Analysis II

Walter Bergweiler

Sommersemester 2017
Fassung vom 7. Juli 2017

Diese Vorlesung ist eine Fortsetzung der Vorlesung Analysis I aus dem Wintersemester 2016/2017. Die Nummerierung dieser Vorlesung wird hier fortgesetzt; Verweise wie “nach Satz $x.y.z$” mit $x \leq 4$ beziehen sich darauf.

An Literatur sind die bereits zur Analysis I genannten Bücher zu empfehlen – sowie die jeweils zweiten Bände dieser Werke.

Inhaltsverzeichnis

5 Integration

5.1 Das Riemann-Integral

Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist das Produkt der Seitenlängen. Die Idee beim Riemann-Integral ist die Approximation allgemeinerer Flächen durch Rechtecke und die Definition des Flächeninhaltes durch einen Grenzübergang.

Definition 5.1.1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_0, \ldots, x_n$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Dann heißt $Z := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine *Zerlegung* von $[a, b]$. Für $k \in \{1, \ldots, n\}$ heißt $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ das k-te Teilintervall der Zerlegung und $|I_k| := x_k - x_{k-1}$ die *Länge* von I_k. Weiter heißt $|Z| := \max_k |I_k|$ die *Feinheit* der Zerlegung Z.

Sei $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, also $\xi_k \in I_k$ für alle k. Dann heißen die ξ_k (oder auch das n-tupel ξ) *Stützstellen* zur Zerlegung Z.

Sei zusätzlich noch $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$. Dann heißt

$$S(Z, \xi) := S(f, Z, \xi) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|I_k|$$

Riemannsche Summe von f bzgl. Z und ξ.

Eine Zerlegung eines Intervalls $[a, b]$ ist nach Definition also nichts anderes als eine endliche Teilmenge des Intervalls, die die Endpunkte enthält. Schreiben wir im folgenden aber eine Zerlegung Z von $[a, b]$ in der Form $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, so werden wir immer $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ annehmen. Betrachten wir auf einem Intervall $[a, b]$ definierte Funktionen, werden wir immer $a < b$ voraussetzen, wenn nichts anderes gesagt wird.

Für die Zerlegung $Z = \{1,\ 2,\ 2{,}5,\ 3{,}2,\ 4\}$ des Intervalls $[1, 4]$, geeignete Stützstellen ξ und die durch $x \mapsto 2 + \sin x$ gegebene Funktion f sind in Abbildung 29 die Rechtecke dargestellt, deren Flächensumme $S(f, Z, \xi)$ ist.

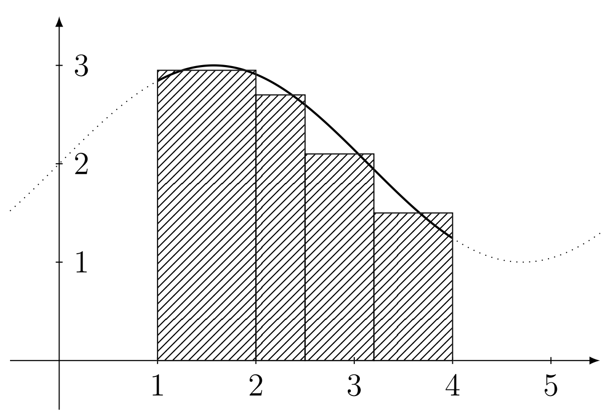

Abbildung 29: Eine Riemannsche Summe.

Die Idee ist nun, einen Grenzübergang $|Z| \to 0$ durchzuführen.

Definition 5.1.2. Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *Riemann-integrierbar* (kurz: *integrierbar*), falls es ein $S \in \mathbb{C}$ gibt, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft existiert:

Ist Z eine Zerlegung von $[a,b]$ mit $|Z| < \delta$ und sind ξ zugehörige Stützstellen, so gilt $|S(f,Z,\xi) - S| < \varepsilon$.

Existiert so eine Zahl S, so ist sie eindeutig und heißt *Riemann-Integral* (kurz: *Integral*) von f über $[a,b]$ und wird mit

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{oder} \quad \int_a^b f$$

bezeichnet. Setzt man $I := [a,b]$, schreibt man auch $\int_I f$.

In Quantorenschreibweise lautet die Bedingung wie folgt:

$$\exists S \in \mathbb{C}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \text{ Zerlegungen } Z \text{ von } [a,b]\ \forall \text{ Stützstellen } \xi \text{ zu } Z\colon$$
$$|Z| < \delta \ \Rightarrow\ |S(f,Z,\xi) - S| < \varepsilon.$$

Die Eindeutigkeit von S ist klar; man vgl. den Beweis, dass eine konvergente Zahlenfolge nur einen Grenzwert hat.

Man kann $\int_a^b f$ nicht direkt als Grenzwert von $S(Z,\xi)$ für $|Z| \to 0$ definieren, da Z und ξ durch $|Z|$ ja nicht eindeutig festgelegt sind. Dennoch übertragen sich viele Resultate über Grenzwerte ohne weiteres. Beispielsweise ist f genau dann integrierbar mit $S = \int_a^b f$, wenn für jede Folge (Z_n) von Zerlegungen mit $|Z_n| \to 0$ und jede zugehörige Stützstellenfolge (ξ_n) gilt, dass $S(Z_n,\xi_n) \to S$.

Auch das Cauchykriterium gilt analog:

Satz 5.1.1. (Cauchykriterium für Integrierbarkeit) *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann ist f genau dann integrierbar, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass gilt:*

Sind Z_1 und Z_2 Zerlegungen von $[a,b]$ mit $|Z_1| < \delta$ und $|Z_2| < \delta$ und sind ξ_1 und ξ_2 Stützstellen zu Z_1 bzw. Z_2, so gilt $|S(Z_1,\xi_1) - S(Z_2,\xi_2)| < \varepsilon$.

In Quantorenschreibweise lautet die Bedingung wie folgt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \text{ Zerlegungen } Z_1, Z_2 \text{ von } [a,b]\ \forall \text{ Stützstellen } \xi_1, \xi_2 \text{ zu } Z_1, Z_2\colon$$
$$|Z_1| < \delta \text{ und } |Z_2| < \delta \ \Rightarrow\ |S(Z_1,\xi_1) - S(Z_2,\xi_2)| < \varepsilon.$$

Der Beweis ist analog zum Cauchykriterium für Funktionengrenzwerte (Satz 3.3.4).

Satz 5.1.2. *Jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ist integrierbar.*

Zum Beweis benutzen wir folgendes Resultat.

Hilfssatz 5.1.1. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Seien $\varepsilon, \delta > 0$ und es gelte $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in [a,b]$ mit $|x - y| < \delta$. Seien weiter Z, Z' Zerlegungen mit Stützstellen ξ, ξ'. Ist dann $Z \subset Z'$ und $|Z| < \delta$, so gilt $|S(Z,\xi) - S(Z',\xi')| < \varepsilon(b-a)$.*

Beweis. Seien $I_1, I_2, \dots, I_m$ die Teilintervalle von Z und $I'_1, I'_2, \dots, I'_n$ die Teilintervalle von Z'. Dann gilt $m \le n$ und es gilt $I_1 = I'_1 \cup I'_2 \cup \dots \cup I'_{\ell_1}$, $I_2 = I'_{\ell_1+1} \cup \dots \cup I'_{\ell_2}$, $\dots$, $I_m = I'_{\ell_{m-1}+1} \cup \dots \cup I'_{\ell_m}$ mit $0 < \ell_1 < \dots < \ell_m := n$. Es folgt mit $\ell_0 := 0$, dass

$$\begin{aligned}
|S(Z,\xi) - S(Z',\xi')| &= \left| \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)|I_k| - \sum_{k=1}^{n} f(\xi'_k)|I'_k| \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k) \sum_{j=\ell_{k-1}+1}^{\ell_k} |I'_j| - \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=\ell_{k-1}+1}^{\ell_k} f(\xi'_j)|I'_j| \right| \\
&\le \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=\ell_{k-1}+1}^{\ell_k} |f(\xi_k) - f(\xi'_j)||I'_j| \\
&< \varepsilon \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=\ell_{k-1}+1}^{\ell_k} |I'_j| \\
&= \varepsilon(b-a).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Sind Z und Z' Zerlegungen mit $Z \subset Z'$ wie in Hilfssatz 5.1.1, so heißt Z' auch *Verfeinerung* von Z.

Beweis von Satz 5.1.2. Sei $\varepsilon > 0$. Da f nach Satz 3.6.5 gleichmäßig stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

für alle $x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \delta$.

Es seien nun Z_1, Z_2 Zerlegungen von $[a,b]$ mit Stützstellen ξ_1, ξ_2, so dass $|Z_1| < \delta$ und $|Z_2| < \delta$. Dann ist $Z := Z_1 \cup Z_2$ Verfeinerung sowohl von Z_1 wie auch Z_2 und für beliebige Stützstellen ξ zu Z folgt mit Hilfssatz 5.1.1 dann

$$|S(Z_1,\xi_1) - S(Z_2,\xi_2)| \le |S(Z_1,\xi_1) - S(Z,\xi)| + |S(Z,\xi) - S(Z_2,\xi_2)| < 2\varepsilon'(b-a) = \varepsilon.$$

Die Behauptung folgt mit dem Cauchykriterium (Satz 5.1.1). □

Beispiel. Die Funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$, $x \mapsto x$, ist stetig. Mit

$$Z_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\} \quad \text{und} \quad \xi_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$$

gilt $|Z_n| = 1/n \to 0$ und

$$S(Z_n, \xi_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2},$$

also

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Die Umkehrung von Satz 5.1.2 gilt nicht, d.h., integrierbare Funktionen müssen nicht stetig sein. Zum Beispiel zeigt man leicht, dass beschränkte Funktionen mit endlich (oder sogar abzählbar unendlich) vielen Unstetigkeitsstellen integrierbar sind. Es gilt aber der folgende Satz.

Satz 5.1.3. *Integrierbare Funktionen sind beschränkt.*

Wir skizzieren nur die *Beweisidee*: Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ unbeschränkt, so existiert eine Folge (x_k) in $[a,b]$ mit $|f(x_k)| \to \infty$. Sei nun Z eine Zerlegung mit Stützstellen $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Sei I_{j_k} das Teilintervall, welches x_k enthält. (Falls $x_k \in Z$ ist, aber x_k kein Randpunkt von $[a,b]$ ist, existieren zwei Teilintervalle mit dieser Eigenschaft. In diesem Falle sei I_{j_k} irgendeines dieser beiden.) Wir betrachten die Stützstellen $\xi^{(k)}$, die wir dadurch erhalten, dass wir ξ_{j_k} durch x_k ersetzen, also $\xi^{(k)} = (\xi_1, \ldots, \xi_{j_k-1}, x_k, \xi_{j_k+1}, \ldots, \xi_n)$. Dann folgt $|S(Z, \xi^{(k)})| \to \infty$. □

Satz 5.1.4. *Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ integrierbar und $c \in \mathbb{C}$. Dann sind auch $f+g$, $c \cdot f$ und $\overline{f}$ integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \quad \int_a^b c \cdot f = c \cdot \int_a^b f \quad \text{und} \quad \int_a^b \overline{f} = \overline{\int_a^b f}.$$

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus

$$S(f+g, Z, \xi) = S(f, Z, \xi) + S(g, Z, \xi).$$

Die anderen erhält man analog. □

Satz 5.1.5. *Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ist genau dann integrierbar, wenn* $\mathrm{Re}f$ *und* $\mathrm{Im}f$ *integrierbar sind. In diesem Fall gilt*

$$\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}f + i \int_a^b \mathrm{Im}f.$$

Der *Beweis* folgt unmittelbar aus Satz 5.1.4.

Man kann sich also auf die Integration reellwertiger Funktionen beschränken. Für beschränktes $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und eine Zerlegung Z von I nennt man

$$\overline{S}(Z) := \overline{S}(f, Z) := \sup_{\xi} S(Z, \xi)$$

bzw.

$$\underline{S}(Z) := \underline{S}(f, Z) := \inf_{\xi} S(Z, \xi)$$

Riemannsche Ober- bzw. Untersumme von f. Dabei sind Supremum bzw. Infimum über alle Stützstellen ξ zur Zerlegung Z zu nehmen. Für $Z \subset Z'$ gilt dann

$$\underline{S}(Z) \le \underline{S}(Z') \le \overline{S}(Z') \le \overline{S}(Z).$$

Für die Funktion aus Abbildung 29 sind die Rechtecke, der Flächensummen der Unter- und Obersumme entsprechen, in Abbildung 30 dargestellt.

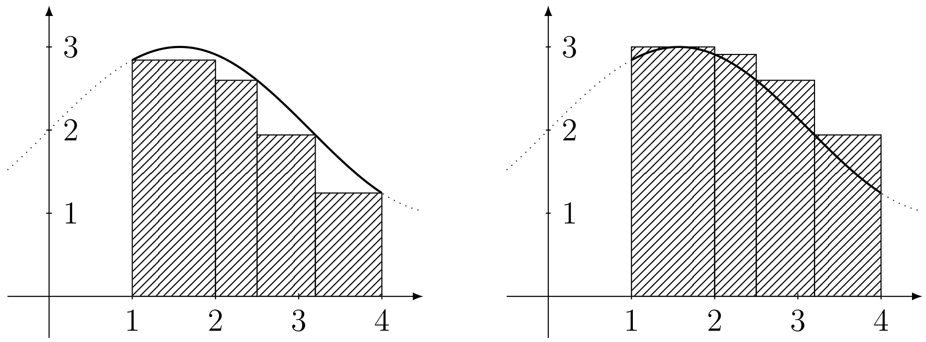

Abbildung 30: Unter- und Obersumme zum Beispiel aus Abbildung 29.

Man nennt

$$\overline{\int_a^b} f := \inf_Z \overline{S}(Z)$$

bzw.

$$\underline{\int_a^b} f := \sup_Z \underline{S}(Z)$$

oberes bzw. unteres Riemann-Integral von f. Hier sind Supremum bzw. Infimum über alle Zerlegungen Z von I zu nehmen. Man beachte, dass oberes und unteres Riemann-Integral (für beschränktes f) immer existieren.

Satz 5.1.6. (Riemannsches Integrabilitätskriterium) *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist integrierbar,*

(ii) $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$,

(iii) *Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung Z mit $\overline{S}(Z) - \underline{S}(Z) < \varepsilon$.*

Im Falle der Integrierbarkeit gilt

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Wir verzichten hier auf einen *Beweis*. (Zumindest teilweise wird dies aber in der Übung behandelt.)

Satz 5.1.7. *Seien $f\colon [a,b] \to [c,d]$ integrierbar und $\phi\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $\phi \circ f$ integrierbar.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da ϕ nach Satz 3.6.5 gleichmäßig stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit

$$|\phi(x) - \phi(y)| < \varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta$. Wir setzen $K := \max \phi(J) - \min \phi(J)$. Man kann annehmen, dass $\delta < \varepsilon/(2K + 1)$.

Nach dem Riemannschen Integrabilitätskriterium existiert eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ von $[a, b]$ mit $\overline{S}(f, Z) - \underline{S}(f, Z) < \delta^2$. Mit $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ wie vorher definieren wir nun

$$M_k := \sup f(I_k), \quad m_k := \inf f(I_k), \quad M_k^* := \sup \phi(f(I_k)), \quad m_k^* := \inf \phi(f(I_k))$$

sowie

$$A = \{k : M_k - m_k < \delta\} \quad \text{und} \quad B = \{k : M_k - m_k \geq \delta\}.$$

Für $k \in A$ ist dann $M_k^* - m_k^* < \varepsilon'$. Außerdem gilt für alle k, insbesondere also für $k \in B$, auch $M_k^* - m_k^* \leq K$. Des Weiteren ist

$$\sum_{k \in B} |I_k| \leq \frac{1}{\delta} \sum_{k \in B} (M_k - m_k)|I_k| \leq \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)|I_k| = \frac{1}{\delta} \left(\overline{S}(f, Z) - \underline{S}(f, Z) \right) < \delta.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \overline{S}(\phi \circ f, Z) - \underline{S}(\phi \circ f, Z) &= \sum_{k=1}^{n} (M_k^* - m_k^*)|I_k| \\ &\leq \sum_{k \in A} \varepsilon' |I_k| + \sum_{k \in B} K|I_k| \\ &< \varepsilon'|I| + K\delta \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Satz 5.1.8. *Sind $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{C}$ integrierbar, so sind auch $|f|$ und $f \cdot g$ integrierbar.*

Beweis. Für reellwertiges f folgt die Integrierbarkeit von $|f|$ direkt aus Satz 5.1.7 (mit $\phi(x) = |x|$). Mit $\phi(x) = x^2$ folgt aus diesem Hilfssatz auch die Integrierbarkeit von f^2. Wegen

$$fg = \frac{1}{4} \left((f + g)^2 - (f - g)^2 \right)$$

erhält man mit Satz 5.1.4 dann auch die Integrierbarkeit von $f \cdot g$, falls f und g beide reellwertig sind.

Für komplexwertiges f und g erhält man die Integrierbarkeit von $|f|$ und $f \cdot g$ jetzt mit Satz 5.1.5 (und wiederum Satz 5.1.7). □

Durch Abschätzung der Riemannschen Summen zeigt man leicht folgenden Satz.

Satz 5.1.9. *Ist $f \colon [a, b] \to \mathbb{C}$ integrierbar, so gilt*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b - a) \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Sind $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Insbesondere gilt für integrierbares $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$

$$(b-a) \inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Die linke bzw. rechte Seite in der letzten Ungleichung sind auch die Riemannsche Unter- bzw. Obersumme zu der Zerlegung von I, die nur aus den beiden Randpunkten besteht.

Satz 5.1.10. (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann existiert $\mu \in \mathbb{R}$ mit*

$$\inf f([a,b]) \leq \mu \leq \sup f([a,b])$$

und

$$\int_a^b f = \mu(b-a).$$

Ist f stetig, so existiert $\xi \in (a,b)$ mit $\mu = f(\xi)$.

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus obiger Folgerung, die zweite aus dem Zwischenwertsatz. □

Analog beweist man das folgende Ergebnis.

Satz 5.1.11. (Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Es seien $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Sei $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann existiert $\mu \in \mathbb{R}$ mit*

$$\inf f([a,b]) \leq \mu \leq \sup f([a,b])$$

und

$$\int_a^b fg = \mu \int_a^b g.$$

Ist f stetig, so existiert $\xi \in (a,b)$ mit $\mu = f(\xi)$.

Satz 5.1.12. *Jede monotone Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei f monoton steigend und nicht konstant. Dann ist $f(b) > f(a)$. Sei $\varepsilon > 0$ und sei Z eine Zerlegung von $[a,b]$ mit

$$|Z| < \delta := \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,Z) - \underline{S}(f,Z) &= \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1}))|I_k| \\ &< \delta \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \\ &= \delta(f(b) - f(a)) \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Sei $[a, b] \subset M \subset \mathbb{R}$ und $f \colon M \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Ist $f|_{[a,b]}$ integrierbar, so sagt man, dass f *über* das Intervall $[a, b]$ integrierbar ist.

Satz 5.1.13.

(i) *Sei $f \colon [a, b] \to \mathbb{C}$ integrierbar und $a \leq c < d \leq b$, also $[c, d] \subset [a, b]$. Dann ist f über $[c, d]$ integrierbar.*

(ii) *Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$ und sei $f \colon [a, c] \to \mathbb{C}$. Ist f integrierbar über $[a, b]$ und $[b, c]$, so auch über $[a, c]$ und es gilt*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Der *Beweis* sei als Übung überlassen.

Wegen (ii) setzt man für $a < b$ und integrierbares $f \colon [a, b] \to \mathbb{C}$ auch

$$\int_b^a f := -\int_a^b f.$$

Außerdem setzt man $\int_a^a f = 0$ für $f \colon \{a\} \to \mathbb{C}$. Mit diesen Setzungen gilt die Formel in (ii) für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, wenn die auftretenden Integrale definiert sind.

5.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition 5.2.1. Sei I Intervall, $F \colon I \to \mathbb{C}$ differenzierbar und $f \colon I \to \mathbb{C}$. Dann heißt F *Stammfunktion* von f, falls $F' = f$.

Seien F, G Stammfunktionen von f, g und sei $c \in \mathbb{C}$. Unmittelbar sieht man ein, dass dann $F + G$ Stammfunktion von $f + g$ und $c \cdot F$ Stammfunktion von $c \cdot f$ ist.

Mit F ist auch $F + c$ Stammfunktion von f. Umgekehrt gilt nach Satz 4.3.1, dass wenn F_1 und F_2 Stammfunktionen von f sind, so existiert $c \in \mathbb{C}$ mit $F_1 = F_2 + c$.

Beispiel. Sei $I := (-1, 1)$,

$$f \colon I \to \mathbb{R}, \ f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Eine Stammfunktion von f ist $\arccos|_I$, eine andere ist $-\arcsin|_I$. Man beachte, dass $\arccos = \frac{1}{2}\pi - \arcsin$.

