) = 1$ und $\operatorname{Sp}(\Gamma') \cap A = \emptyset$. Da $Q_{j,k} \cap B = \emptyset$ für $(j,k) \in I$ und $\operatorname{Sp}(\Gamma') \subseteq \operatorname{Sp}(\Gamma) \subseteq \bigcup_{(j,k) \in I} \partial Q_{j,k}$, gilt auch $\operatorname{Sp}(\Gamma') \cap B = \emptyset$. Also gilt $\operatorname{Sp}(\Gamma') \subseteq G$. Damit ist Γ' Zyklus in G, der nicht nullhomolog ist. $\square$

Bemerkung. In Satz 15.7 ist wichtig, dass das Komplement von G in $\widehat{\mathbb{C}}$ und nicht in $\mathbb{C}$ betrachtet wird. So ist etwa $G = \{z \in \mathbb{C} \colon |\operatorname{Re} z| < 1\}$ einfach zusammenhängend, aber $\mathbb{C} \backslash G$ ist unzusammenhängend.

16 Normale Familien und der Riemannsche Abbildungssatz

Zunächst betrachten wir holomorphe Selbstabbildungen des Einheitskreises. Wir benutzen hier und im Folgenden die Notation $\mathbb{D} := \{z \colon |z| < 1\}$.

Satz 16.1 (Schwarzsches Lemma). *Sei $f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph, $f(0) = 0$. Dann gilt $|f'(0)| \le 1$ und $|f(z)| \le |z|$ für $z \in \mathbb{D}$. Gilt $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$, so existiert $a \in \partial\mathbb{D}$ mit $f(z) = az$ für alle $z \in \mathbb{D}$.*

Beweis. Wir betrachten die Funktion $g \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & z \neq 0, \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

Dann ist g holomorph in $\mathbb{D}$ und für $0 < r < 1$ gilt

$$\max_{|z|=r} |g(z)| = \frac{\max_{|z|=r} |f(z)|}{r} \le \frac{1}{r}.$$

Es folgt mit dem Maximumprinzip, dass $\max_{|z|\le r} |g(z)| \le 1/r$ für $0 < r < 1$. Mit $r \to 1$ folgt

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |g(z)| \le 1,$$

also $|f'(0)| \le 1$ und $|f(z)| \le |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Gilt hier Gleichheit, so ist g nach Maximumprinzip konstant, und wegen $|g(z)| = 1$ für $z \in \mathbb{D}$ auch $g(z) \equiv a$ für ein a mit $|a| = 1$. □

Für $c \in \mathbb{D}$ ist durch die Möbiustransformation

$$T_c(z) = \frac{z - c}{1 - \bar{c}z}$$

eine Abbildung von $\mathbb{D}$ nach $\mathbb{D}$ gegeben, denn für $|z| = 1$, etwa $z = e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$, gilt

$$\left|\frac{z - c}{1 - \bar{c}z}\right| = \frac{|e^{i\varphi} - c|}{|1 - \bar{c}e^{i\varphi}|} = \frac{|1 - ce^{-i\varphi}|}{|1 - \bar{c}e^{i\varphi}|} = 1,$$

nach Maximumprinzip folgt also

$$\left|\frac{z - c}{1 - \bar{c}z}\right| < 1$$

für $|z| < 1$. Mit

$$T_c^{-1}(z) = \frac{z + c}{1 + \bar{c}z} = T_{-c}(z)$$

folgt, dass $T_c \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ biholomorph ist.

Der folgende Satz besagt, dass die Abbildungen T_c im Wesentlichen die einzigen biholomorphen Abbildungen von $\mathbb{D}$ nach $\mathbb{D}$ sind.

Satz 16.2. *Sei $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ biholomorph. Dann existieren $c \in \mathbb{D}$ und $\theta \in [0, 2\pi)$, so dass*

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - c}{1 - \bar{c}z}$$

für $z \in \mathbb{D}$. Umgekehrt ist für alle $c \in \mathbb{D}$ und $\theta \in [0, 2\pi)$ durch diesen Ausdruck eine biholomorphe Funktion $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ gegeben.

Beweis. Dass für $c \in \mathbb{D}$ und $\theta \in [0, 2\pi)$ durch obigen Ausdruck eine biholomorphe Funktion von $\mathbb{D}$ nach $\mathbb{D}$ gegeben ist, folgt direkt aus obigen Vorüberlegungen.

Sei umgekehrt $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ biholomorph. Sei $c = f^{-1}(0)$ und $g = f \circ T_{-c}$. Dann ist $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ biholomorph und $g(0) = 0$. Nach Schwarzschem Lemma folgt $|g'(0)| \leq 1$. Ebenso ist $g^{-1}\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ biholomorph, also $|(g^{-1})'(0)| = 1/|g'(0)| \leq 1$. Damit ist $|g'(0)| = 1$. Nach Schwarzschem Lemma hat g also die Form $g(z) = e^{i\theta}z$ für ein $\theta \in [0, 2\pi)$. Es folgt $f(z) = g(T_{-c}^{-1}(z)) = g(T_c(z)) = e^{i\theta}T_c(z)$. □

Definition 16.3. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $\mathcal{F}$ eine Menge (oder Familie) in G meromorpher Funktionen. Dann heißt $\mathcal{F}$ *normal*, falls jede Folge in $\mathcal{F}$ eine bezüglich der chordalen Metrik lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt.

Bemerkung. Sei $\mathcal{F}$ normal. Für jede Folge (f_n) in $\mathcal{F}$ existiert also eine Teilfolge (f_{n_k}), so dass $f_{n_k} \to f$ lokal gleichmäßig für ein $f\colon G \to \widehat{\mathbb{C}}$. Man beachte, dass *nicht* verlangt wird, dass $f \in \mathcal{F}$ gilt. Fordert man auch dies, so erhält man den Begriff der (Folgen-)Kompaktheit (in dem mit einer geeigneten Metrik versehenen Raum der Funktionen von G nach $\widehat{\mathbb{C}}$).

Insbesondere ist zugelassen, dass $f(z) \equiv \infty$. Ist $f(z) \not\equiv \infty$, so ist f nach dem Satz von Weierstraß meromorph. Sind alle f_k holomorph und gilt $f(z) \not\equiv \infty$, so ist auch f holomorph.

Satz 16.4. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\mathcal{F}$ eine Menge in G holomorpher Funktionen. Es gebe ein $M \in \mathbb{R}$ mit $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in G$ und $f \in \mathcal{F}$. Dann ist $\mathcal{F}$ normal.*

Der Begriff der Normalität wie auch der obige Satz gehen auf Montel zurück. Als „Satz von Montel“ wird aber im Allgemeinen eine ebenfalls auf ihn zurückgehende Verallgemeinerung dieses Satzes bezeichnet, welche besagt, dass $\mathcal{F}$ bereits normal ist, wenn $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq b$ existieren, so dass $f(z) \neq a$ und $f(z) \neq b$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $z \in G$.

Beweis von Satz 16.4. Wir wählen eine Folge (a_l), die dicht in G ist; das heißt, jeder Punkt von G ist Häufungswert dieser Folge. (Eine solche Folge existiert, denn zum Beispiel ist die Menge aller komplexen Zahlen (in G), die rationalen Real- und Imaginärteil haben, dicht und abzählbar.) Sei nun (f_n) Folge in $\mathcal{F}$. Da $(f_n(a_1))$ beschränkt ist, existiert zunächst eine Teilfolge $\big(f_{n_{1,k}}\big)$ von (f_n), so dass $\big(f_{n_{1,k}}(a_1)\big)$ konvergiert. Die Folge $\big(f_{n_{1,k}}(a_2)\big)$ enthält nun eine Teilfolge $\big(f_{n_{2,k}}(a_2)\big)$, die konvergiert. Natürlich konvergiert auch die Folge $\big(f_{n_{2,k}}(a_1)\big)$, da sie Teilfolge der konvergenten Folge $\big(f_{n_{1,k}}(a_1)\big)$ ist.