Satz 5.2.1. (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \colon [a, b] \to \mathbb{C}$ integrierbar.*

(i) *Besitzt f eine Stammfunktion F, so gilt*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

(ii) *Sei $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ definiert durch*

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Ist f stetig in $y \in [a,b]$, so ist F differenzierbar in y mit $F'(y) = f(y)$. Ist f stetig in $[a,b]$, so ist F Stammfunktion von f.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Zu (i): Sei $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ Zerlegung von $[a,b]$. Nach dem Mittelwertsatz (der Differentialrechung) existiert zu $k \in \{1, \ldots, n\}$ dann $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ mit

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Mit $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ erhält man

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} F(x_k) - F(x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= S(f, Z, \xi). \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Zu (ii): Seien $x, y \in [a,b]$, $x \neq y$. Dann gilt nach Satz 5.1.13

$$F(x) - F(y) = \int_a^x f - \int_a^y f = \int_x^y f$$

und damit nach Satz 5.1.9

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(y)}{x - y} - f(y) \right| &= \left| \frac{1}{x-y} \int_y^x f(t)dt - f(y) \frac{1}{x-y} \int_y^x 1 \, dt \right| \\ &= \frac{1}{|x-y|} \left| \int_y^x (f(t) - f(y)) \, dt \right| \\ &\leq \sup_{t \in [y,x]} |f(t) - f(y)|. \end{aligned}$$

Ist f stetig in y, so strebt die rechte Seite für $x \to y$ gegen 0 und es folgt

$$\lim_{x \to y} \frac{F(x) - F(y)}{x - y} = f(y). \qquad \square$$

Die im Hauptsatz auftretende Differenz $F(b) - F(a)$ schreiben wir im folgenden oft in der Form

$$F\Big|_a^b, \quad F(x)\Big|_a^b \quad \text{oder} \quad F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Beispiel. Es ist

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

für $x \in \mathbb{R}$ und damit

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan \Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Man beachte, dass aus der Integrierbarkeit nicht die Existenz einer Stammfunktion folgt, und aus der Existenz einer Stammfunktion auch nicht die Integrierbarkeit.

Beispiele. 1. Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } -1 \le x < 0, \\ 1 & \text{falls } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Dann ist f integrierbar und

$$\int_{-1}^1 f = \int_{-1}^0 f + \int_0^1 f = -1 + 1 = 0.$$

Wäre F Stammfunktion, so wäre nach dem Hauptsatz $F(1) - F(-1) = \int_{-1}^1 f = 0$, nach dem Satz von Rolle würde also $\xi \in (-1,1)$ mit $f(\xi) = F'(\xi) = 0$ existieren, ein Widerspruch. Also hat f keine Stammfunktion.

Alternativ sieht man dies auf wie folgt: Hätte f eine Stammfunktion F, so wäre diese durch $F(x) = \int_{-1}^x f + c$ mit einer Konstante c gegeben. Eine kurze Rechung zeigt, dass $F(x) = |x| - 1 + c$. Diese Funktion F ist aber in 0 nicht differenzierbar.

2. Sei $F\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Dann ist F differenzierbar (vgl. das Beispiel in §4.1) mit

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} \cos \dfrac{1}{x^2} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Setzt man $f := F'$, so ist also F Stammfunktion von f. Es ist aber f nicht integrierbar, da

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\right) = -2\sqrt{2\pi k} \to \infty$$

für $k \to \infty$, $k \in \mathbb{N}$, womit f unbeschränkt ist.

Der Graph der Funktion F ist in Abbildung 31 dargestellt.

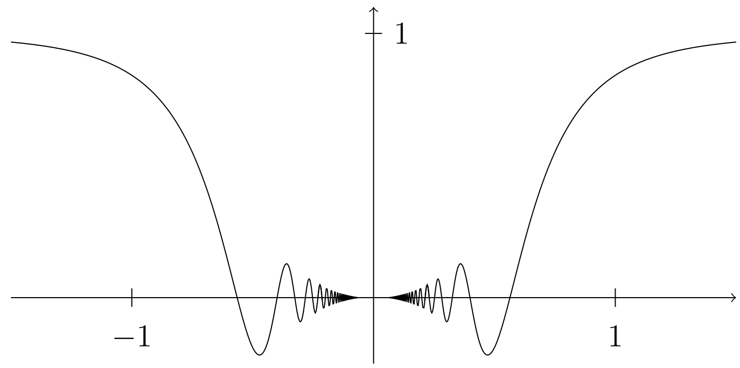

Abbildung 31: Der Graph der durch $F(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ gegebenen Funktion.

Der Hauptsatz reduziert also die Berechnung von Integralen auf das Auffinden von Stammfunktionen. Statt „F ist Stammfunktion von f“ schreibt man auch

$$\int f = F \quad \text{oder} \quad \int f(x)dx = F(x).$$

Da für konstantes C mit F auch $F+C$ Stammfunktion ist, schreibt man manchmal auch

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Man nennt Stammfunktionen auch *unbestimmte Integrale*.

Obige Schreibweisen sind mit Vorsicht zu benutzen! So gilt etwa

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arccot} x,$$

aber es gilt $\arctan x \neq -\operatorname{arccot} x$. (Es ist $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{1}{2}\pi$.)

Falls nichts anderes angegeben ist, gelten die in den folgenden *Beispielen* angegebenen Stammfunktionen in jedem Intervall, in denen der Integrand definiert ist.

- $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ für $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq -1$,
- $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$,
- $\displaystyle\int e^x\, dx = e^x$,
- $\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x$,
- $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x$,

- $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x,$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|,$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x,$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x,$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\Big(x+\sqrt{1+x^2}\Big),$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\Big(x+\sqrt{x^2-1}\Big)$ für $x \in (1,\infty)$.

Die in den letzten beiden Beispielen angegebenen Stammfunktionen sind Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen sinh und cosh, d.h., die durch

$$\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to \ln\Big(x+\sqrt{1+x^2}\Big),$$

und

$$\operatorname{arcosh}\colon [1,\infty) \to [0,\infty), \quad x \to \ln\Big(x+\sqrt{x^2-1}\Big),$$

definierten Funktionen erfüllen $\operatorname{arsinh}(\sinh x) = x$ für $x \in \mathbb{R}$ bzw. $\operatorname{arcosh}(\cosh x) = x$ für $x \in [0,\infty)$. Sie heißen *Area sinus (bzw. cosinus) hyperbolicus*; vgl. §3.4. Im Intervall $(-\infty,-1)$ gilt

- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = -\operatorname{arcosh}(-x).$

5.3 Integrationstechniken

Kennt man die Ableitungen zweier Funktionen f und g, so kann man die von $f \cdot g$, f/g, $f \circ g$, usw. daraus berechnen. Entsprechendes gilt *nicht* für die Berechnung von Stammfunktionen. Dennoch gibt es einige nützliche Regeln.

Zunächst einmal gilt offensichtlich, dass wenn F_1, F_2 Stammfunktionen von f_1, f_2 sind und $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ sind, dann ist $c_1F_1 + c_2F_2$ Stammfunktion von $c_1f_1 + c_2f_2$.

Der folgende Satz ist ein Analogon zur Produktregel für Ableitungen.

Satz 5.3.1. (Partielle Integration) *Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g.$$

Beweis. Sei
$$F\colon [a,b]\to\mathbb{C},\ F(x)=fg\Big|_a^x-\int_a^x f'g.$$
Nach Produktregel und Hauptsatz, Teil (ii), folgt dann $F'=f'g+fg'-f'g=fg'$. Die Behauptung folgt jetzt mit dem Hauptsatz, Teil (i). □

Man schreibt die Regel der partiellen Integration auch als
$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx.$$

Beispiele. 1. Für $a\in\mathbb{R}$ ist
$$\int_0^a xe^x dx=xe^x\Big|_0^a-\int_0^a e^x dx=ae^a-e^x\Big|_0^a=ae^a-e^a+1.$$
Es gilt also
$$\int xe^x dx=xe^x-e^x=(x-1)e^x.$$
(Die additive Konstante 1 ist hier weggelassen.)

2. Für $x>0$ ist
$$\int_1^x \ln t\,dt=\int_1^x \underbrace{1}_{g'}\cdot\underbrace{\ln t}_{f}dt=t\cdot\ln t\Big|_1^x-\int_1^x t\cdot\frac{1}{t}\,dt=x\ln x-x+1.$$
Wiederum schreibt man auch
$$\int \ln x=x\ln x-x=x(\ln x-1).$$

Neben der partiellen Integration ist die wichtigste Integratiosmethode die Substitution.

Satz 5.3.2. (Substitutionsregel) *Sei $g\colon[a,b]\to[c,d]$ stetig differenzierbar und $f\colon[c,d]\to\mathbb{C}$ stetig. Dann gilt*
$$\int_a^b f(g(t))g'(t)dt=\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx.$$

Beweis. Nach dem Hauptsatz hat f eine Stammfunktion F. Nach Kettenregel ist
$$(F\circ g)'(t)=F'(g(t))g'(t)=f(g(t))g'(t)=((f\circ g)\cdot g')(t)$$
und damit ist $F\circ g$ Stammfunktion von $(f\circ g)\cdot g'$. Mit dem Hauptsatz folgt
$$\int_a^b (f\circ g)\cdot g'=F\circ g\Big|_a^b=F\Big|_{g(a)}^{g(b)}=\int_{g(a)}^{g(b)} f.$$ □

Die Substitutionsregel kann man sich merken, indem man $x = g(t)$ setzt. Dann ist $\dfrac{dx}{dt} = g'(t)$.

Beispiele. 1. Mit der Substitution $x = t^2$, also $g(t) = t^2$ und $g'(t) = 2t$, folgt

$$\int_0^2 \frac{t\,dt}{1+t^4} = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2t\,dt}{1+(t^2)^2} = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\arctan 4.$$

2. Substituiert man zuerst $x = \ln t$ und dann $y = 1 + x$, erhält man

$$\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln t}}{t}dt = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \int_1^2 \sqrt{y}\,dy = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

3. Wir betrachten für $s \in [-1, 1]$ das Integral

$$\int_0^s \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Wir wollen die Substitution $x = \sin t$ machen.

In obigen Beispielen wurde die Substitutionsregel angewendet, indem wir erkannten, dass das zu berechnende Integral von der Form war, die auf der linken Seite der Formel in Satz 5.3.2 steht. Dieses wurde dann mit der Substitutionsregel in das Integral auf der rechten Seite umgewandelt. Im Unterschied dazu beginnen wir jetzt mit der rechten Seite dieser Formel und erhalten durch Substitution dann das Integral auf der linken Seite.

Man beachte zunächst, dass die Funktion $g\colon \left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right] \to [-1, 1]$, $g(t) = \sin t$, stetig differenzierbar ist. Außerdem ist sie bijektiv mit der Umkehrfunktion arcsin.

Mit $x = g(t) = \sin t$ und $t = g^{-1}(x) = \arcsin x$ ist dann $dx/dt = g'(t) = \cos t$ und damit

$$\int_0^s \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\sin 0}^{\sin(\arcsin(s))} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\arcsin(s)} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt$$

Für $t \in \left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$ gilt nun $\cos t \geq 0$ und damit

$$\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t.$$

Es folgt also

$$\begin{aligned}\int_0^s \sqrt{1-x^2}dx &= \int_0^{\arcsin s} \cos^2 t\,dt\\ &= \int_0^{\arcsin s} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt\\ &= \frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\arcsin s}\\ &= \frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)\Big|_0^{\arcsin s}\\ &= \frac{1}{2}\left(\arcsin s + s\sqrt{1-s^2}\right).\end{aligned}$$

Bemerkungen. 1. Wegen $\arcsin 1 = \frac{1}{2}\pi$ erhält man insbesondere, dass

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\arcsin 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Da die durch $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0 \text{ und } 0 \leq \sqrt{1-y^2}\}$ gegebene Fläche genau ein Viertel des Kreises vom Radius 1 ausmacht, bestätigt das, dass π der Flächeninhalt eines Kreises vom Radius 1 ist.

2. Für $s = 1$ erhält man im letzten Beispiel mit $\arcsin 1 = \frac{1}{2}\pi$ auch, dass

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{\sin 0}^{\sin(\frac{1}{2}\pi)} \sqrt{1-x^2}\, dy = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t\, dt = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 t\, dt.$$

Dies ist die Formel aus der Substitutionsregel mit $[a,b] = [0, \frac{1}{2}\pi]$, $[c,d] = [0,1]$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ und $g(t) = \sin t$. Nun gilt aber zum Beispiel auch $\sin(\frac{5}{2}\pi) = 1$ und man könnte glauben, dass man in der letzten Formel statt der oberen Grenze $\frac{1}{2}\pi$ auch die obere Grenze $\frac{5}{2}\pi$ nehmen könnte. Dies ist aber nicht der Fall, d.h., es gilt

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx \neq \int_0^{\frac{5}{2}\pi} \cos^2 t\, dt.$$

Der Grund ist, dass für $[a,b] = [0, \frac{5}{2}\pi]$, $[c,d] = [0,1]$ und $g(t) = \sin t$ nicht mehr $g \colon [a,b] \to [c,d]$ gilt. Die Gleichung $|\cos t| = \cos t$, die wir benutzt hatten, gilt aber nur für $g(t) = \cos t \in [0,1] = [c,d]$, und nicht für $\cos t \in [-1, 0)$.

Wir beschreiben jetzt die *Integration rationaler Funktionen*, d.h., Funktionen f der Form $f = P/Q$ mit teilerfremden Polynomen P und Q. Wir dürfen dabei annehmen, dass der Grad von P kleiner als der von Q ist. (Andernfalls führen wir zunächst eine Polynomdivision durch.) Nach dem Fundamentalsatz der Algebra (Satz 1.8.2) existieren $c \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ und $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ mit

$$Q(z) = c\prod_{j=1}^{k}(z-a_j)^{m_j}$$

für $z \in \mathbb{C}$. Ist q der Grad von Q, so folgt

$$\sum_{j=1}^{k} m_j = q.$$

Wir dürfen $c = 1$ annehmen. Wir setzen nun die Koeffizienten von Q als reell voraus. Dann gilt $\overline{Q(z)} = Q(\overline{z})$ und damit ist mit a auch $\overline{a}$ Nullstelle von Q. Wir fassen in dem Produkt für Q nun konjugiert komplexe Nullstellen zusammen und erhalten wegen

$$(z-a)(z-\overline{a}) = z^2 - (a+\overline{a})z + a\overline{a} = z^2 - 2\,\mathrm{Re}\, a \cdot z + |a|^2$$

für Q dann eine Darstellung

$$Q(x) = \prod_{j=1}^{M} (x - a_j)^{m_j} \prod_{j=1}^{N} (x^2 + b_j x + c_j)^{n_j}$$

mit $a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R}$, $c_j > b_j^2/4$, $m_j, n_j \in \mathbb{N}$ und

$$\sum_{j=1}^{M} m_j + 2 \sum_{j=1}^{N} n_j = q.$$

Der *Satz von der Partialbruchzerlegung* besagt nun, dass $A_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, M$, $j = 1, \ldots, m_i$, und $B_{i,j}, C_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, n_i$, existieren, so dass

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} = \quad & \frac{A_{1,1}}{x - a_1} + \frac{A_{1,2}}{(x - a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1,m_1}}{(x - a_1)^{m_1}} \\
& + \frac{A_{2,1}}{x - a_2} + \frac{A_{2,2}}{(x - a_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2,m_2}}{(x - a_2)^{m_2}} \\
& + \ldots \\
& + \frac{A_{M,1}}{x - a_M} + \frac{A_{M,2}}{(x - a_M)^2} + \cdots + \frac{A_{M,m_M}}{(x - a_M)^{m_M}} \\
& + \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2 + b_1 x + c_1} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{(x^2 + b_1 x + c_1)^2} + \cdots + \frac{B_{1,n_1}x + C_{1,n_1}}{(x^2 + b_1 x + c_1)^{n_1}} \\
& + \ldots \\
& + \frac{B_{N,1}x + C_{N,1}}{x^2 + b_N x + c_N} + \frac{B_{N,2}x + C_{N,2}}{(x^2 + b_N x + c_N)^2} + \cdots + \frac{B_{N,n_N}x + C_{N,n_N}}{(x^2 + b_N x + c_N)^{n_N}}.
\end{aligned}$$

Der *Beweis* lässt sich durch vollständige Induktion über q führen; hier nicht. Die Koeffizienten $A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j}$ kann man durch Multiplikation mit $Q(x)$ und Koeffizientenvergleich bestimmen.

Die in der Partialbruchzerlegung rechts stehenden Terme lassen sich nun integrieren. Es ist zunächst

$$\int \frac{A}{x - a} dx = A \ln |x - a|$$

und

$$\int \frac{A}{(x - a)^m} dx = -\frac{A}{(m - 1)(x - a)^{m-1}}$$

für $m \geq 2$. Wegen

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}$$

lassen sich die Terme mit $(x^2 + bx + c)^n$ im Nenner durch eine Substitution auf die Form

$$\frac{\beta x + \gamma}{(x^2 + \alpha^2)^n}$$

bringen. Nun ist

$$\int \frac{\beta x}{x^2+\alpha^2}dx = \frac{\beta}{2}\ln\bigl(x^2+\alpha^2\bigr)$$

und

$$\int \frac{\beta x}{(x^2+\alpha^2)^n}dx = -\frac{\beta}{2}\frac{1}{(n-1)\,(x^2+\alpha^2)^{n-1}}$$

für $n \geq 2$. Schließlich ist noch

$$\int \frac{dx}{x^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}\arctan\frac{x}{\alpha}$$

und für $n \geq 2$ zeigt partielle Integration, dass

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^n} &= \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{\alpha^2+x^2-x^2}{(x^2+\alpha^2)^n}dx \\ &= \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^{n-1}} - \frac{1}{\alpha^2}\int \underbrace{x}_{f}\cdot\underbrace{\frac{x}{(x^2+\alpha^2)^n}}_{g'}dx \\ &= \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^{n-1}} - \frac{1}{\alpha^2}\Biggl[x\left(-\frac{1}{2(n-1)\,(x^2+\alpha^2)^{n-1}}\right) \\ &\quad + \int \frac{dx}{2(n-1)\,(x^2+\alpha^2)^{n-1}}\Biggr].\end{aligned}$$

Damit können die Integrale

$$\int \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^n}$$

rekursiv berechnet werden.

Beispiel. Man berechne

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^4+x+1}{x^3+x}dx.$$

Zunächst ist

$$f(x) := \frac{x^4+x+1}{x^3+x} = x - \frac{x^2-x-1}{x^3+x} = x - \frac{x^2-x-1}{x(x^2+1)}.$$

Es existieren nun $A, B, C \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{x^2-x-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Zur Bestimmung der Konstanten A, B, C kann man natürlich mit dem Nenner durchmultiplizieren und anschließend Koeffizientenvergleich machen, was auf ein lineares Gleichungssystem für A, B, C führt. Einfacher ist, obige Gleichung mit x zu multiplizieren und anschließend $x = 0$ zu setzen. Dies führt sofort auf

$$A = \left.\frac{x^2-x-1}{x^2+1}\right|_{x=0} = -1$$

und damit auf

$$\frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{x^2-x-1}{x(x^2+1)} + \frac{1}{x} = \frac{x^2-x-1+x^2+1}{x(x^2+1)} = \frac{2x-1}{x^2+1}.$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned}
\int_1^{\sqrt{3}} f(x)dx &= \int_1^{\sqrt{3}} \left(x - \left(-\frac{1}{x} + \frac{2x-1}{x^2+1}\right)\right) dx \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right) dx \\
&= \frac{x^2}{2} + \ln x - \ln(x^2+1) + \arctan x \Big|_1^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln 3 + 2\ln 2 + \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2} - \ln 2 - \frac{1}{4}\pi \\
&= 1 + \frac{1}{2}\ln 3 + \ln 2 + \frac{1}{12}\pi.
\end{aligned}$$

Viele Integrale lassen sich durch geeignete Substitutionen auf Integrale über rationale Funktionen zurückführen. Sei etwa R eine rationale Funktionen von zwei Veränderlichen, d.h., $R(x,y) = P(x,y)/Q(x,y)$, wobei P und Q bei festem x Polynome in y und bei festem y Polynome in x sind. Dann kann

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

durch die Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$, $x = 2\arctan t$, in ein Integral über eine rationale Funktion überführt werden. Die Rechnungen sind allerdings aufwendig.

Auch Integrale der Form

$$\int R\Big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\Big)\, dx$$

lassen sich durch geeignete Substitutionen in Integrale über rationale Funktionen umformen.

5.4 Integralform des Taylorrestglieds

Mit partieller Integration lässt sich auch eine Formel für das Restglied der Taylorentwicklung gewinnen. Für eine n-mal differenzierbare Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $\xi, x \in I$ hatten wir (siehe §4.4)

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k$$

als Taylorpolynom (vom Grad n) bezeichnet. Für das *Restglied*

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x)$$

hatten wir für $(n+1)$-mal differenzierbares f die Darstellung

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1}$$

mit η zwischen ξ und x bewiesen (Satz 4.4.3). Man nennt dies auch die *Lagrangesche Form des Restglieds*. Wir leiten noch eine *Integralform des Restglieds* her.

Wir bezeichnen für ein Intervall I und $n \in \mathbb{N}$ die Menge der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen von I nach $\mathbb{C}$ mit $C^n(I)$. Manchmal schreibt man auch $C^n(I, \mathbb{C})$ und benutzt dann $C^n(I, \mathbb{R})$ für die entsprechende Menge reellwertiger Funktionen. Mit $C(I)$ bzw. $C(I, \mathbb{C})$ oder $C(I, \mathbb{R})$ bezeichnen wir die Menge der stetigen (englisch: continuous) Funktionen von I nach $\mathbb{C}$. Statt $C^n([a,b])$ bzw. $C([a,b])$ schreiben wir $C^n[a,b]$ bzw. $C[a,b]$.

Satz 5.4.1. *Für $f \in C^{n+1}(I)$ und $\xi, x \in I$ gilt*

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_\xi^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(\xi) + \int_\xi^x f'(t)dt \\
&= f(\xi) + f'(t)(t-x)\Big|_{t=\xi}^{t=x} - \int_\xi^x f''(t)(t-x)dt \\
&= f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \int_\xi^x f''(t)(x-t)dt \\
&= f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-\xi)^2 + \frac{1}{2}\int_\xi^x f'''(t)(x-t)^2 dt \\
&= \dots,
\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt durch vollständige Induktion. □

Ist f reellwertig, so erhält man mit dem erweiterten Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 5.1.11) aus der Integralform die Lagrangesche Form des Restglieds. (In Satz 4.4.3 wurde allerdings nicht die Stetigkeit von $f^{(n+1)}$ vorausgesetzt.)

In §4.4 hatten wir das Beispiel $f(x) = \ln x$, $\xi = 1$, untersucht und gezeigt, dass $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ für $\frac{1}{2} \le x \le 2$ gilt. Mit Satz 5.4.1 können wir zeigen, dass dies sogar für $0 < x \le 2$ gilt, denn für $0 < x < 1$ ist

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \left|\frac{1}{n!}\int_x^1 (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt\right| \\
&= \int_x^1 \frac{(t-x)^n}{t^{n+1}}dt \\
&= \int_x^1 \left(1-\frac{x}{t}\right)^n \frac{dt}{t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leq (1-x)^n \int_x^1 \frac{dt}{t}\\ &= (1-x)^n \ln\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Für $f \in C^{n+1}(I)$ folgt aus Satz 5.4.1, und für reellwertiges f auch aus Satz 4.4.3, dass positive Konstanten $K, \varepsilon \in$ mit

$$|R_n(x)| \leq K|x-\xi|^{n+1}$$

für $|x-\xi| < \varepsilon$ existieren. Nun können T_n und R_n aber bereits für n-mal differenzierbares f definiert werden. Dann erhalten wir aber nur schlechtere Abschätzungen.

Satz 5.4.2. *Für $f \in C^n(I)$ und ξ, x in I gilt*

$$\lim_{x\to\xi} \frac{R_n(x)}{(x-\xi)^n} = 0.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &= |f(x) - T_n(x)|\\ &= \left| f(x) - T_{n-1}(x) - \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^n \right|\\ &= \left| \frac{1}{(n-1)!} \int_\xi^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt - \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^n \right|\\ &= \left| \frac{1}{(n-1)!} \int_\xi^x \left(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(\xi)\right)(x-t)^{n-1} dt \right|\\ &\leq |x-\xi|^n \frac{1}{(n-1)!} \sup_t \left| f^{(n)}(t) - f^{(n)}(\xi) \right|,\end{aligned}$$

wobei das Supremum über alle t zwischen ξ und x zu nehmen ist. Die Behauptung folgt. □

Für reellwertiges f erhalten wir die Behauptung von Satz 5.4.2 auch direkt aus der Lagrangeschen Form des Restglieds: Es existiert η zwischen ξ und x mit

$$R_n(x) = R_{n-1}(x) - \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^n = \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(\eta) - f^{(n)}(\xi)\right)(x-\xi)^n.$$

Die obigen Restgliedabschätzungen lassen sich gut mit den sogenannten *Landau-Symbolen* beschreiben. Ist $M \subset \mathbb{C}$ und ξ Häufungspunkt von M, wobei für $M \subset \mathbb{R}$ auch $\xi = \pm\infty$ zugelassen ist, und sind $\alpha\colon M \to \mathbb{C}$ und $\beta\colon M \to (0,\infty)$, so schreibt man

$$\alpha(x) = o(\beta(x)) \text{ für } x \to \xi, \quad \text{falls } \lim_{x\to\xi} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$$

und

$$\alpha(x) = O(\beta(x)) \text{ für } x \to \xi, \quad \text{falls } \limsup_{x\to\xi} \frac{|\alpha(x)|}{\beta(x)} < \infty.$$

Dabei lässt man den Zusatz „für $x \to \xi$“ oft weg, wenn dieser aus dem Zusammenhang hervorgeht. Offensichtlich gilt $\alpha(x) = O(\beta(x))$ für $x \to \xi$ genau dann, wenn positive Konstanten K, ε existieren, so dass $|\alpha(x)|/\beta(x) \le K$ für $|x - \xi| < \varepsilon$, bzw. falls $x > 1/\varepsilon$ oder $x < -1/\varepsilon$ falls $\xi = \pm\infty$.

Für $\xi, x \in I$ und $f\colon I \to \mathbb{C}$ (mit einem Intervall I) erhalten wir damit:

$$\begin{aligned} f \in C^{n+1}(I) \quad &\Rightarrow \quad R_n(x) = O\big(|x-\xi|^{n+1}\big) \text{ für } x \to \xi, \\ f \in C^{n}(I) \quad &\Rightarrow \quad R_n(x) = o(|x-\xi|^{n}) \text{ für } x \to \xi. \end{aligned}$$

5.5 Folgen und Reihen integrierbarer Funktionen

In §3.7 bzw. §4.4 hatten wir untersucht, wann sich bei einer konvergenten Funktionenfolge aus der Stetigkeit bzw. Differenzierbarkeit der Folgenglieder die der Grenzfunktion folgern lässt. Wir betrachten hier das entsprechende Problem für Integrierbarkeit.

Satz 5.5.1. *Sei (f_n) eine Folge über $[a, b]$ integrierbarer Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Dann ist f über $[a, b]$ integrierbar und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Beweis. Ist bereits bekannt, dass f integrierbar ist, so folgt $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$ sehr leicht. Denn ist $\varepsilon > 0$, so existiert $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

für alle $n \ge N$. Es folgt

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) \right| \le (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

und damit die Behauptung.

Zu zeigen ist also lediglich die Integrierbarkeit von f. Diese zeigen wir mit dem Cauchykriterium (Satz 5.1.1). Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

für $n \ge N$. Für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ mit Stützstellen ξ folgt dann

$$|S(f_N, Z, \xi) - S(f, Z, \xi)| = |S(f_N - f, Z, \xi)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da f_N integrierbar ist, existiert $\delta > 0$, so dass für alle Zerlegungen Z_1, Z_2 mit Stützstellen ξ_1, ξ_2 gilt: Ist $|Z_1| < \delta$ und $|Z_2| < \delta$, so ist

$$|S(f_N, Z_1, \xi_1) - S(f_N, Z_2, \xi_2)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für $|Z_1| < \delta$ und $|Z_2| < \delta$ folgt damit

$$\begin{aligned}
&|S(f, Z_1, \xi_1) - S(f, Z_2, \xi_2)| \\
&\leq |S(f, Z_1, \xi_1) - S(f_N, Z_1, \xi_1)| + |S(f_N, Z_1, \xi_1) - S(f_N, Z_2, \xi_2)| \\
&\quad + |S(f_N, Z_2, \xi_2) - S(f, Z_2, \xi_2)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Natürlich gilt auch wieder ein Analogon von Satz 5.5.1 für Reihen.

Bevor wir ein Beispiel betrachten, notieren wir, dass man für $u\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)$ konvergent nennt, falls die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} u(k)$ und $\sum_{k=1}^{\infty} u(-k)$ beide konvergieren, und man setzt dann

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) + \sum_{k=1}^{\infty} u(-k).$$

Analog definiert man Begriffe wie absolute Konvergenz, gleichmäßige Konvergenz, usw. für Reihen von $-\infty$ nach $-\infty$.

Ist nun $c_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{Z}$ und konvergiert $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k$ absolut, so konvergiert nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium (Satz 3.7.4) die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ gleichmäßig für $x \in \mathbb{R}$. Da die durch $x \to e^{ikx}$ definierten Funktionen $e_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig sind, ist auch die durch

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ nach Satz 3.7.2 stetig. Für festes $j \in \mathbb{Z}$ gilt dann

$$f(x)e^{-ijx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} e^{-ijx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i(k-j)x},$$

und auch diese Reihe ist gleichmäßig konvergent. Damit gilt nach Satz 5.5.1

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ijx} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} c_k e^{i(k-j)x} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)x} dx.$$

Für $k \neq j$ folgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)x} dx = \frac{1}{k-j} e^{i(k-j)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} = (-1)^{k-j} - (-1)^{k-j} = 0.$$

Damit bleibt von obiger Reihe nur der Term mit $k = j$ übrig und wegen

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i0x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

erhält man

$$c_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ijx} dx.$$

Generell nennt man für eine 2π-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die über $[-\pi, \pi]$ integrierbar ist,

$$\widehat{f}(j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ijx} dx.$$

den j-ten *Fourierkoeffizient* von f. Für obiges f ist also $c_j = \widehat{f}(j)$. Die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}$$

heißt *Fourierreihe* von f. Die Frage, wann zu einer gegebenen Funktion die zugehörige Fourierreihe konvergiert – und ihre Summe die Funktion darstellt – ist ein wichtiges (und ausführlich untersuchtes) Problem. Dabei muss die betrachtete Funktion f natürlich 2π-periodisch sein, das heißt, es gilt $f(x+2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wegen $e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$ kann man mit $a_k := c_k + c_{-k}$ und $b_k := i\,(c_k - c_{-k})$ obige Reihe auch in der Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

schreiben.

Dieses ist so zu verstehen: Aus der Konvergenz der beiden Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikx}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-ikx}$ folgt die Konvergenz der beiden Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$, und dies gilt auch umgekehrt. Im Konvergenzfall gilt dann obige Gleichung.

Wir betrachten nur ein Beispiel.

Beispiel. Sei f die 2π-periodische Funktion, die für $x \in [-\pi, \pi]$ durch $f(x) = x^2$ gegeben ist. Für $k \neq 0$ erhält man mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
2\pi \widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-ikx} dx \\
&= x^2 \frac{e^{-ikx}}{-ik} \bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x \frac{e^{-ikx}}{-ik} dx \\
&= \frac{2}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-ikx} dx \\
&= \frac{2}{ik} \left(x \frac{e^{-ikx}}{-ik} \bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikx}}{-ik} dx \right) \\
&= \frac{2}{ik} 2\pi \frac{(-1)^k}{-ik} \\
&= 2\pi \frac{2(-1)^k}{k^2}.
\end{aligned}$$

also $\widehat{f}(k) = 2(-1)^k/k^2$ für $k \neq 0$. Außerdem gilt

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{3}\pi^2.$$

Die Fourierreihe hat damit die Form

$$\frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{(-1)^k}{k^2} e^{ikx} = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx.$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ konvergiert, konvergiert die Fouriereihe gleichmäßig. Man kann zeigen, dass die Funktion f auch wirklich durch sie dargestellt wird, das heißt, es gilt

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx \quad \text{für } -\pi \leq x \leq \pi.$$

Die Partialsummen einer Fourierreihe nennt man auch *Fourierpolynome*. Einige Fourierpolynome dieser Funktion sind in Abbildung 32 dargestellt.

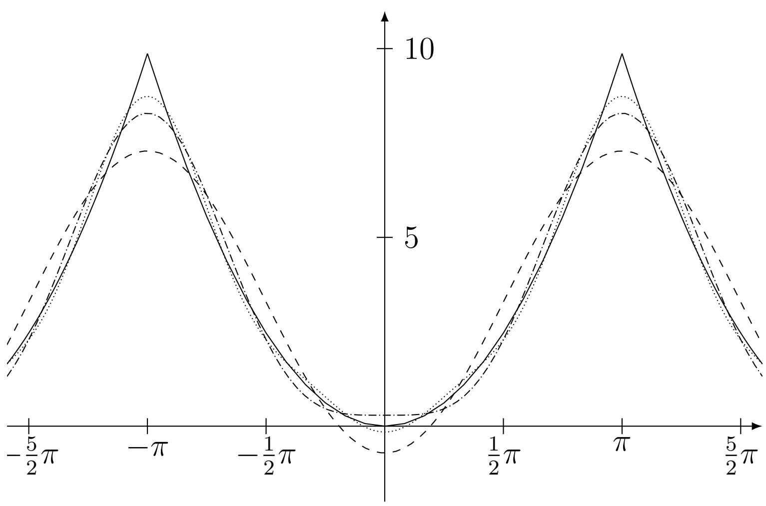

Abbildung 32: Fourierpolynome vom Grad 1, 2 und 3 für $f(x) = x^2$

Für $x = 0$ erhalten wir

$$0 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

und damit

$$\frac{1}{12}\pi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \ldots.$$

Für $x = \pi$ erhalten wir

$$\pi^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}(-1)^k$$

und damit

$$\frac{1}{6}\pi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots.$$

5.6 Uneigentliche Integrale

Bei der Definition von $\int_I f$ haben wir vorausgesetzt, dass I kompakt ist, und aus der Existenz des Integrals konnte die Beschränktheit von f gefolgert werden (Satz 5.1.3). Wir werden jetzt $\int_I f$ in einigen Fällen definieren, in denen I nicht kompakt oder f nicht beschränkt ist.

Definition 5.6.1. Sei $-\infty < a < b \le \infty$ und $f\colon [a,b) \to \mathbb{C}$. Für alle $c \in [a,b)$ sei f integrierbar über $[a,c]$. Existiert dann $\lim_{c\to b} \int_a^c f$, so heißt f *uneigentlich integrierbar* über $[a,b)$. Der Grenzwert heißt *uneigentliches Integral* von f über $[a,b)$ und wird mit $\int_a^b f$ bezeichnet.

Man sagt auch, dass das uneigentliche Integral *konvergiert* (bzw. *divergiert*). Analog definiert man für $-\infty \le a < b < \infty$ und $f\colon (a,b] \to \mathbb{C}$ das uneigentliche Integral $\int_a^b f$. Im Falle $f\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ sagt man, dass das uneigentliche Integral $\int_a^b f$ existiert, wenn für $c \in (a,b)$ die beiden uneigentlichen Integrale $\int_a^c f$ und $\int_c^b f$ existieren. Man setzt dann $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. (Dies hängt nicht von c ab.)

Beispiele. 1. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ gilt

$$\int_1^r \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(r^{1-\alpha} - 1\right) & \text{falls } \alpha \ne 1, \\ \ln r & \text{falls } \alpha = 1. \end{cases}$$

Es folgt, dass $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ für $\alpha > 1$ konvergiert, mit $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$, während $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ für $\alpha \le 1$ divergiert.

Für $\alpha = 2$ können wir dieses Beispiel physikalisch interpretieren: Ein Körper der Masse m habe den Abstand r vom Erdmittelpunkt. Die auf ihn wirkende Gravitationskraft $F(r)$ ist dann

$$F(r) = G\,\frac{m \cdot M}{r^2},$$

wobei M die Masse der Erde und G die Gravitationskonstante ist. Die Arbeit, die verrichtet werden muss, um den Körper vom Abstand a zum Abstand b anzugeben, ist

$$\int_a^b F(r)dr = GmM \int_a^b \frac{dr}{r^2} = -GmM\frac{1}{r}\bigg|_a^b = GmM\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

Die Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_a^\infty \frac{dr}{r^2}$, also die Existenz des Grenzwerts für $b \to \infty$, bedeutet physikalisch, dass man mit „endlicher Arbeit“ die Masse „unendlich hoch“ heben kann.

Bewegt sich die Masse mit Geschwindigkeit v, so ist ihre kinetische Energie

$$\frac{1}{2}mv^2.$$

Wählt man v mit

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int_a^b F(r)dr = GmM\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right),$$

so erhält man
$$v = \sqrt{2GM} \cdot \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}.$$
Entfernt sich der Körper im Abstand a mit der Geschwindigkeit v, wird er den Abstand b erreichen. Die sogenannte „Fluchtgeschwindigkeit“ erhält man für die obere Integralgrenze $b = \infty$, also
$$v = \sqrt{\frac{2GM}{a}}.$$
Mit dem Erdradius $a \approx 6371$ km, $G \approx 6{,}674 \cdot 10^{-11}$ m^3/(kg·s^2) und der Erdmasse $M \approx 5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg folgt $v \approx 11{,}2$ km/s.

2. Wir können in obigem Beispiel auch den Grenzwert für $r \to 0$ betrachten und erhalten, dass $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ für $\alpha < 1$ konvergiert und den Wert $\frac{1}{1-\alpha}$ hat, während das Integral für $\alpha \geq 1$ divergiert.

3. Es ist
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{a\to-\infty} (-\arctan a) + \lim_{b\to\infty} \arctan b \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \\ &= \pi.\end{aligned}$$

4. Das uneigentliche Integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$$
existiert nicht, denn
$$\lim_{r\to\infty} \int_0^r \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2} \ln\bigl(1+r^2\bigr) = \infty,$$
womit
$$\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$$
nicht existiert. (Auch
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2} dx$$
existiert nicht. Man beachte aber, dass
$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{x}{1+x^2} dx = 0$$
gilt.)

Satz 5.6.1. (Cauchykriterium für uneigentliche Integrale) *Sei* $-\infty < a < b < \infty$ *und* $f\colon [a,b) \to \mathbb{C}$. *Für alle* $c \in [a,b)$ *sei* f *integrierbar über* $[a,c]$. *Dann konvergiert* $\int_a^b f$ *genau dann, wenn für alle* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *existiert, so dass für alle* x, y *aus dem Intervall* $(b-\delta, b)$ *die Abschätzung* $\left|\int_x^y f\right| < \varepsilon$ *gilt.*

In Quantorenschreibweise lautet die Bedingung aus dem Cauchykriterium wie folgt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in (b-\delta, b)\colon\ \left|\int_x^y f\right| < \varepsilon.$$

Beweis. Man wende das Cauchykriterium für Funktionengrenzwerte (Satz 3.3.4) auf $F(x) := \int_a^x f$ und beachte, dass $F(y) - F(x) = \int_x^y f$. □

Ist $b = \infty$ in Satz 5.6.1, so lautet das Cauchykriterium: $\int_a^\infty f$ konvergiert genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists r > a\ \forall x, y \in (r, \infty)\colon\ \left|\int_x^y f\right| < \varepsilon.$$

Satz 5.6.2. (Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale) *Seien* $-\infty < a < b \le \infty$, $f\colon [a,b) \to \mathbb{C}$ *und* $g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$. *Für alle* $c \in [a,b)$ *seien* f *und* g *integrierbar über* $[a,c]$ *und es gelte* $|f(x)| \le g(x)$ *für alle* $x \in [a,b)$. *Konvergiert dann* $\int_a^b g$, *so konvergieren auch* $\int_a^b |f|$ *und* $\int_a^b f$.

Beweis. Wegen

$$\left|\int_x^y f\right| \le \int_x^y |f| \le \int_x^y g$$

für alle $x, y \in (a,b)$ folgt die Behauptung direkt aus dem Cauchykriterium. □

Durch Kontraposition kann man mit dem Vergleichskriterium natürlich auch Divergenz nachweisen.

Die Sätze 5.6.1 und 5.6.2 und die Bemerkungen dazu gelten analog für Funktionen $f\colon (a,b] \to \mathbb{C}$, $-\infty \le a < b < \infty$.

Beispiel. Wegen $|\sin t| \le 1$ für $t \in \mathbb{R}$ konvergiert

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$$

nach Vergleichskriterium und Beispiel 1 nach Definition 5.6.1 für $\alpha > 1$.

Tatsächlich konvergiert das Integral sogar für $\alpha > 0$, denn für $y > x >$

$(2/\varepsilon)^{1/\alpha} > 1$ folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\left|\int_x^y \frac{\sin t}{t^\alpha}dt\right| &= \left|-\frac{\cos t}{t^\alpha}\Big|_x^y - \alpha\int_x^y \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}dt\right| \\ &\le \frac{|\cos y|}{y^\alpha} + \frac{|\cos x|}{x^\alpha} + \alpha\int_x^y \frac{|\cos t|}{t^{\alpha+1}}dt \\ &\le \frac{1}{y^\alpha} + \frac{1}{x^\alpha} + \alpha\int_x^y \frac{dt}{t^{\alpha+1}} \\ &= \frac{2}{x^\alpha} \\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

und die Konvergenz folgt mit dem Cauchykriterium. Man kann hieraus folgern, dass

$$\int_0^\infty \sin t^2 dt$$

konvergiert, denn für $0 < x < y < \infty$ folgt mit der Substitutionsregel

$$\int_x^y \sin t^2 dt = \frac{1}{2}\int_{x^2}^{y^2} \frac{\sin s}{\sqrt{s}}ds.$$

Analog konvergiert auch

$$\int_0^\infty \cos t^2 dt.$$

Diese Integrale heißen auch *Fresnelsche Integrale*.

Satz 5.6.3. (Integralkriterium für Reihen) *Sei $f\colon [1,\infty) \to (0,\infty)$ monoton fallend. Dann konvergiert*

$$\int_1^\infty f(x)dx$$

genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^\infty f(k)$$

konvergiert.

Beweis. Nach Satz 5.1.12 ist f über kompakte Teilintervalle von $[1,\infty)$ integrierbar. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(x)dx \le f(k)$$

und damit folgt

$$\sum_{k=m+1}^n f(k) \le \int_m^n f(x)dx \le \sum_{k=m}^{n-1} f(k)$$

für $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m$. Die Behauptung folgt aus dem Cauchykriterium. □

Beispiel. 1. Für $\alpha > 1$ konvergiert

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}},$$

da

$$\int_2^r \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}} = -\frac{1}{(\alpha-1)(\ln x)^{\alpha-1}}\bigg|_2^r.$$

2. Die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$$

divergiert, da

$$\int_2^r \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x \bigg|_2^r.$$

5.7 Bogenlänge ebener Kurven

Bisher haben wir Integrale als Flächeninhalt interpretiert. Wir können Integrale auch zur Berechnung von Kurvenlängen benutzen. Dabei ist eine (ebene) Kurve eine stetige Abbildung eines Intervalls nach $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Für eine gerade Strecke haben wir eine offensichtliche Vorstellung, was ihre Länge sein sollte. Die Idee ist, Kurven durch Streckenzüge (d.h., eine aus mehreren geraden Strecken bestehende Kurve) zu approximieren.