Induktiv erhält man so für jedes $j \in \mathbb{N}$ eine Folge $\big(f_{n_{j,k}}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, dass $\big(f_{n_{j,k}}(a_i)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ für $1 \leq i \leq j$ konvergiert und $\big(f_{n_{j+1,k}}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $\big(f_{n_{j,k}}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ ist. Wir betrachten jetzt die Folge (g_k) mit $g_k = f_{n_{k,k}}$. (Dies ist die sogenannte *Diagonalfolge*.) Es folgt, dass $(g_k(a_l))_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $l \in \mathbb{N}$ konvergiert.

Wir zeigen jetzt, dass (g_k) nicht nur auf der dichten Teilmenge $\{a_l : l \in \mathbb{N}\}$ konvergiert, sondern auf ganz G, und zwar lokal gleichmäßig.

Sei dazu $z_0 \in G$. Dann existiert $r > 0$ mit $\overline{D(z_0, r)} \subset G$. Wir werden zeigen, dass (g_k) auf $D(z_0, r/2)$ gleichmäßig konvergiert. Für $f \in \mathcal{F}$ und $u, v \in D(z_0, r/2)$ gilt nach Cauchy-Integralformel

$$f(v) - f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - v} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - u} \right) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{(u - v) f(\zeta)}{(\zeta - u)(\zeta - v)} d\zeta$$

und damit

$$\begin{aligned} |f(v) - f(u)| &\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \max_{|\zeta - z_0| = r} \left| \frac{(u - v) f(\zeta)}{(\zeta - u)(\zeta - v)} \right| \\ &\leq r \frac{|u - v|}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)| \\ &\leq \frac{4M}{r} |u - v| \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta = \varepsilon r / (12M)$. Da die a_l dicht in G sind, existieren $l_1, \ldots, l_q \in \mathbb{N}$, so dass $a_{l_1}, \ldots, a_{l_q} \in D(z_0, r/2)$ und

$$D\Big(z_0, \frac{r}{2}\Big) \subseteq \bigcup_{m=1}^{q} D(a_{l_m}, \delta).$$

Da $(g_k(a_{l_m}))_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert, existiert $k_m \in \mathbb{N}$ so dass

$$|g_j(a_{l_m}) - g_k(a_{l_m})| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für $j, k \geq k_m$.

Es seien nun $z \in D(z_0, r/2)$ und $j, k \geq k_0 := \max_{1 \leq m \leq q} k_m$. Dann existiert $p \in \{1, \ldots, q\}$ mit $z \in D(a_{l_p}, \delta)$. Daher folgt für $j, k \geq k_0$

$$\begin{aligned} |g_j(z) - g_k(z)| &\leq |g_j(z) - g_j(a_{l_p})| + |g_j(a_{l_p}) - g_k(a_l)| + |g_k(a_l) - g_k(z)| \\ &< \frac{4M}{r} |z - a_{l_p}| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{4M}{r} |z - a_{l_p}| \\ &< \frac{4M}{r} \delta + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{4M}{r} \delta \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist $(g_k|_{D(z_0, \delta)})$ Cauchy-Folge (bzgl. der Supremumsnorm). Also konvergiert (g_k) lokal gleichmäßig in $D(z_0, r)$. $\square$

Eine schöne Anwendung der Theorie normaler Familien ist folgendes Ergebnis.