Als *Beispiel* betrachten wir die durch $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto (1-\cos t)e^{it}$ gegebene Kurve; vgl. Abbildung 33. Betrachtet man diese Funktion im Intervall $[0, 2\pi]$, erhält man die sogenannte *Kardioide*.

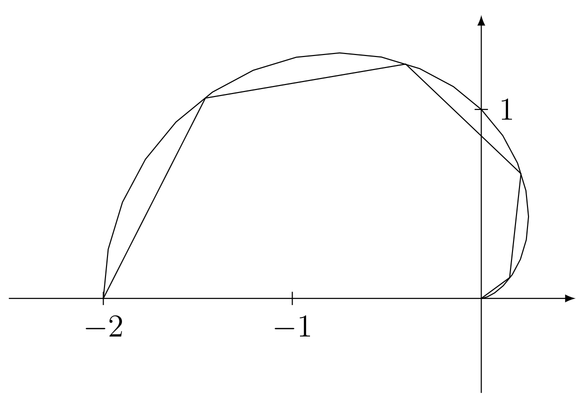

Abbildung 33: Approximation einer Kurve durch einen Streckenzug.

Definition 5.7.1. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig. Für eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ von $[a,b]$ sei

$$L(f,Z) := \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

und es sei

$$L(f) := \sup L(f, Z),$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen Z von $[a, b]$ zu nehmen ist. Ist dann $L(f) < \infty$, so heißt f *rektifizierbar* und $L(f)$ heißt *Länge* von f.

Satz 5.7.1. *Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Dann ist f rektifizierbar und $L(f) = \int_a^b |f'|$.*

Beweis. Sei $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ Zerlegung von $[a, b]$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sowie dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 5.1.10) existieren $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ mit

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| = \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f' \right| \leq |f'(\xi_k)|(x_k - x_{k-1}).$$

Mit $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ folgt $L(f, Z) \leq S(|f'|, Z, \xi)$ und damit

$$L(f) \leq \int_a^b |f'| < \infty.$$

Damit ist f rektifizierbar und für $x, y \in [a, b]$ mit $x < y$ auch $f|_{[x,y]}$ rektifizierbar mit

$$L(f|_{[x,y]}) \leq \int_x^y |f'|.$$

Wir definieren $\ell\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$\ell(x) = L(f|_{[a,x]}).$$

Dann gilt

$$\ell(y) - \ell(x) = L\big(f|_{[x,y]}\big)$$

und damit

$$|f(y) - f(x)| = L(f|_{[x,y]}, \{x, y\}) \leq L(f|_{[x,y]}) = \ell(y) - \ell(x) \leq \int_x^y |f'|$$

für $x, y \in [a, b]$ mit $x < y$. Division durch $y - x$ und Grenzübergang $x \to y$ bzw. $y \to x$ liefert, dass ℓ differenzierbar ist, mit $\ell' = |f'|$. Die Behauptung folgt aus dem Hauptsatz. □

Beispiele. 1. Sei $c > 0$, $\varphi > 0$ und $f\colon [0, \varphi] \to \mathbb{C}$, $f(t) = e^{ct}e^{it} = e^{(c+i)t}$. Dann gilt $f'(t) = (c + i)e^{(c+i)t}$ und

$$|f'(t)| = |c + i|e^{ct} \left|e^{it}\right| = \sqrt{c^2 + 1}\, e^{ct}.$$

Es folgt

$$L(f) = \int_0^{\varphi} \sqrt{c^2 + 1} e^{ct} dt = \sqrt{c^2 + 1}\, \frac{e^{ct}}{c}\bigg|_0^{\varphi} = \frac{\sqrt{c^2 + 1}}{c} \left(e^{\varphi c} - 1\right).$$

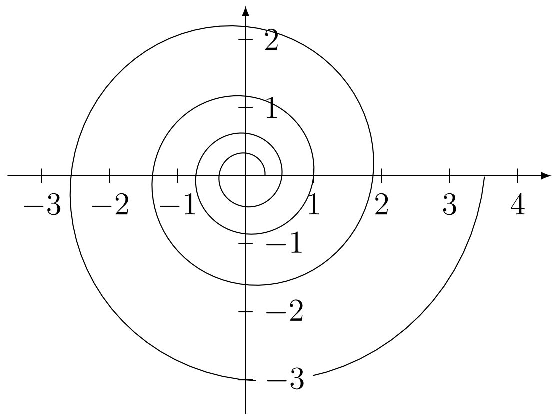

Abbildung 34: Eine logarithmische Spirale.

Die durch f gegebene Kurve heißt *logarithmische Spirale*. Für $c = 1/10$ ist der durch $-2\pi \leq t \leq 4\pi$ gegebene Teil in Abbildung 34 dargestellt.

Wir können obiges f natürlich auch für $c = 0$ betrachten, also $f\colon [0,\varphi] \to \mathbb{C}$, $f(t) = e^{it}$. Hier stellt f den Teil des Einheitskreises von 1 bis $e^{i\varphi}$ dar. Dies entspricht dem Kreisbogen mit den Endpunkten in $(1,0)$ und $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ in $\mathbb{R}^2$. Jetzt gilt $|f'(t)| = |ie^{it}| = 1$ und damit $L(f) = \varphi$; vgl. Abbildung 35.

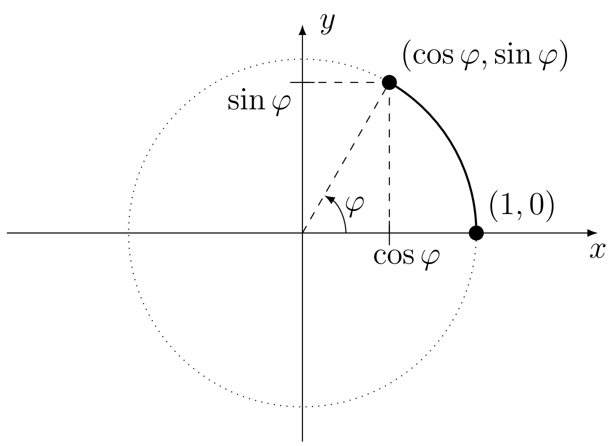

Abbildung 35: Definition von Sinus und Cosinus am Einheitskreis.

Dies zeigt, dass die Definition der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis der unsrigen entspricht: ist (x,y) ein Punkt auf dem Einheitskreis und hat der Kreisbogen, der den Punkt $(1,0)$ in positiver Orientierung mit (x,y) verbindet die Länge φ, so gilt $x = \cos\varphi$ und $y = \sin\varphi$.

2. Sei $c > 0$ und $f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $f(t) = cte^{it}$. Dann gilt $f'(t) = c(1+it)e^{it}$ und $|f'(t)| = c|1+it| = c\sqrt{1+t^2}$. Es folgt

$$\begin{aligned} L(f) &= c\int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2}dt \\ &= \frac{c}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right)\Big|_0^{2\pi} \end{aligned}$$

$$= \frac{c}{2}\left(2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right)\right).$$

Die durch f gegebene Kurve heißt *Archimedische Spirale*.

Für $c = 1/2\pi$ ist der durch $0 \le t \le 3$ gegebene Teil in Abbildung 36 dargestellt.

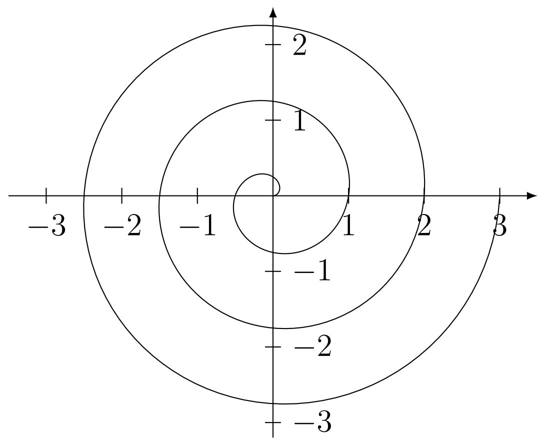

Abbildung 36: Eine archimedische Spirale.

3. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Die Länge des Graphen von f ist die Länge der durch $t \mapsto (t, f(t)) = t + if(t)$ gegebenen Kurve. Für stetig differenzierbares f ist diese durch

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(t)^2}dt$$

gegeben.

Für die Länge L des Graphen des durch $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ Parabelstücks gilt also

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$$

6 Topologie metrischer Räume

6.1 Metrik, Norm und Skalarprodukt

Bisher haben wir Funktionen $f\colon M \to N$ mit $M, N \subset \mathbb{R}, \mathbb{C}$ betrachtet. Jetzt werden wir allgemeinere Mengen M, N zulassen, etwa $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$, oder auch Mengen von Funktionen. Wichtige Beispiele sind hier $C^n(I)$ und $C(I)$ mit einem Intervall I. Die genannten Mengen bilden Vektorräume. (Der Begriff des Vektorraums wird als aus der Linearen Algebra bekannt vorausgesetzt.) Wir benötigen aber noch weitere „Strukturen" auf diesen Mengen.

Definition 6.1.1. Sei M nichtleere Menge. Eine Funktion $d\colon M \times M \to [0,\infty)$ heißt *Metrik*, wenn für alle $x, y, z \in M$ die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ (*Symmetrie*)

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (*Dreiecksungleichung*)

Das Paar (M,d) heißt dann *metrischer Raum.*

Beispiele. 1. $M = \mathbb{R}$ oder $M = \mathbb{C}$, $d(x,y) = |x-y|$. Wir nennen d die *euklidische Metrik* und $d(x,y)$ den *euklidischen Abstand* von x und y.

2. $M \neq \emptyset$ beliebig,

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y, \\ 0 & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

Dies nennt man die *diskrete Metrik* auf M.

3. $M = \mathbb{C}$,

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{falls } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \lambda x + \mu y = 0 \text{ existieren,} \\ |x| + |y| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Liegen die Punkte x, y auf einer Geraden durch 0, so ist $d(x,y)$ also der euklidische Abstand. Andernfalls ist $d(x,y)$ die Summe der Abstände zu 0. (Aus naheliegenden Gründen nennt man das auch „französische Eisenbahnmetrik“.)

Weitere wichtige Beispiele metrischer Räume erhält man durch folgende Definition. Hier und im folgenden sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition 6.1.2. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Funktion $\|\cdot\|\colon V \to [0,\infty)$ (also $x \mapsto \|x\|$) heißt *Norm*, wenn für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(ii) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*Dreiecksungleichung*)

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt dann *normierter Raum.*

Satz 6.1.1. *Sei $(V, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Dann ist die durch $d(x,y) := \|x-y\|$ definierte Funktion $d\colon V \times V \to [0,\infty)$ eine Metrik auf V, d. h., (V,d) ist metrischer Raum.*

Beweis. Seien $x, y, z \in V$. Dann gilt

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |(-1)| \cdot \|(y-x)\| = \|(y-x)\| = d(y,x)$$

und

$$d(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z). \quad \square$$

Beispiele. 1. $V = \mathbb{K}$, $\|x\| = |x|$ für $x \in V$.

2. Sei $V = \mathbb{K}^p$ mit $p \in \mathbb{N}$. Wir schreiben $x \in \mathbb{K}^p$ als Spaltenvektor in der Form

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)^T$$

Hier steht „T" für „transponiert". Mit

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \le j \le p} |x_j|$$

ist $(V, \|\cdot\|_\infty)$ dann normierter Raum. Die drei Bedingungen aus Definition 6.1.2 sind sehr einfach nachzurechnen.

3. Sei $V = \mathbb{K}^p$ mit $p \in \mathbb{N}$ und

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^{p} |x_j| \quad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_p)^T \in V.$$

Dann ist $(V, \|\cdot\|_1)$ normierter Raum.

4. Sei $V = C[a,b]$ und

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

für $f \in V$. Dann ist $(V, \|\cdot\|_\infty)$ normierter Raum. Die zugehörige Metrik d ist durch

$$d(f,g) := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

gegeben.

5. Sei $V = C[a,b]$ und

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f|$$

für $f \in V$. Dann ist $(V, \|\cdot\|_1)$ normierter Raum. Die zugehörige Metrik d_1 ist durch $d_1(f,g) := \int_a^b |f-g|$ gegeben.

Die einzige Bedingung aus Definition 6.1.2, die vielleicht nicht offensichtlich ist, ist „$\Leftarrow$" in (i). Wir zeigen dies durch Kontraposition. Sei dazu $f \in C[a,b]$, $f \neq 0$. Dann existiert $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) \neq 0$. Da f stetig, existiert $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon := \frac{1}{2}|f(\xi)|$ für $|x - \xi| < \delta$, $x \in [a,b]$. Mit $I := [a,b] \cap [\xi - \delta, \xi + \delta]$ folgt $|f(x)| \ge |f(\xi)| - |f(x) - f(\xi)| > |f(\xi)| - \varepsilon = \varepsilon$ für $x \in I$ und damit

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f| \ge \int_I |f| \ge \varepsilon |I| > 0.$$

Die zu dieser Norm gehörige Metrik ist durch

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

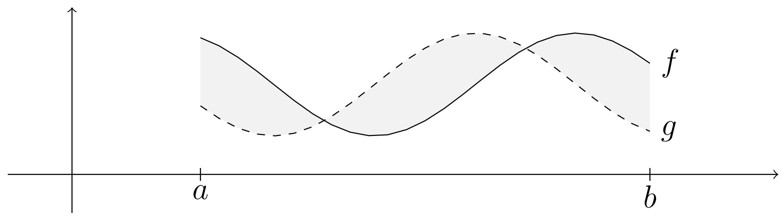

Abbildung 37: Der Abstand zweier Funktionen f und g bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$.

gegeben. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist dies der Flächeninhalt der von den Graphen von f und g eingeschlossenen Fläche; vgl. Abbildung 37.

6. Sei V der Vektorraum der Riemann-integrierbaren Funktionen von $[a, b]$ nach $\mathbb{C}$ und sei, wie im Beispiel zuvor, $\|f\|_1 := \int_a^b |f|$ für $f \in V$. Dann ist $(V, \|\cdot\|_1)$ *kein* normierter Raum, denn Bedingung (i) aus Definition 6.1.2 gilt nicht, wie das Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = a, \\ 0 & \text{falls } a < x \leq b, \end{cases}$$

zeigt.

Definition 6.1.3. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ (also $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$) heißt *Skalarprodukt* (oder *inneres Produkt*), wenn für alle $x, y, z \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ die folgenden fünf Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,

(ii) $\langle x, x \rangle \geq 0$,

(iii) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(iv) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$,

(v) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

Dabei steht der Querstrich in (i) für komplexe Konjugation. (Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ kann also darauf verzichtet werden.) Das Paar $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt *Prähilbertraum.*

Statt $\langle x, y \rangle$ sind auch die Schreibweisen $x \cdot y$ und (x, y) üblich.

Satz 6.1.2. *Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Prähilbertraum. Dann ist durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm auf V definiert, d. h., $(V, \|\cdot\|)$ ist normierter Raum.*

Wir stellen den Beweis von Satz 6.1.2 noch etwas zurück und betrachten zunächst zwei Beispiele.

Beispiel 1. Sei $V = \mathbb{K}^p$ mit $p \in \mathbb{N}$. Man rechnet leicht nach, dass mit

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{p} x_j \overline{y_j}$$

für $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in V$ ein Skalarprodukt gegeben ist. (Dieses Skalarprodukt ist für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ das aus der Schule bekannte Skalarprodukt.) Die zugehörige Norm heißt *euklidische Norm* und wird mit $\|\cdot\|_2$ bezeichnet, also

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} x_j \overline{x_j}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} |x_j|^2}.$$

Die zugehörige Metrik heißt *euklidische Metrik*.

Beispiel 2. Sei $V = C[a,b]$ und

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f\overline{g}.$$

Die Skalarprodukteigenschaften sind einfach nachzurechnen; für (iii) vgl. Beispiel 5 nach Satz 6.1.1.

Wir ziehen einige einfache Folgerungen aus den Eigenschaften (i)–(v) von Definition 6.1.3. Dabei seien wieder $x, y, z \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$:

(a) $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda}\langle x, y \rangle$, denn $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\langle \lambda y, x \rangle} = \overline{\lambda \langle y, x \rangle} = \overline{\lambda}\ \overline{\langle y, x \rangle} = \overline{\lambda}\langle x, y \rangle$,

(b) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$,

(c) $\langle 0, x \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$, denn $\langle 0, x \rangle = \langle 0 - 0, x \rangle = \langle 0, x \rangle - \langle 0, x \rangle = 0$.

Drei weitere wichtige Eigenschaften fassen wir in folgendem Satz zusammen.

Satz 6.1.3. *Sei* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *Prähilbertraum,* $x, y \in V$*. Dann gilt (mit* $\|\cdot\|$ *wie in Satz* 6.1.2*)*

(i) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y \rangle$ (*Satz des Pythagoras*).

(ii) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (*Parallelogrammidentität*).

(iii) $|\langle x, y \rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$ (*Cauchy-Schwarz-Ungleichung*).

Beweis. Zu (i): Es gilt

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\
&= \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2.
\end{aligned}$$

Zu (ii): Ersetzt man y durch $-y$ in (i) und addiert man die erhaltene Gleichung zu (i), erhält man sofort (ii).

Zu (iii): Für $\lambda \in \mathbb{K}$

$$0 \le \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - \lambda \langle y, x \rangle - \overline{\lambda}\langle x, y \rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle y, y \rangle$$

gilt. Mit $\lambda = \langle x, y\rangle / \langle y, y\rangle = \langle x, y\rangle / \|y\|^2$ folgt

$$0 \le \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle \cdot \langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle} = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}$$

und hieraus die Behauptung. □

Beweis von Satz 6.1.2. Seien $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

und

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\langle x, x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\langle x, x\rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und dem Satz des Pythagoras gilt

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = \left(\|x\| + \|y\|\right)^2,$$

also die Dreiecksungleichung. □

Eine Analyse des Beweises zeigt, dass für $x, y \neq 0$ in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung genau dann Gleichheit gilt, wenn $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $x = \lambda y$ existiert. (Es gilt dann $\lambda = \langle x, y\rangle / \langle y, y\rangle$.) Gleichheit in der Dreiecksungleichung gilt genau dann, wenn $\lambda > 0$ mit $x = \lambda y$ existiert.

6.2 Konvergenz

Definition 6.2.1. Sei (M, d) metrischer Raum und (a_n) Folge in M. Dann heißt (a_n) *konvergent*, falls $a \in M$ mit folgender Eigenschaft existiert:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(a_n, a) < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

Dieses a heißt dann *Grenzwert* der Folge (a_n) und wir schreiben $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ oder $a_n \to a$ (für $n \to \infty$).

Weiter heißt $b \in M$ *Häufungswert* von (a_n), falls für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $d(a_n, b) < \varepsilon$ existieren.

Diese Definition ist völlig analog zu den Definitionen 2.1.4 und 2.3.1 in Analysis I. Viele der dort gemachten Aussagen über Grenzwerte und Häufungswerte übertragen sich leicht. So gilt wieder die Aussage von Satz 2.1.1: *Eine konvergente Folge hat genau einen Grenzwert.* Es gilt auch wieder die Aussage von Satz 2.3.2:

(i) *a ist Häufungswert von (a_n) $\Leftrightarrow$ Es existiert eine Teilfolge von (a_n), die gegen a konvergiert.*

(ii) *a ist Grenzwert von (a_n) $\Leftrightarrow$ Alle Teilfolgen von (a_n) konvergieren gegen a.*

Beispiel. Sei $V := C[a,b]$ und d die von der Norm $\|\cdot\|_\infty$ erzeugte Metrik, also

$$d(f,g) = \|f-g\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$$

für $f,g \in V$. Sei (f_n) Folge in V und $f \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& f_n \to f \text{ (bzgl. der von } \|\cdot\|_\infty \text{ erzeugten Metrik in } V)\\
\Leftrightarrow\ & \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N \colon \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon\\
\Leftrightarrow\ & \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N \forall x \in [a,b] \colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\\
\Leftrightarrow\ & f_n \to f \text{ gleichmäßig}
\end{aligned}$$

Die folgende Definition ist analog zu Definition 2.3.3.

Definition 6.2.2. Sei (M,d) metrischer Raum und (x_n) Folge in M. Dann heißt (x_n) *Cauchyfolge*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $m,n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq N$ und $n \geq N$ gilt, dass $d(x_m,x_n) < \varepsilon$ ist.

Vom Cauchykriterium für Folgenkonvergenz (Satz 2.3.5) gilt aber nur „eine Hälfte“.

Satz 6.2.1. *Konvergente Folgen sind Cauchyfolgen.*

Beweis. (vgl. Beweis zu Satz 2.3.5). Sei (M,d) metrischer Raum und sei (x_n) konvergente Folge in M, etwa $x_n \to \xi$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n,\xi) < \frac{1}{2}\varepsilon$ für $n \geq N$. Für $m,n \in \mathbb{N}$ mit $m,n \geq N$ folgt dann $d(x_m,x_n) \leq d(x_m,\xi) + d(\xi,x_n) < \varepsilon$. □

Die Umkehrung gilt nicht, wie etwa das Beispiel $M = \mathbb{Q}$ (mit der euklidischen Metrik) zeigt, und wie wir später an weiteren Beispielen sehen werden.