Satz 16.5 (Riemannscher Abbildungssatz). *Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$ mit $G \neq \mathbb{C}$. Sei $z_0 \in G$. Dann existiert genau eine biholomorphe Abbildung $f : \mathbb{D} \to G$ mit $f(0) = z_0$ und $f'(0) > 0$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Seien f, g Funktionen mit den geforderten Eigenschaften und sei $T := g^{-1} \circ f$. Dann ist $T\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ biholomorph, $T(0) = 0$ und

$$T'(0) = (g^{-1})'(z_0) f'(0) = \frac{f'(0)}{g'(0)} > 0.$$

Nach dem Schwarzschem Lemma ist

$$T'(0) = \frac{f'(0)}{g'(0)} \leq 1.$$

Analog ist $T^{-1} = f^{-1} \circ g$ biholomorphe Abbildung von $\mathbb{D}$ nach $\mathbb{D}$ und damit

$$0 < (T^{-1})'(0) = \frac{g'(0)}{f'(0)} \leq 1.$$

Es folgt $T'(0) = 1$, und damit $T(z) = az$ für ein $a \in \partial\mathbb{D}$. Es ist $a = T'(0) = 1$, also $T(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{D}$; das heißt, es gilt $f = g$.

Um die Existenz zu zeigen, werden wir die Existenz von einer biholomorphen Funktion $h\colon G \to \mathbb{D}$ mit $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) > 0$ nachweisen. Dann leistet $f := h^{-1}$ das Verlangte.

Die Idee ist wie folgt: Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller holomorphen und injektiven Funktionen $g\colon G \to \mathbb{D}$, für die $g(z_0) = 0$ und $g'(z_0) > 0$ gilt. Wir werden zeigen:

(*i*) $\mathcal{F} \neq \emptyset$;

(*ii*) $\mathcal{F}$ ist normal;

(*iii*) es existiert $h \in \mathcal{F}$ mit $h'(z_0) = \max\{g'(z_0)\colon g \in \mathcal{F}\}$;

(*iv*) die Funktion h aus (*iii*) ist biholomorph.

Zu (*i*): Wegen $G \neq \mathbb{C}$ kann man ohne Einschränkung $0 \notin G$ annehmen. Da G einfach zusammenhängend ist, existiert nach Satz 11.4 ein holomorpher Zweig φ des Logarithmus in G, das heißt, es existiert eine holomorphe Funktion $\varphi\colon G \to \mathbb{C}$ mit $e^{\varphi(z)} = z$ für alle $z \in G$.

Sei $w_0 = \varphi(z_0)$. Da $\varphi(G)$ offen ist, existiert $r > 0$ mit $D(w_0, r) \subseteq \varphi(G)$. Dies impliziert, dass $D(w_0 + 2\pi i, r) \cap \varphi(G) = \emptyset$. Denn sei $w_1 \in D(w_0 + 2\pi i, r) \cap \varphi(G)$ und $w_2 := w_1 - 2\pi i \in D(w_0, r) \subseteq \varphi(G)$. Dann existiert $z_1, z_2 \in G$ mit $\varphi(z_j) = w_j$ für $j = 1, 2$. Es folgt, dass $z_1 = e^{\varphi(z_1)} = e^{w_1} = e^{w_2} = e^{\varphi(z_2)} = z_2$, was ein Widerspruch ist.

Damit ist durch

$$z \mapsto \frac{r}{2} \, \frac{1}{\varphi(z) - (w_0 + 2\pi i)}$$

eine injektive, holomorphe Abbildung $F\colon G \to D(0, \frac{1}{2})$ gegeben. Durch

$$z \mapsto e^{i\theta}(F(z) - F(z_0))$$

ist damit für geeignetes $\theta \in \mathbb{R}$ eine Abbildung in $\mathcal{F}$ gegeben.

Zu (*ii*): Dies folgt aus Satz 16.4.

Zu (*iii*): Sei (g_n) Folge in $\mathcal{F}$ mit

$$g_n'(z_0) \to \sup\{g'(z_0)\colon g \in \mathcal{F}\}.$$

Da $\mathcal{F}$ normal ist, enthält (g_n) eine konvergente Teilfolge. Ohne Einschränkung gelte $g_n \to h$. Wegen
$$h(z_0) = \lim_{n\to\infty} g_n(z_0) = 0$$
ist $h(z) \not\equiv \infty$, also folgt mit dem Satz von Weierstraß, dass $g_n' \to h'$ lokal gleichmäßig. Damit gilt
$$h'(z_0) = \sup\{g'(z_0) \colon g \in \mathcal{F}\} > 0.$$
Also ist h nicht konstant. Nach dem Satz von Hurwitz ist h auch injektiv. Es folgt, dass $h \in \mathcal{F}$.

Zu (iv): Es ist zu zeigen, dass h auch surjektiv ist. Wir nehmen an, dass dies nicht der Fall ist. Dann existiert $a \in \mathbb{D}$, so dass $h(z) \neq a$ für alle $z \in G$. Für $c \in \mathbb{D}$ sei wieder
$$T_c \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \quad T_c(z) = \frac{z-c}{1-\bar{c}z}.$$
Mit $u := T_a \circ h$ gilt dann $u(z) \neq 0$ für $z \in G$. Nach einer Bemerkung zu Satz 11.4 existiert $v \colon G \to \mathbb{D}$ mit $u(z) = v(z)^2$ für $z \in G$. Wir betrachten nun $k \colon G \to \mathbb{D}$,
$$k(z) = e^{i\theta} T_b\left(v(z)\right),$$
wobei $b := v(z_0)$ und $\theta \in \mathbb{R}$ so gewählt ist, dass $k'(z_0) > 0$ gilt. Dann gilt $k \in \mathcal{F}$.

Es ist dann
$$T_a(h(z) = u(z) = v(z)^2 = \left(T_b^{-1}(e^{-i\theta}k(z))\right)^2,$$
mit
$$S(z) = T_a^{-1}\left(T_b^{-1}(e^{-i\theta}z)^2\right)$$
also $h = S \circ k$. Es gilt
$$S(0) = T_a^{-1}(b^2) = T_a^{-1}(v(z_0)^2) = T_a^{-1}(u(z_0) = h(z_0) = 0.$$
Da S nicht injektiv ist, folgt mit dem Schwarzschen Lemma $|S'(0)| < 1$. Dies liefert $h'(z_0) = S'(k(z_0))k'(z_0) < k'(z_0)$. Das ist ein Widerspruch zur Wahl von h. □

Bemerkung. Man kann die Ungleichung $k'(z_0) > h'(z_0)$ auch durch eine längere Rechnung aus $h = S \circ k$ erhalten, ohne hier das Schwarzsche Lemma zu benutzen.

Eine Konsequenz des Riemannschen Abbildungssatz ist die folgende Charakterisierung einfach zusammenhängender Mengen.

Satz 16.6. *Ein Gebiet in $\mathbb{C}$ ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve in ihm nullhomotop ist.*

Beweis. Sei G einfach zusammenhängend und $\gamma_0 \colon [0,1] \to G$ eine geschlossene Kurve in G mit Anfangs- und Endpunkt z_0. Sei $f \colon \mathbb{D} \to G$ gemäß dem Riemannschen Abbildungssatz gewählt. Dann ist durch
$$H \colon [0,1]^2 \to G, \quad H(t,s) = f((1-s)f^{-1}(\gamma_0(t))),$$
eine Homotopie zur konstanten Kurve $\gamma_1 \colon [0,1] \to G$, $\gamma_1(t) = z_0$, gegeben.

Die Umkehrung folgt sofort aus Satz 10.6 und der Definition des einfachen Zusammenhangs. □

Der Riemannsche Abbildungssatz hat aber noch viele weitere Anwendungen, auf die im Rahmen dieser Vorlesung aber nicht mehr eingegangen werden kann.