Definition 6.2.3. Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in ihm konvergiert. Ein vollständiger normierter Raum heißt *Banachraum* und ein vollständiger Prähilbertraum heißt *Hilbertraum*.

Beispiele. 1. $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig. Denn sei (f_n) Cauchyfolge in $C[a,b]$, d.h., (vgl. das Beispiel nach Definition 6.2.1)

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a,b]\ \forall m,n \in \mathbb{N} \colon m \geq N \wedge n \geq N \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Nach dem Cauchykriterium für Funktionenfolgen (Satz 3.7.1) folgt, dass (f_n) gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ konvergiert. Nach Satz 3.7.2 ist f stetig, also $f \in C[a,b]$. Es folgt, dass (f_n) in $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ gegen f konvergiert.

2. $(C[a,b], \|\cdot\|_1)$ ist nicht vollständig. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $[a,b] = [-1,1]$. Wir betrachten die durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } -1 \leq x \leq 0,\\ nx & \text{falls } 0 < x \leq \frac{1}{n},\\ 1 & \text{falls } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

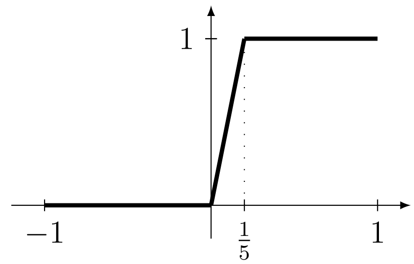

Abbildung 38: Die Funktion f_n für $n = 5$.

definierte Folge (f_n); vgl. Abbildung 38.

Für $m > n$ gilt

$$\|f_m - f_n\|_1 = \int_{-1}^{1} |f_m - f_n| \le \int_0^{\frac{1}{n}} |f_m - f_n| \le \frac{1}{n}$$

und damit ist (f_n) Cauchyfolge. Die Folge (f_n) ist aber nicht konvergent. Dies ist intuitiv klar, da der der einzige „Kandidat" f für eine Grenzfunktion $f(x) = 0$ für $x < 0$ und $f(x) = 1$ für $x > 0$ erfüllen sollte, und damit in 0 nicht stetig sein kann.

Für einen formalen Beweis nehmen wir an, dass (f_n) konvergent ist, also $f_n \to f$ für ein $f \in C[-1, 1]$. Es existiert $\delta \in (0, 1]$ mit $|f(x) - f(0)| \le \frac{1}{4}$ für $|x| < \delta$. Falls $|f(0)| \le \frac{1}{2}$ folgt

$$\|f - f_n\|_1 \ge \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} |f(x) - 1| dx \ge \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} 1 - |f(0)| - |f(x) - f(0)| dx \ge \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{1}{4} dx = \frac{\delta - \frac{1}{n}}{4}$$

für $n \ge \frac{1}{\delta}$ und im Falle $|f(0)| > \frac{1}{2}$ gilt

$$\|f - f_n\|_1 \ge \int_{-\delta}^{0} |f(x)| dx \ge \int_{-\delta}^{0} \frac{1}{4} dx = \frac{\delta}{4}.$$

In beiden Fällen erhält man einen Widerspruch.

3. $(\mathbb{K}^p, \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig (für $p \in \mathbb{N}$). Denn sei (x^k) Cauchyfolge in $\mathbb{K}^p$, mit $x^k = (x_1^k, \ldots, x_p^k)^T$. (Wir schreiben den Folgenindex oben, da wir mit einem Index j die j-te Komponente eines Punktes in $\mathbb{K}^p$ meinen.) Wegen $|x_j^k - x_j^\ell| \le \|x^k - x^\ell\|_\infty$ für $k, \ell \in \mathbb{N}$ und $j \in \{1, \ldots, p\}$ folgt, dass $(x_j^k)_{k \in \mathbb{N}}$ für jedes $j \in \{1, \ldots, p\}$ eine Cauchyfolge ist. Damit ist sie auch konvergent, etwa $x_j^k \to \xi_j$. Mit $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_p)$ folgt dann

$$\|x^k - \xi\|_\infty = \max_j |x_j^k - \xi_j| \to 0,$$

also $x^k \to \xi$ für $k \to \infty$.

Genauso kann man zeigen, dass $(\mathbb{K}^p, \|\cdot\|_1)$ und $(\mathbb{K}^p, \|\cdot\|_2)$ vollständig sind. Dies kann man sich aber auch an Hand des folgenden Begriffes überlegen.

Definition 6.2.4. Sei V Vektorraum über $\mathbb{K}$ und seien $\|\cdot\|'$ und $\|\cdot\|''$ Normen auf V. Dann heißen $\|\cdot\|'$ und $\|\cdot\|''$ *äquivalent*, falls $\alpha, \beta > 0$ existieren, so dass $\alpha\|x\|' \le \|x\|'' \le \beta\|x\|'$ für alle $x \in V$ gilt.

Sind die Normen $\|\cdot\|'$ und $\|\cdot\|''$ auf dem Vektorraum V äquivalent, so ist eine Folge (x_n) in V offensichtlich genau dann konvergent (bzw. Cauchyfolge) in $(V, \|\cdot\|')$, wenn sie konvergent (bzw. Cauchyfolge) in $(V, \|\cdot\|'')$ ist. Leicht rechnet man nun nach, dass in $\mathbb{K}^p$ die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent zur Norm $\|\cdot\|_\infty$ sind. Beispielsweise gilt für $x = (x_1, \ldots, x_p)^T \in \mathbb{K}^p$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le j\le p} |x_j| \le \|x\|_1 = \sum_{1\le j\le p} |x_j| \le p \max_{1\le j\le p} |x_j| = p\|x\|_\infty.$$

Hieraus folgt, dass mit $(\mathbb{K}^p, \|\cdot\|_\infty)$ auch $(\mathbb{K}^p, \|\cdot\|_1)$ und $(\mathbb{K}^p, \|\cdot\|_2)$ vollständig sind.

Schließlich notieren wir noch das folgende Analogon zu Definition 3.3.1.

Definition 6.2.5. Sei (M, d) metrischer Raum, $A \subset M$ und $\xi \in M$. Dann heißt ξ *Häufungspunkt* von A, falls eine Folge (a_n) in $A\backslash\{\xi\}$ mit $a_n \to \xi$ existiert.

6.3 Offene und abgeschlossene Mengen

Definition 6.3.1. Sei (M, d) metrischer Raum und $x \in M$. Für $\varepsilon > 0$ heißt dann $U(x, \varepsilon) := \{y \in M : d(x, y) < \varepsilon\}$ die *ε-Umgebung* von x. Sei weiter $A \subset M$. Existiert $\varepsilon > 0$ mit $U(x, \varepsilon) \subset A$, so heißt A *Umgebung* von x. Weiter heißt A *offen*, falls A Umgebung jedes Punktes von A ist, und A heißt *abgeschlossen*, falls $M\backslash A$ offen ist.

Die Bezeichnungen für die ε-Umgebung sind in der Literatur sehr uneinheitlich, statt $U(a, \varepsilon)$ findet man auch $B(a, \varepsilon)$, $K(a, \varepsilon)$, $D(a, \varepsilon)$, $U_\varepsilon(a)$, $B_\varepsilon(a)$, $K_\varepsilon(a)$ und anderes. Abbildung 39 zeigt ε-Umgebungen des Nullpunktes in $\mathbb{R}^2$ bezüglich verschiedener Metriken.

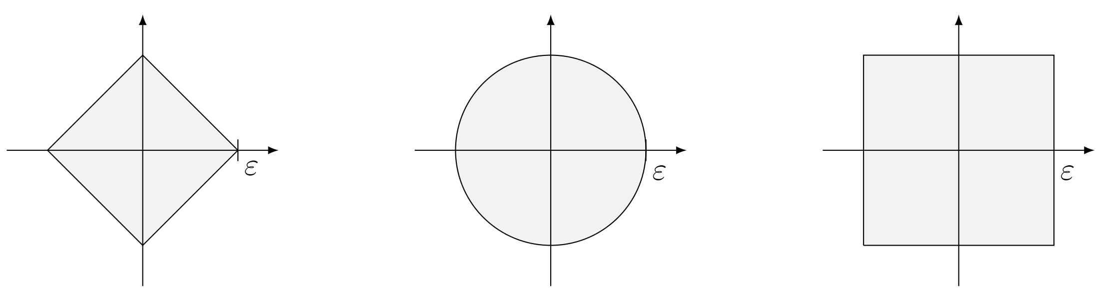

Abbildung 39: ε-Umgebungen von $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der durch die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ gegebenen Metriken.

Man beachte, dass eine Menge weder offen noch abgeschlossen sein muss. Etwa ein halboffenes Intervall $[a, b)$ in $\mathbb{R}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, ist weder offen noch abgeschlossen.

Sei (M, d) metrischer Raum und $N \subset M$. Dann ist auch $(N, d|_{N\times N})$ metrischer Raum. Für $A \subset N$ können wir Offenheit und Abgeschlossenheit außer in (M, d) jetzt auch in $(N, d|_{N\times N})$ betrachten. Wir sagen dann, dass A *relativ offen (bzw. abgeschlossen) in* N ist. Den Zusatz „relativ“ lassen wir dabei in der Regel weg.

Beispiele. 1. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ ist das offene Intervall (a, b) offen in $\mathbb{R}$, aber nicht offen in $\mathbb{C}$. Denn bezeichnen wir mit $U(x, \varepsilon)$ die ε-Umgebung in $\mathbb{C}$, so gilt folgt mit $\varepsilon := \min\{x - a, b - x\}$, dass $U(x, \varepsilon) \cap \mathbb{R} = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a, b)$. Andererseits ist (a, b) nicht offen in $\mathbb{C}$, da für $x \in (a, b)$ und $\varepsilon > 0$ ja $x + \frac{1}{2}\varepsilon i \in U(x, \varepsilon)\backslash(a, b)$ gilt. Entsprechendes gilt für Intervalle $(-\infty, b)$ und (a, ∞).

2. Abgeschlossene Intervalle sind abgeschlossen in $\mathbb{R}$ (und damit auch in $\mathbb{C}$).

Aus der Offenheit von A in M folgt die Offenheit von A in N. Allgemeiner gilt:

Satz 6.3.1. *Sei (M, d) metrischer Raum und $A \subset N \subset M$. Dann ist A offen in N genau dann, wenn ein (in M) offenes $B \subset M$ mit $A = B \cap N$ existiert.*

Beweis. Wir bezeichnen die ε-Umgebungen in M bzw. N mit $U_M(\cdot, \varepsilon)$ bzw. $U_N(\cdot, \varepsilon)$. Dann gilt $U_N(x, \varepsilon) = U_M(x, \varepsilon) \cap N$ für alle $x \in N$.

Sei nun $B \subset M$ offen in M und $A := B \cap N$. Ist $x \in A$, so ist auch $x \in B$ und damit existiert $\varepsilon > 0$ mit $U_M(x, \varepsilon) \subset B$. Es folgt

$$U_N(x, \varepsilon) = U_M(x, \varepsilon) \cap N \subset B \cap N = A.$$

Also ist A offen in N.

Ist umgekehrt $A \subset N$ offen in N, so existiert für jedes $x \in A$ ein $\varepsilon_x > 0$ mit $U_N(\varepsilon_x, x) \subset A$. Hieraus erhält man $A = \bigcup_{x \in A} U_N(\varepsilon_x, x)$ und damit leistet $B := \bigcup_{x \in A} U_M(\varepsilon_x, x)$ das Verlangte. □

Satz 6.3.2.

(i) *Vereinigungen offener Mengen sind offen und Durchschnitte von endlich vielen offenen Mengen sind offen.*

(ii) *Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen und Vereinigungen von endlich vielen abgeschlossenen Mengen sind abgeschlossen.*

Beweis. (i). Sei X Menge offener Mengen und $V = \bigcup_{U \in X} U$. Zu zeigen ist, dass V offen ist. Sei dazu $\xi \in V$. Dann existiert $U \in X$ mit $\xi \in U$. Damit ist U Umgebung von ξ, und wegen $V \supset U$ also auch V Umgebung von ξ.

Seien jetzt $U_1, \ldots, U_n$ offen und $V = \bigcap_{j=1}^n U_j$. Sei $\xi \in V$. Dann ist $\xi \in U_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ und damit existiert $\varepsilon_j > 0$ mit $U(\xi, \varepsilon_j) \subset U_j$. Wir definieren $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. Es folgt dann $U(\xi, \varepsilon) \subset U_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$, also $U(\xi, \varepsilon) \subset \bigcap_{j=1}^n U_j = V$. Damit ist V offen.

(ii). Dies folgt aus (i) und den Regeln von de Morgan. □

Bemerkung. Ein Durchschnitt unendlicher vieler offener Mengen ist im Allgemeinen nicht offen. So ist das Intervall $I_n = (-1/n, 1/n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}$, aber $\bigcap_{n=1}^\infty I_n = \{0\}$ ist nicht offen.

Analog ist die Vereinigung unendlich vieler abgeschlossener Mengen im Allgemeinen nicht abgeschlossen.

Satz 6.3.3. *Sei (M, d) metrischer Raum und $A \subset M$. Dann sind äquivalent:*

(i) *A ist abgeschlossen.*

(ii) *Für jede konvergente Folge in A ist auch ihr Grenzwert in A.*

(iii) *A enthält alle seine Häufungspunkte.*

Beweis. Zu (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei A abgeschlossen und (x_n) Folge in A mit $x_n \to \xi$. Zu zeigen ist, dass $\xi \in A$. Dazu nehmen wir an, dass $\xi \in M \backslash A$. Da $M \backslash A$ offen ist, existiert $\varepsilon > 0$ mit $U(\xi, \varepsilon) \subset M \backslash A$, also $d(x, \xi) \geq \varepsilon$ für alle $x \in A$, insbesondere damit $d(x_n, \xi) \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $x_n \not\to \xi$, ein Widerspruch.

Zu (ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei ξ Häufungspunkt von A. Dann existiert eine Folge (x_n) in $A \backslash \{\xi\}$ mit $x_n \to \xi$. Es folgt $\xi \in A$.

Zu (iii) $\Rightarrow$ (i): Wir nehmen an, dass A nicht abgeschlossen ist, also $M \backslash A$ nicht offen ist. Dann existiert $\xi \in M \backslash A$, so dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass $U(\xi, \varepsilon) \not\subset M \backslash A$, also $U(\xi, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Insbesondere existiert dann $x_n \in U(\xi, 1/n) \cap A$. Es folgt $x_n \to \xi$. Da $x_n \in A \backslash \{\xi\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist ξ Häufungspunkt von A, also $\xi \in A$, ein Widerspruch. □

Definition 6.3.2. Sei (M, d) metrischer Raum und $A \subset M$. Sei X die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen von M, die A enthalten. Dann heißt

$$\overline{A} := \bigcap_{T \in X} T$$

der *Abschluss* von A.

Nach Satz 6.3.2 ist $\overline{A}$ abgeschlossen. Damit ist $\overline{A}$ also die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält. Es gilt

$$\overline{A} = A \cup \{x \in M \colon x \text{ ist Häufungspunkt von } A\}.$$

Satz 6.3.4. *Sei (M, d) vollständiger metrischer Raum und $A \subset M$ abgeschlossen. Dann ist A vollständig (d.h., $(A, d|_{A \times A})$ ist vollständiger metrischer Raum).*

Beweis. Ist (x_n) Cauchfolge in A, so ist (x_n) Cauchfolge in M, also gilt $x_n \to \xi$ für ein $\xi \in M$. Mit Satz 6.3.3 folgt $\xi \in A$. □

6.4 Stetigkeit

Definition 6.4.1. Seien $(M, d_M), (N, d_N)$ metrische Räume und sei $f \colon M \to N$ eine Funktion. Sei $\xi \in M$. Dann heißt f *stetig in* ξ, falls für jede Folge (x_n) in M mit $x_n \to \xi$ gilt, dass $f(x_n) \to f(\xi)$. Für $A \subset M$ heißt f stetig in A, falls f stetig in jedem Punkt von A ist. Schließlich heißt f stetig, wenn f stetig in M ist.

Für $M, N \subset \mathbb{C}$, mit der euklidischen Metrik versehen, ist dies genau Definition 3.1.1. Die Sätze 3.1.1 und 3.1.2 übertragen sich unmittelbar:

Satz 6.4.1. *Seien $(M, d_M), (N, d_N), (P, d_P)$ metrische Räume, $g \colon M \to N$ stetig (in $\xi \in M$) und $f \colon N \to P$ stetig (in $g(\xi) \in g(M)$). Dann ist $f \circ g$ stetig (in ξ).*

Satz 6.4.2. *Seien $(M,d_M),(N,d_N)$ metrische Räume, $\xi \in M$ und $f\colon M \to N$. Dann ist f stetig in ξ genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jedes $x \in M$ mit $d_M(x,\xi) < \delta$ gilt, dass $d_N(f(x), f(\xi)) < \varepsilon$ ist.*

Beispiel. Sei (M,d) metrischer Raum, $A \subset M$ und $f\colon A \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \inf_{a\in A} d(a,x)$. Es ist also $f(x)$ der Abstand von x zur Menge A.

Behauptung. f ist stetig.

Beweis. Sei $x,y \in M$ und $a \in A$. Dann gilt $d(x,a) \le d(x,y) + d(y,a)$ und damit $f(x) \le d(x,y) + f(y)$. Es folgt $f(x) - f(y) \le d(x,y)$ und aus Symmetriegründen auch $f(y) - f(x) \le d(x,y)$, also $|f(y) - f(x)| \le d(x,y)$. Die Stetigkeit von d folgt jetzt aus Satz 6.4.2. (Man kann dort $\delta := \varepsilon$ wählen.) □

Satz 6.4.3. *Seien $(M,d_M),(N,d_N)$ metrische Räume und $f\colon M \to N$. Dann gilt:*

(i) *Sei $\xi \in M$. Dann ist f stetig in ξ genau dann, wenn für jede Umgebung U von $f(\xi)$ das Urbild $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von ξ ist.*

(ii) *Die Funktion f ist genau dann stetig, wenn für jedes offene $U \subset N$ das Urbild $f^{-1}(U)$ offen ist.*

Beweis. Behauptung (ii) folgt leicht aus (i). Es reicht also, (i) zu beweisen. Dazu benutzen wir die Charakterisierung der Stetigkeit durch die ε-δ-Bedingung (Satz 6.4.2 bzw. Satz 3.1.2).

Sei zunächst f stetig in ξ und sei U Umgebung von $f(\xi)$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $U(f(\xi),\varepsilon) \subset U$. Da f stetig in ξ ist, existiert $\delta > 0$ mit $d_N(f(x), f(\xi)) < \varepsilon$ für alle $x \in M$ mit $d_M(x,\xi) < \delta$. Es folgt, dass $f(x) \in U(f(\xi),\varepsilon) \subset U$ für alle $x \in M$ mit $d_M(x,\xi) < \delta$, also $U(\xi,\delta) \subset f^{-1}(U)$. Damit ist $f^{-1}(U)$ Umgebung von ξ.

Sei nun umgekehrt für jede Umgebung U von $f(\xi)$ das Urbild $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von ξ. Sei $\varepsilon > 0$. Da $U(f(\xi),\varepsilon)$ Umgebung von $f(\xi)$ ist, ist $f^{-1}(U(f(\xi),\varepsilon))$ Umgebung von ξ. Damit existiert $\delta > 0$ mit $U(\xi,\delta) \subset f^{-1}(U(f(\xi),\varepsilon))$. Für $x \in M$ mit $d_M(x,\xi) < \delta$ gilt nun $x \in U(\xi,\delta) \subset f^{-1}(U(f(\xi),\varepsilon))$, also $f(x) \in U(f(\xi),\varepsilon)$ und damit $d_N(f(x), f(\xi)) < \varepsilon$. □

In Satz 2.2.1 wurde für Zahlenfolgen (a_n) und (b_n) mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$ gezeigt, dass $a_n + b_n \to a + b$ und $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$ gilt. Hieraus wurde in §3.1 die Stetigkeit von Summe und Produkt stetiger Funktionen gefolgert. Entsprechende Aussagen gelten auch hier wieder (wobei die Beweise analog sind).

Satz 6.4.4. *Sei (M,d) metrischer Raum, $(V,\|\cdot\|)$ normierter Raum (über $\mathbb{K}$), $\xi \in M$, $\lambda \in \mathbb{K}$ und $f,g\colon M \to V$ stetig in ξ. Dann sind $f+g$ und $\lambda \cdot f$ stetig in ξ. Ist speziell $V = \mathbb{K}$ und $\|\cdot\| = |\cdot|$, so ist auch $f \cdot g$ stetig in ξ. Im Falle $g(\xi) \ne 0$ ist auch die (in $M \backslash g^{-1}(0)$ definierte) Funktion f/g stetig in ξ.*

Wir untersuchen Abbildungen $f\colon \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}$ auf Stetigkeit, wobei wir auf $\mathbb{K}^p$ die Norm $\|\cdot\|_\infty$ zu Grunde legen. Für $j \in \{1,\dots,p\}$ heißt die durch $\pi_j(x_1,\dots,x_p) = x_j$

gegebene Abbildung $\pi_j\colon \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}$ die *Projektion* auf die j-te Koordinate. Offensichtlich ist π_j stetig. (Man wähle $\delta := \varepsilon$ in Satz 6.4.2.) Nach Satz 6.4.4 sind dann auch Funktionen f der Form

$$f(x_1, \dots, x_p) = \sum_{(k_1,\dots,k_p)\in I} a_{k_1,\dots,k_p} x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_p^{k_p}$$

stetig, wobei $I \subset \mathbb{N}_0^p$ endlich und $a_{k_1,\dots,k_p} \in \mathbb{K}$ für $(k_1, \dots, k_p) \in I$. Solche Funktionen heißen *Polynome* (in p Veränderlichen). Quotienten von Polynomen heißen *rationale Funktionen*. Sie sind dort definiert, wo der Nenner nicht verschwindet.

Wir untersuchen jetzt Abbildungen $f\colon \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^q$ auf Stetigkeit, wieder bzgl. der Norm $\|\cdot\|_\infty$ (sowohl im Definitions- wie im Zielbereich). Für $j \in \{1, \dots, q\}$ heißt $f_j := \pi_j \circ f$ die j-te *Koordinatenfunktion*. Es ist also $f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x))^T$ für $x \in \mathbb{K}^p$.

Satz 6.4.5. *Eine Funktion von $\mathbb{K}^p$ nach $\mathbb{K}^q$ ist genau dann stetig (in $\xi \in \mathbb{K}^p$), wenn alle ihre Koordinatenfunktionen stetig (in ξ) sind.*

Beweis. Sei $f = (f_1, \dots, f_q)^T\colon \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^q$. Aus der Stetigkeit von f folgt die der f_j mit Satz 6.4.1, da $f_j = \pi_j \circ f$ und π_j stetig.

Seien nun alle f_j stetig in ξ. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert zu $j \in \{1, \dots, q\}$ ein $\delta_j > 0$ mit $|f_j(x) - f_j(\xi)| < \varepsilon$ für $\|x - \xi\|_\infty < \delta_j$. Mit $\delta := \min_j \delta_j$ folgt hieraus, dass $\|f(x) - f(\xi)\|_\infty = \max_j |f_j(x) - f_j(\xi)| < \varepsilon$ für $\|x - \xi\|_\infty < \delta$. □

Man könnte nun vermuten, dass eine Funktion $f = (f_1, \dots, f_q)^T\colon \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^q$ stetig ist, wenn sie für jedes j bei festgehaltenem $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_p$ stetig in x_j ist. Dies ist aber nicht der Fall.

Beispiel. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Dann ist f unstetig in $(0, 0)$, da $f(x, x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, aber $f(0, 0) = 0$. Wird eine Variable festgehalten, ist f aber stetig in der anderen, d.h., für jedes $y \in \mathbb{R}$ ist die durch $x \mapsto f(x, y)$ gegebene Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ stetig und für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die durch $y \mapsto f(x, y)$ gegebene Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ stetig.

Es folgt aus Satz 6.4.5, dass lineare Abbildungen von $\mathbb{K}^p$ nach $\mathbb{K}^q$ stetig sind, da jede Koordinatenfunktion ein Polynom ist. Denn ist $f = (f_1, \dots, f_q)^T\colon \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^q$ linear, so existieren $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $1 \le i \le q$, $1 \le j \le p$, mit $f_i(x_1, \dots, x_p) = \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j$. Entscheidend ist dabei, dass $\mathbb{K}^p$ und $\mathbb{K}^q$ endlichdimensional sind. Lineare Abbildungen zwischen unendlichdimensionalen normierten Räumen brauchen nicht stetig zu sein.

Beispiel. Es ist $(C^1[-1, 1], \|\cdot\|_\infty)$ normierter Raum und die durch $f \mapsto f'(0)$ gegebene Abbildung $L\colon C^1[-1, 1] \to \mathbb{C}$ ist linear. Mit $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$ gilt $\|f_n\|_\infty \le \frac{1}{n}$, also $f_n \to 0$, aber $L(f_n) = f_n'(0) = \cos n0 = 1 \neq 0 = L(0)$. Damit ist L nicht stetig.

Definition 6.4.2. (vgl. Definition 3.6.2) Seien $(M, d_M), (N, d_N)$ metrische Räume und $f\colon M \to N$. Dann heißt f *gleichmäßig stetig*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon$ für alle $x, y \in M$ mit $d_M(x, y) < \delta$.

Satz 6.4.6. *Seien $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Räume und sei $f\colon V \to W$ linear. Dann sind äquivalent:*

(i) *f ist gleichmäßig stetig,*

(ii) *f ist stetig,*

(iii) *f ist stetig in* 0,

(iv) $\exists C > 0\ \forall x \in V\colon \|f(x)\|_W \leq C\|x\|_V$.

Beweis. Wir zeigen, dass (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i). Dabei ist (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) trivial.

Zu (iii) $\Rightarrow$ (iv): Sei f stetig in 0. Zu $\varepsilon := 1$ existiert dann $\delta > 0$ mit $\|f(x)\|_W \leq 1$ für $\|x\|_V \leq \delta$. Für $x \in V\backslash\{0\}$ folgt dann

$$\|f(x)\|_W = \frac{\|x\|_V}{\delta}\left\|f\left(\frac{\delta}{\|x\|_V}x\right)\right\|_W \leq \frac{\|x\|_V}{\delta}.$$

Mit $C := 1/\delta$ folgt also $\|f(x)\|_W \leq C\|x\|_V$, und das gilt auch für $x = 0$.

Zu (iv) $\Rightarrow$ (i): Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta := \varepsilon/C$. Für $x, y \in V$ mit $\|x-y\|_V < \delta$ gilt dann $\|f(x) - f(y)\|_W = \|f(x-y)\|_W \leq C\|x-y\|_V < \varepsilon$. □

Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Räume. Den Vektorraum der stetigen linearen Abbildungen von V nach W bezeichnen wir mit $L(V, W)$. Nach Satz 6.4.6, (iv), ist für $f \in L(V, W)$ dann

$$\|f\|_{L(V,W)} := \sup_{x \in V\backslash\{0\}} \frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V} = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V = 1}} \|f(x)\|_W < \infty.$$

Man nennt $\|f\|_{L(V,W)}$ *Operatornorm* von f. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass $(L(V, W), \|\cdot\|_{L(V,W)})$ normierter Raum ist. Darüberhinaus ist $(L(V, W), \|\cdot\|_{L(V,W)})$ Banachraum, falls $(W, \|\cdot\|_W)$ Banachraum ist.

Beispiel. Seien $(V, \|\cdot\|_V) = (\mathbb{R}^p, \|\cdot\|_\infty)$, $(W, \|\cdot\|_W) = (\mathbb{R}^q, \|\cdot\|_\infty)$ und $f = (f_1, \ldots, f_q)^T\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Dann existieren $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq q$, $1 \leq j \leq p$, mit $f_i(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{j=1}^p a_{ij}x_j$ für alle i. In Matrixschreibweise haben wir mit $A = (a_{ij})$ also $f(x) = Ax$, d.h.,

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \ldots & a_{qp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

Nun ist für $x = (x_1, \ldots, x_p)^T \in \mathbb{R}^p$

$$|f_i(x_1, \ldots, x_p)| \leq \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}| \cdot |x_j| \leq \|x\|_\infty \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|$$

für alle i und damit

$$\|f(x)\|_\infty \leq \|x\|_\infty \max_i \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|.$$

Wählt man, bei festem i, nun $x_j = \pm 1$, so dass x_j und a_{ij} das gleiche Vorzeichen haben, so hat man in obiger Abschätzung Gleichheit. Es folgt

$$\|f\|_{L(V,W)} = \max_i \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|.$$

Man nennt dies auch die *Zeilensummennorm* der Matrix $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq q \\ 1\leq j\leq p}}$.

Definition 6.4.3. (vgl. Definition 3.3.2) Seien (M, d_M) und (N, d_N) metrische Räume, ξ Häufungspunkt von M und $f\colon M \to N$. Wir sagen, dass $f(x)$ *für* $x \to \xi$ *konvergiert*, falls $\eta \in N$ existiert, so dass für jede Folge (x_n) in $M\backslash\{\xi\}$ mit $x_n \to \xi$ auch $f(x_n) \to \eta$ gilt. Dieses η heißt dann *Grenzwert* von f für $x \to \xi$ und wird mit $\lim_{x\to\xi} f(x)$ bezeichnet. Wir schreiben auch $f(x) \to \eta$ für $x \to \xi$.

Wie in Satz 3.3.1 ist f genau dann stetig in ξ ist, wenn $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ gilt. Auch Satz 3.3.3 gilt entsprechend: *Es gilt* $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ *genau dann, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in M\backslash\{\xi\}\colon d_M(x, \xi) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), \eta) < \varepsilon.$$

6.5 Kompaktheit

Definition 6.5.1. Sei (M, d) metrischer Raum.

(i) (M, d) heißt *kompakt*, falls jede Folge in M eine konvergente Teilfolge besitzt.

(ii) (M, d) heißt *totalbeschränkt* (oder *präkompakt*), falls für alle $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge E von M existiert, so dass $M \subset \bigcup_{x\in E} U(x, \varepsilon)$.

(iii) (M, d) heißt *beschränkt*, falls $\sup_{x,y\in M} d(x, y) < \infty$.

Kurz sagen wir auch, dass M (statt (M, d)) kompakt bzw. (total)beschränkt ist. Für $K \subset M$ sagen wir, dass K kompakt bzw. (total)beschränkt ist, wenn der metrische Raum $(K, d|_{K\times K})$ diese Eigenschaft hat.

Teil (i) obiger Definition entspricht damit Definition 3.6.1. Statt die Existenz einer konvergenten Teilfolge zu fordern, kann man natürlich auch die Existenz eines Häufungswertes fordern; vgl. Satz 2.3.2, (i).

Aus der Totalbeschränktheit folgt die Beschränkheit, denn aus

$$M \subset \bigcup_{x\in E} U(x, \varepsilon)$$

folgt $d(a, b) \leq \max_{x,y\in E} d(x, y) + 2\varepsilon$ für $a, b \in M$.

Definition 6.5.2. Sei (M,d) metrischer Raum, $K \subset M$ und X eine Menge offener Teilmengen von M mit $K \subset \bigcup_{U \in X} U$. Dann heißt X *offene Überdeckung* von K. Existiert eine endliche Teilmenge $E \subset X$ mit $K \subset \bigcup_{U \in E} U$, so sagt man, dass X eine *endliche Teilüberdeckung* besitzt.

Die Totalbeschränktheit besagt also, dass für jedes $\varepsilon > 0$ die offene Überdeckung $\{U(x,\varepsilon)\colon x \in M\}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Satz 6.5.1. *Sei (M,d) metrischer Raum und $K \subset M$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Jede offene Überdeckung von K besitzt eine endliche Teilüberdeckung;*

(ii) *K ist kompakt;*

(iii) *K ist vollständig und totalbeschränkt.*

Die Äquivalenz von (i) und (ii) heißt auch *Satz von Heine-Borel.*

In sogenannten *topologischen Räumen* – die eine Verallgemeinerung der metrischen Räume sind – gilt Satz 6.5.1 nicht. Dort wird die in (i) formulierte Eigenschaft als Kompaktheit bezeichnet und die in Definition 6.5.1, (i), angegebene als Folgenkompaktheit.

Beweis von Satz 6.5.1. Zu (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei (x_n) Folge in K, die keine konvergente Teilfolge (also auch keinen Häufungswert) besitzt. Dann ist $A := \{x_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ unendlich.

Sei nun $y \in K$. Da y kein Häufungswert von (x_n) ist, existiert $\varepsilon_y > 0$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_n, y) \geq \varepsilon_y$ für alle $n \geq N$ gilt. Folglich ist $A \cap U(y,\varepsilon_y)$ endlich.

Nun ist $\{U(y,\varepsilon_y)\colon y \in K\}$ offene Überdeckung von K. Nach (i) existiert nun eine endliche Teilüberdeckung, d.h., es existiert eine endliche Teilmenge E von K mit $K \subset \bigcup_{y \in E} U(y,\varepsilon_y)$. Es folgt $A = A \cap K \subset \bigcup_{y\in E} A \cap U(y,\varepsilon_y)$. Damit ist A endlich, ein Widerspruch.

Zu (ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei K kompakt. Wir zeigen zuerst, dass K vollständig ist. Sei dazu (x_n) Cauchyfolge in K. Dann hat (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}), etwa $x_{n_k} \to \xi \in K$. Wir zeigen, dass $x_n \to \xi$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Da (x_n) Cauchyfolge ist, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $m, n \geq N$. Da $x_{n_k} \to \xi$ existiert $K \in \mathbb{N}$ mit $d(x_{n_k}, \xi) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $k \geq K$. Sei nun $k \geq K$ mit $n_k \geq N$. Für $n \geq N$ folgt dann $d(x_n,\xi) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \xi) < \varepsilon$. Es gilt also $x_n \to \xi$.

Wir zeigen jetzt, dass K totalbeschränkt ist. Dazu nehmen wir an, dass dies nicht der Fall ist. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $K \not\subset \bigcup_{x\in E} U(x,\varepsilon)$ für jede endliche Teilmenge E von K. Es sei nun $x_1 \in K$ beliebig. Dann gilt $K \not\subset U(x_1,\varepsilon)$ und damit existiert $x_2 \in K \backslash U(x_1,\varepsilon)$. Wegen $K \not\subset U(x_1,\varepsilon) \cup U(x_2,\varepsilon)$ existiert jetzt $x_3 \in K\backslash(U(x_1,\varepsilon) \cup U(x_2,\varepsilon))$. Induktiv findet man so eine Folge (x_n) in K mit $x_{n+1} \in K \backslash \bigcup_{j=1}^n U(x_j,\varepsilon)$. Es folgt $d(x_m,x_n) \geq \varepsilon$ für $m \neq n$. Dies impliziert, dass keine Teilfolge von (x_n) eine Cauchyfolge ist. Damit konvergiert aber auch keine Teilfolge von (x_n), ein Widerspruch.

Zu (iii) $\Rightarrow$ (i): Sei X offene Überdeckung von K. Wir nehmen an, dass keine endliche Teilüberdeckung existiert.

Wegen der Totalbeschränktheit existiert eine endliche Teilmenge E_1 von K mit $K \subset \bigcup_{x \in E_1} U(x, \frac{1}{2})$. Nun ist X auch offene Überdeckung von $K \cap U(x, \frac{1}{2})$ für alle $x \in K$. Es folgt, dass $x_1 \in E_1$ existiert, so dass keine endliche Teilüberdeckung von $K \cap U(x_1, \frac{1}{2})$ existiert.

Wegen der Totalbeschränktheit existiert weiter eine endliche Teilmenge E_2 von K mit $K \cap U(x_1, \frac{1}{2}) \subset \bigcup_{x \in E_2} U(x, \frac{1}{4})$. Dabei kann man $U(x_1, \frac{1}{2}) \cap U(x, \frac{1}{4}) \neq \emptyset$, also $d(x_1, x) < \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, für alle $x \in E_2$ annehmen. Es existiert nun $x_2 \in E_2$, so dass keine endliche Teilüberdeckung von $K \cap U(x_2, \frac{1}{4})$ existiert.

Induktiv findet man so eine Folge (x_n), so dass keine endliche Teilüberdeckung von $K \cap U(x_n, \frac{1}{2^n})$ existiert und außerdem

$$d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2^{n+1}}$$

gilt. Für $m > n$ folgt

$$d(x_n, x_m) < \sum_{k=n+1}^{m} \frac{3}{2^k} = \frac{3}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{3}{2^n}.$$

Damit ist (x_n) Cauchyfolge und wegen der Vollständigkeit von K also konvergent, etwa $x_n \to \xi \in K$. Da X offene Überdeckung von K ist, existiert $U \in X$ mit $\xi \in U$.

Da U offen ist, existiert $\varepsilon > 0$ mit $U(\xi, \varepsilon) \subset U$. Für genügend großes $n \in \mathbb{N}$ gilt nun $d(x_n, \xi) < \frac{1}{2}\varepsilon$ und $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2}\varepsilon$. Es folgt

$$K \cap U\left(x_n, \frac{1}{2^n}\right) \subset U\left(x_n, \frac{1}{2^n}\right) \subset U\left(\xi, d(x_n, \xi) + \frac{1}{2^n}\right) \subset U(\xi, \varepsilon) \subset U.$$

Damit existiert eine endliche Teilüberdeckung $K \cap U\big(x_n, \frac{1}{2^n}\big)$, nämlich die, die durch das eine Element U von X gegeben ist. Das ist ein Widerspruch. □

Satz 6.5.2.

(i) *Kompakte Mengen sind beschränkt und abgeschlossen.*

(ii) *Abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen sind kompakt.*

Beweis. Sei K kompakt (im metrischen Raum (M, d)).

Zu (i): Zunächst ist K wegen Satz 6.5.1 totalbeschränkt und damit auch beschränkt.

Die Beschränktheit von K kann aber auch leicht direkt (ohne Benutzung von Satz 6.5.1) gezeigt werden. Denn ist K nicht beschränkt, so existieren Folgen (x_n) und (y_n) in K mit $d(x_n, y_n) \to \infty$. Wegen der Kompaktheit finden wir dann eine konvergente Teilfolge von (x_n), etwa $x_{n_k} \to \xi$. Weiter hat (y_{n_k}) eine konvergente Teilfolge, etwa $y_{n_{k_j}} \to \eta$. Für genügend große j gilt dann

$$d\left(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}\right) \leq d\left(x_{n_{k_j}}, \xi\right) + d(\xi, \eta) + d\left(\eta, y_{n_{k_j}}\right) \leq d(\xi, \eta) + 1,$$

was ein Widerspruch ist.

Um die Abgeschlossenheit zu zeigen, benutzen wir Satz 6.3.3. Sei dazu (x_n) Folge in K mit $x_n \to \xi \in M$. Zu zeigen ist, dass $\xi \in K$. Dies folgt aber, da (x_n) Cauchyfolge und K nach Satz 6.5.1 vollständig ist.

Zu (ii): Sei $A \subset K$ abgeschlossen. Wir geben zwei Beweise, dass A kompakt ist.

Beweisvariante 1. Sei (x_n) Folge in A. Dann besitzt (x_n) eine Teilfolge, die in K konvergiert, etwa $x_{n_k} \to \xi \in K$. Da A abgeschlossen, folgt mit Satz 6.3.3, dass $\xi \in A$. Also ist A kompakt.

Beweisvariante 2. Sei X offene Überdeckung von A. Da $M \backslash A$ offen ist, ist dann durch $K \subset \bigcup_{U \in X} U \cup M \backslash A$ eine offene Überdeckung von K gegeben. Damit existiert eine endliche Teilmenge $E \subset X$ mit $K \subset \bigcup_{U \in E} U \cup M \backslash A$, also $A \subset \bigcup_{U \in E} U$. □

Wir werden gleich an einem Beispiel sehen, dass die Umkehrung von Satz 6.5.2, (i), nicht gilt. Es gilt aber der folgende Satz.

Satz 6.5.3. *Sei $p \in \mathbb{N}$ und $K \subset \mathbb{R}^p$. Bezüglich der durch die Norm $\|\cdot\|_\infty$ erzeugten Metrik ist K genau dann kompakt, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.*

Auch dieser Satz wird nach Heine und Borel benannt. Er gilt auch für andere Normen in $\mathbb{R}^p$; siehe Satz 6.5.6 später.

Beweis von Satz 6.5.3. Eine Richtung folgt sofort aus Satz 6.5.2, (i).

Zum Beweis der anderen Richtung sei K beschränkt und abgeschlossen, etwa $\|x\|_\infty \leq C$ für alle $x \in K$. Sei $(x^n) = ((x_1^n, \ldots, x_p^n)^T)$ eine Folge in K. Dann ist $|x_1^n| \leq \|x^n\|_\infty \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Folge (x_1^n) beschränkt und hat nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß also eine konvergente Teilfolge, etwa $x_1^{n_k} \to \xi_1$. Das folgende Argument ist analog zum Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß für komplexe Zahlenfolgen, das in Analysis I gegeben wurde. Es hat nämlich, mit dem gleichen Argument, auch $(x_2^{n_k})$ eine konvergente Teilfolge, etwa $x_2^{n_{k_j}} \to \xi_2$. Analog hat dann $x_3^{n_{k_j}}$ eine konvergente Teilfolge, usw. Wir finden so eine Teilfolge von (x^n), die gegen ein $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_p)^T \in \mathbb{R}^p$ konvergiert. Da K abgeschlossen ist, folgt $\xi \in K$ mit Satz 6.3.3.

Alternativ kann man auch Satz 6.5.1 benutzen. Es reicht dann zu zeigen, dass K vollständig und totalbeschränkt ist. Die Vollständigkeit folgt dabei wegen Satz 6.3.4 (und der Vollständigkeit von $\mathbb{R}^p$) unmittelbar aus der Abgeschlossenheit.

Wegen der Beschränktheit von K existiert $r > 0$ mit $\|x\|_\infty \leq r$ für alle $x \in K$. Ist dann $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $N\varepsilon \geq r$, so folgt

$$K \subset \bigcup_{j_1, \ldots, j_n = -N}^{N} U((j_1\varepsilon, \ldots, j_n\varepsilon), \varepsilon)$$

und damit die Totalbeschränktheit von K. □

Beispiel. Wir betrachten den Prähilbertraum $(C[-\pi, \pi], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und bezeichnen die zugehörige Norm mit $\| \cdot \|_2$. Wir betrachten wie in §5.5 für $n \in \mathbb{Z}$ die Funktion $e_n \in C[-\pi, \pi]$, $e_n(x) = e^{inx}$. Dann gilt, vgl. §5.5,

$$\langle e_n, e_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e_n \overline{e_m} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = 0$$

für $n \neq m$ und $\|e_n\|_2 = \sqrt{\langle e_n, e_n\rangle} = \sqrt{2\pi}$. Nach dem Satz von Pythagoras ist damit $\|e_n - e_m\|_2^2 = \|e_n\|_2^2 + \|e_m\|_2^2 = 4\pi$, also $\|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{4\pi}$.

Wir betrachten jetzt $K := \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist K offensichtlich beschränkt. Außerdem ist K abgeschlossen, denn ist (x_k) eine Folge in K, die in $(C[0, 2\pi], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ konvergiert, so existieren $M, N \in \mathbb{N}$ mit $x_k = e_N$ für $k \geq M$.

Andererseits ist K nicht kompakt, da $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge besitzt. Es folgt, dass die Umkehrung von Satz 6.5.2, (i), im Allgemeinen gilt.

Satz 6.5.4. *Seien (M, d_M) und (N, d_N) metrische Räume, $K \subset M$ kompakt und $f : K \to N$ stetig. Dann ist $f(K)$ kompakt.*

Für $M = N = \mathbb{C}$ (mit euklidischer Metrik) ist dies Satz 3.6.3. Der dortige Beweis kann wörtlich übernommen werden.

Ebenso überträgt sich Satz 3.6.4:

Satz 6.5.5. *Sei (M, d) metrischer Raum, $K \subset M$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf K sein Minimum und Maximum an.*

Satz 6.5.6. *Alle Normen auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^p$ (mit $p \in \mathbb{N}$) sind äquivalent.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass jede Norm äquivalent zu $\|\cdot\|_\infty$ ist. Sei also $\|\cdot\|$ Norm auf $\mathbb{R}^p$.

Sei $\{e_1, \ldots, e_p\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^p$. Mit $\beta := \sum_{j=1}^p \|e_j\|$ ist dann

$$\|x\| = \left\|\sum_{j=1}^p x_j e_j\right\| \leq \sum_{j=1}^p |x_j|\|e_j\| \leq \beta\|x\|_\infty$$

für $x = (x_1, \ldots, x_p)^T \in \mathbb{R}^p$. Insbesondere folgt, dass die durch $x \mapsto \|x\|$ gegebene Abbildung von $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|_\infty)$ nach $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ stetig ist; vgl. auch Satz 6.4.6. Da

$$K := \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\|_\infty = 1\}$$

beschränkt und abgeschlossen und damit kompakt in $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|_\infty)$ ist, existiert deshalb nach Satz 6.5.5 ein $\xi \in K$ mit

$$\alpha := \|\xi\| = \min_{x\in K} \|x\|.$$

Für $x \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\}$ folgt

$$\|x\| = \left\|\frac{x}{\|x\|_\infty}\right\| \cdot \|x\|_\infty \geq \alpha\|x\|_\infty.$$

Damit erhalten wir

$$\alpha\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \beta\|x\|_\infty$$

für alle $x \in \mathbb{R}^p$. □

Analog zu Satz 3.6.5 ist das folgende Resultat (und sein Beweis).

Satz 6.5.7. *Seien (M, d_M) und (N, d_N) metrische Räume und $f : M \to N$ stetig. Weiter sei M kompakt. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

7 Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen

7.1 Partielle Ableitungen

Definition 7.1.1. Sei $p \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^p$ offen, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_p)^T \in U$ und $f\colon U \to \mathbb{R}$. Für $j \in \{1, \ldots, p\}$ heißt f *partiell differenzierbar* in ξ nach der j-ten Variablen (oder nach x_j), falls

$$\begin{aligned} &\partial_j f(\xi) \\ := \; &\lim_{x_j \to \xi_j} \frac{f(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, x_j, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_p) - f(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_j, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_p)}{x_j - \xi_j} \\ = \; &\lim_{h \to 0} \frac{f(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_j + h, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_p) - f(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_j, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_p)}{h} \end{aligned}$$

existiert. Der Grenzwert heißt dann *partielle Ableitung* (von f nach der j-ten Variablen an der Stelle ξ) und wird auch mit $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi)$ oder $f_{x_j}(\xi)$ bezeichnet.

Für die Definition von $\partial_j f(\xi_j)$ würde es genügen, dass ξ_j Häufungspunkt der Menge $\{(x_1, \ldots, x_p)^T \in U \colon x_k = \xi_k \text{ für } k \neq j\}$ ist. Dies ist erfüllt, wenn U offen ist, und der Einfachheit halber setzen wir immer Letzteres voraus. Dann erhält diese Menge ein Intervall I, welches ξ_j als inneren Punkt enthält,

Definiert man $g\colon I \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = f(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, x, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_p)$, so existiert also $\partial_j f(\xi)$ genau dann, wenn $g'(\xi_j)$ existiert, und es gilt dann $\partial_j f(\xi) = g'(\xi_j)$. Man berechnet also $\partial_j f$ durch Differenzieren nach x_j bei festgehaltenem $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_p$.

Ist $p = 2$ bzw. $p = 3$, so bezeichnet man die Variablen statt mit x_1, x_2 (und x_3) in der Regel mit x, y bzw. x, y, z. Dementsprechend schreibt man auch zum Beispiel $\frac{\partial f}{\partial y}$ und f_y statt $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ und f_{x_2}. Analog verfährt man bei anderen Bezeichnungen für die Variablen.

Statt $\partial_j f(\xi)$ findet man in der Literatur auch die Bezeichnung $D_j f(\xi)$. Üblich (aber gelegentlich problematisch) sind auch Schreibweisen wie $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ oder $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ für $\partial_1 f(x, y)$.

Beispiele. 1. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xe^y + \sin(xy)$. Dann ist

$$\partial_1 f(x, y) = e^y + y \cos(xy) \quad \text{und} \quad \partial_2 f(x, y) = xe^y + x \cos(xy).$$

2. Sei $f\colon \mathbb{R}^p \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/\|x\|_2^2$, also

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \frac{1}{x_1^2 + \cdots + x_p^2}.$$

Dann gilt

$$\partial_j f(x_1, \ldots, x_p) = -\frac{2x_j}{(x_1^2 + \cdots + x_p^2)^2}.$$

Ist $U \subset \mathbb{R}^p$ offen, $k \in \{1, \ldots, p\}$, $f \colon U \to \mathbb{R}$ und existiert $\partial_k f(x)$ für alle $x \in U$, so ist durch $x \mapsto \partial_k f(x)$ eine Funktion $\partial_k f \colon U \to \mathbb{R}$ gegeben. Man kann auch diese wieder auf partielle Differenzierbarkeit untersuchen. Für $\partial_j \partial_k f$ schreiben wir dabei kurz ∂_{jk} (oder $\partial_{j,k}$), bzw. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ oder $f_{x_k x_j}$.

Entsprechend definiert man höhere partielle Ableitungen, etwa

$$\partial_1 \partial_3^2 \partial_2 f = \frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial x_3^2 \partial x_2} = f_{x_2 x_3 x_3 x_1}.$$

Die Anzahl der auftretenden Ableitunge wird also *Ordnung* der Ableitung bezeichnet, im angegebenen Beispiel handelt es sich also um eine partielle Ableitung 4. Ordnung.

Beispiele. 1. Sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xe^y + \sin(xy)$ wie oben, mit

$$\partial_1 f(x,y) = e^y + y\cos(xy) \quad \text{und} \quad \partial_2 f(x,y) = xe^y + x\cos(xy).$$

Es ist

$$\begin{aligned} \partial_{11} f(x,y) &= -y^2 \sin(xy), \\ \partial_{21} f(x,y) &= e^y + \cos(xy) - xy\sin(xy), \\ \partial_{12} f(x,y) &= e^y + \cos(xy) - xy\sin(xy) = \partial_{21} f(x,y), \\ \partial_{22} f(x,y) &= xe^y - x^2 \sin(xy). \end{aligned}$$

2. Sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

Dann gilt

$$\partial_1 f(0,y) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,y)}{x} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{falls } y = 0, \\ \lim\limits_{x \to 0} y\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{falls } y \neq 0 \end{array} \right\} = -y$$

und analog $\partial_2 f(x,0) = x$. Es folgt $\partial_{12} f(0,0) = 1 \neq -1 = \partial_{21} f(0,0)$.

Satz 7.1.1. (Schwarz) *Sei $p \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^p$ offen, $\xi \in U$, $f \colon U \to \mathbb{R}$ und $j,k \in \{1, \ldots, p\}$. Es sei weiter vorausgesetzt, dass die zweiten partiellen Ableitungen ∂_{jk} und ∂_{kj} in U existieren und in ξ stetig sind. Dann gilt $\partial_{jk} f(\xi) = \partial_{kj} f(\xi)$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $p = 2$, $j = 1$, $k = 2$. Zu zeigen ist also $\partial_{12} f(\xi) = \partial_{21} f(\xi)$.

Sei $\varepsilon > 0$ mit $U(\xi, \varepsilon) \subset U$ (wobei $U(\xi, \varepsilon) \subset U$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ gebildet sei). Es sei $\xi = (a,b)$ und

$$F \colon U(\xi, \varepsilon) \to \mathbb{R}, \; F(x,y) = f(x,y) - f(x,b) - f(a,y) + f(a,b).$$

Für festes $y \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, $y \neq b$, betrachten wir

$$\phi\colon (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \to \mathbb{R},\ \phi(x) = f(x,y) - f(x,b).$$

Es ist dann $F(x,y) = \phi(x) - \phi(a)$. Dann ist ϕ differenzierbar und nach Mittelwertsatz existiert für $x \neq a$ dann α_1 zwischen a und x mit

$$F(x,y) = \phi(x) - \phi(a) = (x-a)\phi'(\alpha_1) = (x-a)\left(\partial_1 f(\alpha_1, y) - \partial_1 f(\alpha_1, b)\right).$$

Erneute Anwendung des Mittelwertsatzes liefert β_1 zwischen b und y mit

$$F(x,y) = (x-a)(y-b)\partial_{21} f(\alpha_1, \beta_1).$$

Jetzt betrachten wir für festes $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $x \neq a$, die Funktion

$$\psi\colon (b-\varepsilon, b+\varepsilon) \to \mathbb{R},\ \psi(x) = f(x,y) - f(a,y).$$

Man findet für $y \neq b$ dann β_2 zwischen b und y mit

$$F(x,y) = \psi(y) - \psi(b) = (y-b)\psi'(\beta_2) = (y-b)\left(\partial_2 f(x, \beta_2) - \partial_2 f(a, \beta_2)\right)$$

und anschließend α_2 zwischen a und x mit

$$F(x,y) = (x-a)(y-b)\partial_{12} f(\alpha_2, \beta_2).$$

Es folgt

$$\partial_{21} f(\alpha_1, \beta_1) = \partial_{12} f(\alpha_2, \beta_2).$$

Da für $(x,y) \to (a,b)$ auch $(\alpha_1, \beta_1) \to (a,b)$ und $(\alpha_2, \beta_2) \to (a,b)$ gilt, folgt die Behauptung jetzt aus der Stetigkeit von $\partial_{12} f$ und $\partial_{21} f$ in $\xi = (a,b)$. □

Satz 7.1.2. *Sei $p \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^p$ offen, $\xi \in U$ und $f\colon U \to \mathbb{R}$. Die partiellen Ableitungen von f mögen existieren und sie seien in $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p)^T$ stetig. Dann gilt*

$$\frac{f(x) - f(\xi) - \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(\xi)(x_j - \xi_j)}{\|x - \xi\|} \to 0$$

für $x = (x_1, \dots, x_p)^T \to \xi$. Des Weiteren ist f stetig in ξ.

Bemerkungen. 1. Wegen der Äquivalenz der Normen in $\mathbb{R}^p$ (Satz 6.5.6) ist es irrelevant, welche Norm in Satz 7.1.2 betrachtet wird.

2. Aus der Existenz der partiellen Ableitungen allein folgt noch nicht die Stetigkeit, man vgl. etwa das Beispiel nach Satz 6.4.5 oder betrachte eine beliebige Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die $f(0,t) = f(t,0) = 0$ für $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Dann gilt $\partial_1 f(0,0) = \partial f_2(0,0) = 0$, aber f braucht nicht stetig sein.

3. Mit den Landau-Symbolen lässt sich die Aussage von Satz 7.1.2 auch in der Form

$$f(x) - f(\xi) = \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(\xi)(x_j - \xi_j) + o(\|x - \xi\|)$$

für $x \to \xi$ schreiben. Sie lässt sich wie folgt interpretieren: Die durch

$$h = (h_1, \ldots, h_n)^T \mapsto \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(\xi) h_j$$

definierte lineare Funktion $T\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ ist (in der Nähe von 0) eine gute Approximation der durch $h \mapsto f(\xi + h) - f(\xi)$ definierten Funktion, denn

$$f(\xi + h) - f(\xi) = T(h) + o(\|h\|)$$

für $h \to 0$. Wir können dies auch als

$$f(x) - f(\xi) = T(x - \xi) + o(\|x - \xi\|)$$

für $x \to \xi$ schreiben. Leicht sieht man, dass T die einzige lineare Funktion mit dieser Eigenschaft ist. Wir werden diese lineare Abbildung T später Ableitung von f nennen.

Der Graph der linearen Funktion $T\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ ist ein p-dimensionaler Teilraum des $\mathbb{R}^{p+1}$, eine sogenannte Hyperebene (durch 0), im Falle $p = 2$ also eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ (durch 0). Für $f(x, y) = \sin(x - y) + x^2 + y^2$ und $\xi = (0, 0)$ ist der Graph von f und T in Abbildung 40 dargestellt.

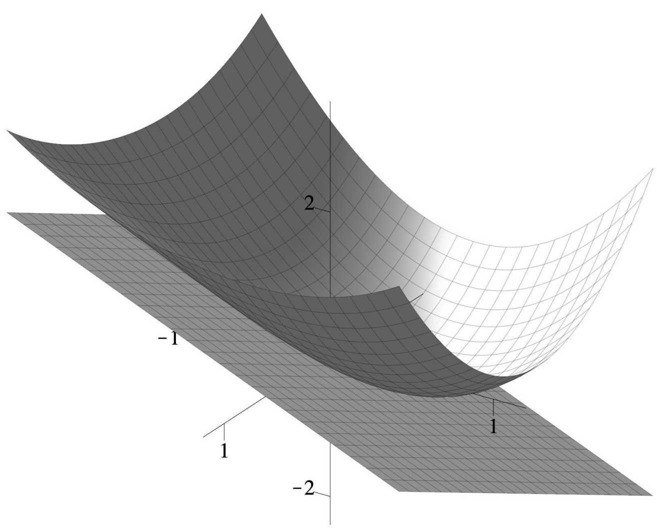

Abbildung 40: Approximation des Graphen durch eine Ebene.

Beweis von Satz 7.1.2. Sei $\varepsilon > 0$ mit $U(\xi, \varepsilon) \subset U$ (wobei $U(\xi, \varepsilon) \subset U$ wieder mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ gebildet sei). Für $0 < \|x-\xi\|_\infty < \varepsilon$ gilt dann

$$\begin{aligned}
f(x) - f(\xi) &= f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}, x_p) - f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{p-1}, \xi_p) \\
&= f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}, x_p) - f(\xi_1, x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}, x_p) \\
&\quad + f(\xi_1, x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}, x_p) - f(\xi_1, \xi_2, x_3, \ldots, x_{p-1}, x_p) \\
&\quad + f(\xi_1, \xi_2, x_3, \ldots, x_{p-1}, x_p) - f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, x_{p-1}, x_p) \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{p-1}, x_p) - f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{p-1}, \xi_p) \\
&= \sum_{j=1}^{p} f(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_p) - f(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_j, x_{j+1} \ldots, x_p) \\
&= \sum_{j=1}^{p} (x_j - \xi_j) \partial_j f(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \ldots, x_p) \\
&= \sum_{j=1}^{p} (x_j - \xi_j) \partial_j f(\eta^j)
\end{aligned}$$

wobei y_j zwischen ξ_j und x_j liegt und $\eta^j := (\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \ldots, x_p)^T$, also $\eta^j \in U(\xi, \|x-\xi\|_\infty)$ gilt. Mit T wie in obiger Bemerkung folgt also

$$f(x) - f(\xi) - T(x-\xi) = \sum_{j=1}^{p} (x_j - \xi_j) \left(\partial_j f(\eta^j) - \partial_j f(\xi) \right)$$

und damit

$$\frac{|f(x) - f(\xi) - T(x-\xi)|}{\|x-\xi\|_\infty} \leq \sum_{j=1}^{p} \left| \partial_j f(\eta^j) - \partial_j f(\xi) \right| .$$

Die erste Behauptung folgt jetzt aus der Stetigkeit der $\partial_j f$. Die Stetigkeit von f folgt, da $T(x-\xi) \to 0$ für $x \to \xi$. □

Die partiellen Ableitungen beschreiben das Änderungsverhalten einer Funktion in Richtung der Koordinatenachsen. Analoges lässt sich auch für andere Richtungen machen.

Definition 7.1.2. Sei $p \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^p$ offen, $\xi \in U$, $f\colon U \to \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^p$ mit $\|v\|_2 = 1$. Dann heißt

$$\partial_v f(\xi) := \frac{\partial f}{\partial v}(\xi) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\xi + tv) - f(\xi)}{t}$$

die *Richtungsableitung* von f an der Stelle ξ in Richtung v, falls der Grenzwert existiert.

Mit der Standardbasis $\{e_1, \ldots, e_p\}$ des $\mathbb{R}^p$ gilt also $\partial_{e_j} = \partial_j$ für alle j.

Satz 7.1.3. *Sei $p \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^p$ offen, $\xi \in U$, $f\colon U \to \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^p$ mit $\|v\|_2 = 1$. Die partiellen Ableitungen von f mögen existieren und sie seien in ξ stetig. Dann existiert $\partial_v f(\xi)$ und es gilt*

$$\partial_v f(\xi) = \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(\xi) v_j.$$

Beweis. Nach Satz 7.1.2 gilt

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\xi + tv) - f(\xi) - \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(\xi) v_j t}{t} = 0,$$

und daraus folgt die Behauptung. □

Definition 7.1.3. Sei $p \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^p$ offen, $\xi \in U$ und $f\colon U \to \mathbb{R}$. Dann heißt $\operatorname{grad} f(\xi) := (\partial_1 f(\xi), \ldots, \partial_p f(\xi))$ der *Gradient* von f an der Stelle ξ, falls die partiellen Ableitungen existieren.

Unter den Voraussetzungen von Satz 7.1.3 gilt dann $\partial_v f(\xi) = \operatorname{grad} f(\xi) \cdot v$. (Hierbei steht "$\cdot$" für das Matrixprodukt der $(1 \times p)$-Matrix $\operatorname{grad} f(\xi)$ mit der $(p \times 1)$-Matix $(v_1, \ldots, v_p)^T$. Wir können dies auch als Skalarprodukt auffassen: $\partial_v f(\xi) = \langle \operatorname{grad} f(\xi), v \rangle$.)

In Satz 7.1.2 erhalten wir

$$\frac{f(x) - f(\xi) - \operatorname{grad} f(\xi)(x - \xi)}{\|x - \xi\|} \to 0$$

für $x \to \xi$.

Definition 7.1.4. Seien $p, q \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^p$ offen, $\xi \in U$ und $f = (f_1, \ldots, f_q)^T\colon U \to \mathbb{R}^q$. Dann heißt die $(q \times p)$-Matrix

$$J_f(\xi) := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(\xi) & \ldots & \partial_p f_1(\xi) \\ \partial_1 f_2(\xi) & \ldots & \partial_p f_2(\xi) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_q(\xi) & \ldots & \partial_p f_q(\xi) \end{pmatrix}$$

die *Funktionalmatrix* (oder *Jacobimatrix*) von f an der Stelle ξ, falls die partiellen Ableitungen existieren.

Die k-te Zeile von $J_f(\xi)$ ist also durch $\operatorname{grad} f_k(\xi)$ gegeben.

Satz 7.1.4. *Seien $p, q \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^p$ offen, $\xi \in U$ und $f = (f_1, \ldots, f_q)^T\colon U \to \mathbb{R}^q$. Die partiellen Ableitungen der f_k mögen existieren und sie seien in ξ stetig. Dann gilt*

$$\frac{f(x) - f(\xi) - J_f(\xi)(x - \xi)}{\|x - \xi\|} \to 0$$

für $x \to \xi$.

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 7.1.2 (bzw. der auf Definition 7.1.3 folgenden Bemerkung). Denn die k-te Koordinate des Zählers ist durch $f_k(x) - f_k(\xi) - \operatorname{grad} f_k(\xi)(x - \xi)$ gegeben. □

Für $U \subset \mathbb{R}^p$ offen und $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet man die Menge aller Funktionen von U nach $\mathbb{R}^q$, für die alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung n existieren und stetig sind, mit $C^n(U, \mathbb{R}^q)$ oder, falls der Zielraum aus dem Zusammenhang klar ist, auch mit $C^n(U)$. Für solche Funktionen sind nach dem Satz von Schwarz die partiellen Ableitungen bis zur Ordnung n unabhängig von der Reihenfolge der Differentiation. Weiter setzt man $C^\infty(U, \mathbb{R}^q) := \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n(U, \mathbb{R}^q)$.

7.2 Differenzierbarkeit

Reelle $(q \times p)$-Matrizen korrespondieren zu linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^p$ nach $\mathbb{R}^q$. Insbesondere entspricht die Funktionalmatrix $J_f(\xi)$ in Satz 7.1.4 einer linearen Abbildung. Diese lineare Abbildung werden wir als *Ableitung* von f bezeichnen. Obwohl wir uns sehr bald auf Funktionen von (offenen Teilmengen des) $\mathbb{R}^p$ nach $\mathbb{R}^q$ einschränken werden, formulieren wir die Definition allgemeiner für Funktionen zwischen Banachräumen. Für Banachräume V und W hatten wir mit $L(V, W)$ den Vektorraum der stetigen linearen Abbildungen von V nach W bezeichnet; vgl. §6.4.

Definition 7.2.1. Seien $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ Banachräume, $U \subset V$ offen, $\xi \in U$ und $f\colon U \to W$. Dann heißt f *(total) differenzierbar* in ξ, falls $T \in L(V, W)$ existiert, so dass

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi) - T(x - \xi)}{\|x - \xi\|_V} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi) - T(h)}{\|h\|_V} = 0.$$

Die Abbildung T ist dann eindeutig bestimmt (siehe die zweite Bemerkung unten) und heißt (*totale*) *Ableitung* (oder *Fréchet-Ableitung*) von f an der Stelle ξ. Sie wird mit $Df(\xi)$ bezeichnet.

Die Funktion f heißt (*total*) *differenzierbar*, falls f in jedem Punkt von U differenzierbar ist. Falls die durch $x \mapsto Df(x)$ gegebene Funktion $Df\colon U \to L(V, W)$ dann stetig ist, heißt f *stetig differenzierbar*.

Bemerkungen. 1. In §6.4 wurde gezeigt, dass in dem uns interessierenden Fall $V = \mathbb{R}^p$ und $W = \mathbb{R}^q$ lineare Abbildungen von V nach W automatisch stetig sind. In diesem Fall reicht es also, T in obiger Situation als linear zu fordern.

2. Wir zeigen, dass T in obiger Definition eindeutig bestimmt ist. Dazu nehmen wir an, dass $T_1, T_2 \in L(V, W)$ mit $T_1 \neq T_2$ existieren, die die in der Definition angegebene Eigenschaft haben. Dann gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{T_1(h) - T_2(h)}{\|h\|_V} = \lim_{h \to 0} \frac{(T_1 - T_2)(h)}{\|h\|_V} = 0.$$

Andererseits existiert $y \in V$ mit $T_1(y) \neq T_2(y)$. Es folgt

$$\frac{(T_1 - T_2)(ty)}{\|ty\|_V} = \frac{t(T_1 - T_2)(y)}{t\|y\|_V} = \frac{(T_1 - T_2)(y)}{\|y\|_V}$$

für $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und damit

$$\lim_{t\to 0} \frac{(T_1 - T_2)(ty)}{\|ty\|_V} = \frac{(T_1 - T_2)(y)}{\|y\|_V} \neq 0,$$

ein Widerspruch.

3. Die Interpretation der in obiger Definition gegebenen Eigenschaft ist analog zu der von Satz 7.1.2; vgl. Bemerkung 3 dort. Die lineare Abbildung $Df(\xi)$ ist (in der Nähe von 0) eine gute Approximation der durch $h \mapsto f(\xi+h) - f(\xi)$ gegebenen Funktion. Denn ist $R(h) := f(\xi + h) - f(\xi) - Df(\xi)(h)$, so gilt $R(h) = o(\|h\|_V)$ für $h \to 0$. Es ist $Df(\xi)$ die einzige lineare Abbildung mit dieser Eigenschaft; vgl. die vorige Bemerkung.

4. Im allgemeinen hängt Df von den Normen $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_W$ ab. Dies gilt aber nicht, falls $V = \mathbb{R}^p$, $W = \mathbb{R}^q$, da dort alle Normen äquivalent sind (Satz 6.5.6).

Beispiel. Sei $f \in L(V,W)$. Dann ist f differenzierbar und es gilt $Df(\xi) = f$ für alle $\xi \in V$.

Satz 7.2.1. *Differenzierbare Funktionen sind stetig.*

Beweis. Seien U, V, W, f wie in Definition 7.2.1 und sei f differenzierbar in $\xi \in U$. Für $x \in U$ sei $R(x) := f(x) - f(\xi) - Df(\xi)(x - \xi)$. Nach Definition der Differenzierbarkeit gilt dann $R(x)/\|x - \xi\|_V \to 0$ für $x \to \xi$. Es folgt $R(x) \to 0$ für $x \to \xi$. Da $Df(\xi)$ stetig ist, folgt auch $Df(\xi)(x - \xi) \to 0$ für $x \to \xi$. Insgesamt folgt $f(x) \to f(\xi)$ für $x \to \xi$. Damit ist f stetig in ξ. □

Man beachte, dass im Beweis die Stetigkeit von $Df(\xi)$ benutzt wird. Dies ist ein Grund dafür, in Definition 7.2.1 T als linear *und stetig* zu fordern.

Satz 7.2.2. *Seien $p, q \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^p$ offen, $\xi \in U$ und $f = (f_1, \ldots, f_q)^T : U \to \mathbb{R}^q$. Dann sind äquivalent:*

(i) *f ist differenzierbar in ξ.*

(ii) *Alle partiellen Ableitungen $\partial_k f_j(\xi)$ existieren und es gilt*

$$\frac{f(x) - f(\xi) - J_f(\xi)(x - \xi)}{\|x - \xi\|} \to 0$$

für $x \to \xi$.

Es gilt dann $Df(\xi)(h) = J_f(\xi)(h)$ für alle $h \in \mathbb{R}^p$, d.h., die Matrix $J_f(\xi)$ entspricht der linearen Abbildung $Df(\xi)$ bzgl. der Standardbasis.

Beweis. Zu (ii) ⇒ (i): Diese Richtung ist trivial, denn offensichtlich hat die durch $T(h) = J_f(\xi)h$ definierte Funktion $T \in L(V,W)$ die in Definition 7.2.1 verlangte Eigenschaft.

Zu (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le q\\ 1\le j\le p}}$ die zu $Df(\xi)$ gehörige Matrix (bzgl. der Standardbasen $\{e_1, e_2, \dots\}$). Dann folgt

$$\frac{f(\xi+h) - f(\xi) - Ah}{\|h\|} \to 0$$

für $h \to 0$ und damit

$$\frac{f_j(\xi + te_k) - f_j(\xi) - a_{jk}t}{t} \to 0$$

für $t \to 0$. Hieraus folgt, dass die partiellen Ableitungen $\partial_k f_j(\xi)$ existieren und dass $a_{jk} = \partial_k f_j(\xi)$ und $A = J_f(\xi)$ gilt. □

Aus der totalen Differenzierbarkeit in ξ folgt also mit Satz 7.2.2 die partielle Differenzierbarkeit in ξ, aber nicht umgekehrt (vgl. die Beispiele nach Satz 7.1.2, wo die partiellen Ableitungen existieren, aber die Funktion sogar unstetig ist). Existieren aber die partiellen Ableitungen in einer Umgebung von ξ und sind sie in ξ stetig, so ist f in ξ total differenzierbar; vgl. Satz 7.1.4 und 7.2.2.

Für stetige Differenzierbarkeit sind die Verhältnisse einfacher.

Satz 7.2.3. *Seien $p, q \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^p$ offen und $f = (f_1, \dots, f_q)^T : U \to \mathbb{R}^q$. Dann ist f genau dann stetig differenzierbar, wenn $f \in C^1(U, \mathbb{R}^q)$, d.h., wenn alle partiellen Ableitungen der Koordinatenfunktionen von f existieren und stetig sind.*

Beweis. Da aus der Stetigkeit der partiellen Ableitungen die Differenzierbarkeit folgt, können wir f als differenzierbar annehmen. Für $h \in \mathbb{R}^p$ und $x, \xi \in U$ ist dann $(Df(x) - Df(\xi))(h) = (J_f(x) - J_f(\xi))(h)$. Legen wir in $\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q$ die Norm $\|\cdot\|_\infty$ zugrunde, so erhalten wir (vgl. das Beispiel nach Satz 6.4.6)

$$\|Df(x) - Df(\xi)\|_{L(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)} = \max_j \sum_{k=1}^{p} |\partial_k f_j(x) - \partial_k f_j(\xi)|.$$

Hieraus folgt leicht die Behauptung. □

Die üblichen Regeln für die Differenzierbarkeit von $f + g$ und $\lambda \cdot f$, wobei $f, g\colon U \to W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, übertragen sich unmittelbar. Entsprechendes gilt auch für $f \cdot g$ und f/g, falls $W = \mathbb{R}$ ist; vgl. auch Satz 6.4.4. Wir formulieren die Kettenregel:

Satz 7.2.4. *Seien $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$, $(X, \|\cdot\|_X)$ Banachräume, $U \subset V$ offen, $U' \subset W$ offen, $\xi \in U$, $g\colon U \to W$ differenzierbar in ξ, $g(U) \subset U'$ und $f\colon U' \to X$ differenzierbar in $g(\xi)$. Dann ist $f \circ g$ differenzierbar in ξ und*

$$D(f \circ g)(\xi) = Df(g(\xi)) \circ Dg(\xi).$$

Beweis. Es ist

$$R_g(h) := g(\xi + h) - g(\xi) - Dg(\xi)(h) = o(\|h\|_V)$$

für $h \to 0$ und

$$R_f(k) := f(g(\xi)+k) - f(g(\xi)) - Df(g(\xi))(k) = o(\|k\|_W)$$

für $k \to 0$. Mit $\Delta(h) := g(\xi+h) - g(\xi) = Dg(\xi)(h) + R_g(h)$ folgt

$$\begin{aligned}
& f(g(\xi+h)) - f(g(\xi)) \\
= \; & f(g(\xi)+\Delta(h)) - f(g(\xi)) \\
= \; & Df(g(\xi))(\Delta(h)) + R_f(\Delta(h)) \\
= \; & (Df(g(\xi)) \circ Dg(\xi))(h) + Df(g(\xi))(R_g(h)) + R_f(\Delta(h)).
\end{aligned}$$

Zu zeigen ist, dass $R(h) := Df(g(\xi))(R_g(h)) + R_f(\Delta(h)) = o(\|h\|_V)$ für $h \to 0$. Wegen

$$\|Df(g(\xi))(R_g(h))\|_X \leq \|Df(g(\xi))\|_{L(W,X)} \|R_g(h)\|_W = o(\|h\|_V)$$

für $h \to 0$ müssen wir nur noch $\|R_f(\Delta(h))\|_X = o(\|h\|_V)$ für $h \to 0$ zeigen. Dies folgt aber, da $\Delta(h) = O(\|h\|_V)$ und damit $\Delta(h) \to 0$ für $h \to 0$, und da

$$\frac{\|R_f(\Delta(h))\|_X}{\|h\|_V} = \frac{\|R_f(\Delta(h))\|_X}{\|\Delta(h)\|_W} \cdot \frac{\|\Delta(h)\|_W}{\|h\|_V}$$

falls $\Delta(h) \neq 0$. Für $h \to 0$ strebt der erste Faktor rechts gegen 0, während der zweite beschränkt bleibt. □

Im Falle $V = \mathbb{R}^p$, $W = \mathbb{R}^q$, $X = \mathbb{R}^r$ folgt aus Satz 7.2.4, dass

$$J_{f \circ g}(\xi) = J_f(g(\xi)) \cdot J_g(\xi).$$

Beispiel. Sei $U \subset \mathbb{R}^p$ offen und I Intervall. Es seien $f\colon U \to \mathbb{R}$ und $\gamma\colon I \to U$ differenzierbar. Dann ist $f \circ \gamma$ differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}
(f \circ \gamma)'(t) &= J_f(\gamma(t)) \cdot J_\gamma(t) \\
&= \operatorname{grad} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \\
&= (\partial_1 f(\gamma(t)), \partial_2 f(\gamma(t)), \ldots, \partial_p f(\gamma(t))) \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \\ \vdots \\ \gamma_p'(t) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{p} (\partial_j f \circ \gamma)(t) \gamma_j'(t).
\end{aligned}$$

Im Spezialfall $\gamma(t) = \xi + tv$, wobei $\xi \in U$ und $v \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\}$, ist $(f \circ \gamma)'(0)$ die Richtungsableitung $\partial_v f(\xi)$ und wegen $\gamma_j'(t) = v_j$ reduziert sich obige Formel auf die in Satz 7.1.3 gefundene.

Generell lassen sich auf diese Art und Weise viele Resultate der eindimensionalen Analysis auf Funktionen mehrerer Veränderlicher übertragen. So liefert der

Mittelwertsatz, dass für eine differenzierbare Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ und $a, b \in U$ mit $[a, b] = \{a + t(b - a) \colon t \in [0, 1]\}$ ein $\eta \in [a, b]$ existiert, so dass

$$f(b) - f(a) = \operatorname{grad} f(\eta) \cdot (b - a).$$

Denn mit $v = b - a$ und $\gamma\colon [0, 1] \to U$, $\gamma(t) = a + tv$, existiert nach Mittelwertsatz $t^* \in (0, 1)$ mit

$$f(b) - f(a) = (f \circ \gamma)(1) - (f \circ \gamma)(0) = (f \circ \gamma)'(t^*) = \operatorname{grad} f(\gamma(t^*)) \cdot (b - a).$$

Also leistet $\eta = \gamma(t^*)$ das Verlangte.

Der Mittelwertsatz gilt *nicht* für Funktionen nach $\mathbb{R}^q$ mit $q \geq 2$. Mit

$$M = \sup_{x \in [a,b]} \| \operatorname{grad} f(x) \|_1 = \sup_{x \in [a,b]} \sum_{j=1}^{p} |\partial_j f(x)|$$

folgt aber für $f\colon U \to \mathbb{R}$ und $a, b \in U$ wie oben, dass

$$\|f(b) - f(a)\|_\infty \leq M \|b - a\|_\infty.$$

Diese letzte Gleichung lässt sich sofort auf Funktionen $f\colon U \to \mathbb{R}^q$ verallgemeinern, indem man sie für die einzelnen Koordinatenfunktion betrachtet. Man erhält folgendes auch *Mittelwertungleichung* genanntes Ergebnis.

Satz 7.2.5. *Seien $p, q \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^p$ offen und $f = (f_1, \ldots, f_q)^T \colon U \to \mathbb{R}^q$ stetig differenzierbar. Seien $a, b \in U$ mit $[a, b] \subset U$. Sei $M = \sup_{x \in [a,b]} \|J_f(x)\|$, wobei $\|J_f(x)\|$ die Zeilensummennorm bedeute. Dann gilt*

$$\|f(b) - f(a)\|_\infty \leq M \|b - a\|_\infty.$$

Wir kehren zum Beispiel zurück, dass $f\colon U \to \mathbb{R}$ und $\gamma\colon I \to U$ differenzierbar sind, mit $U \subset \mathbb{R}^p$ offen und einem Intervall I. Wir hatten oben die Ableitung $(f \circ \gamma)'(t)$ berechnet. Existieren auch die zweiten Ableitungen von f und γ, so folgt

$$\begin{aligned}
(f \circ \gamma)''(t) &= \sum_{j=1}^{p} (\partial_j f \circ \gamma)'(t) \gamma_j'(t) + (\partial_j f \circ \gamma)(t) \gamma_j''(t) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{p} \partial_k (\partial_j f \circ \gamma)(t) \gamma_k'(t) \right) \gamma_j'(t) + \sum_{j=1}^{p} (\partial_j f \circ \gamma)(t) \gamma_j''(t) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} \partial_{k,j} (f \circ \gamma)(t) \gamma_k'(t) \gamma_j'(t) + \sum_{j=1}^{p} (\partial_j f \circ \gamma)(t) \gamma_j''(t)
\end{aligned}$$

Definition 7.2.2. Sei $p \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^p$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ und $\xi \in U$. Existieren die zweiten partiellen Ableitungen von f in ξ, so heißt

$$H_f(\xi) := (\partial_{ij} f(\xi))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Hesse-Matrix von f an der Stelle ξ.

Nach dem Satz von Schwarz (Satz 7.1.1) ist die Hesse-Matrix für $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ symmetrisch.

Mit dieser Definition erhält man im obigen Beispiel

$$(f \circ \gamma)'(t) = \operatorname{grad} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

und

$$(f \circ \gamma)''(t) = \gamma'(t)^T \cdot H_f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) + \operatorname{grad} f(\gamma(t)) \cdot \gamma''(t).$$

Wir betrachten nun wieder für $\xi \in U$ und $v \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\}$ die in einem offenen Intervall I mit $0 \in I$ durch $\gamma(t) = \xi + tv$ definierte Funktion γ. Mit $\gamma'(t) = v$ und $\gamma''(t) = 0$ erhält man

$$(f \circ \gamma)'(0) = \operatorname{grad} f(\xi) \cdot v$$

und

$$(f \circ \gamma)''(0) = v^T \cdot H_f(\xi) \cdot v.$$

Der Taylorsche Satz (Satz 5.4.2) liefert nun

$$\begin{aligned} f(\xi + tv) &= (f \circ \gamma)(t) \\ &= (f \circ \gamma)(0) + (f \circ \gamma)'(0)t + \frac{1}{2}(f \circ \gamma)''(0) + o(t^2) \\ &= f(\xi) + (\operatorname{grad} f(\xi) \cdot v)\, t + \frac{1}{2}\left(v^T \cdot H_f(\xi) \cdot v\right) t^2 + o(t^2) \end{aligned}$$

für $t \to 0$. Mit $h = tv$ erhält man folgenden Satz.

Satz 7.2.6. *Sei $p \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^p$ offen, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ und $\xi \in U$. Dann gilt*

$$f(\xi + h) = f(\xi) + \operatorname{grad} f(\xi) \cdot h + \frac{1}{2} h^T \cdot H_f(\xi) \cdot h + o(\|h\|^2)$$

für $h \to 0$, $h \in \mathbb{R}^p$.

7.3 Lokale Extrema

In Definition 4.2.1 haben wir für Funktionen $f\colon M \to \mathbb{R}$ mit $M \subset \mathbb{C}$ definiert, wann f ein lokales bzw. globales Extremum hat. Diese Begriffe können wörtlich auf den Fall, dass M metrischer Raum ist, übertragen werden.

Für $f \in C^2(I, \mathbb{R})$ mit einem Intervall I und $\xi \in \operatorname{int}(I)$ hatten wir in Satz 4.3.3 und Satz 4.2.1 gezeigt:

$$\begin{aligned} & f'(\xi) = 0 \text{ und } f''(\xi) > 0 \text{ (bzw. } < 0) \\ \Rightarrow\ & f \text{ hat lokales Minimum (bzw. Maximum) in } \xi \\ \Rightarrow\ & f'(\xi) = 0 \end{aligned}$$

Wir wollen diese Aussagen jetzt auf Funktionen $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ mit $U \subset \mathbb{R}^p$ übertragen. Dabei ersetzen wir f' durch den Gradienten und f'' durch die Hesse-Matrix.

Satz 7.3.1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^p$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ habe in $\xi \in U$ ein lokales Extremum. Dann gilt* $\operatorname{grad} f(\xi) = 0$.

Beweis. Für $j \in \{1, \dots, p\}$ hat die durch $t \mapsto f(\xi + te_j)$ definierte Funktion g_j ein lokales Extremum in 0. Nach Satz 4.3.3 folgt $\partial_j f(\xi) = g_j'(0) = 0$. □

Beispiel. Sei
$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le 4, y \ge 0\}$$
und
$$f \colon K \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - \sqrt{3}x - y.$$
Man bestimme $\max_{(x,y)\in K} f(x, y)$ und $\min_{(x,y)\in K} f(x, y)$. (Die Existenz von Maximum und Minimum folgt, da K kompakt und f stetig.)

Für ein im Inneren von K gelegenes Extremum (x, y) folgt nach Satz 7.3.1, dass $(0, 0) = \operatorname{grad} f(x, y) = (2x - \sqrt{3}, 2y - 1)$, also $(x, y) = \bigl(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\bigr)$.

Wir untersuchen jetzt den Rand von K auf Extrema. Mit
$$\Gamma_1 := \{(x, 0) \colon -2 \le x \le 2\} \quad \text{und} \quad \Gamma_2 := \{(2\cos t, 2\sin t) \colon 0 \le t \le \pi\}$$
gilt $\partial K = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Des Weiteren ist
$$\max_{(x,y)\in\Gamma_1} f(x, y) = \max_{-2\le x\le 2} f(x, 0) = \max_{-2\le x\le 2} g(x)$$
mit $g(x) := x^2 - \sqrt{3}x$ und
$$\max_{(x,y)\in\Gamma_2} f(x, y) = \max_{0\le t\le\pi} f(2\cos t, 2\sin t) = \max_{0\le t\le\pi} h(t)$$
mit $h(t) := 4 - 2\sqrt{3}\cos t - 2\sin t$. Analoges gilt für die Minima.

Wegen $g'(x) = 2x - \sqrt{3}$ hat g' nur die Nullstelle $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ und damit sind Extremwerte von g nur in $-2, \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und 2 möglich. Wegen $h'(t) = 2\sqrt{3}\sin t - 2\cos t$ hat h' in $(0, \pi)$ nur die Nullstelle $\frac{1}{6}\pi$ und damit sind Extremwerte von h nur in $0, \frac{1}{6}\pi$ und π möglich.

Insgesamt erhält man 5 Kandidaten für mögliche Extremstellen: $\xi_1 = \bigl(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\bigr)$, $\xi_2 = \bigl(\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0\bigr)$, $\xi_3 = \bigl(2\cos(\frac{1}{6}\pi), 2\sin(\frac{1}{6}\pi)\bigr) = (\sqrt{3}, 1)$, $\xi_4 = (-2, 0)$ und $\xi_5 = (2, 0)$; siehe Abbildung 41 für eine Skizze der ξ_k.

Wegen $f(\xi_1) = -1$, $f(\xi_2) = g\bigl(\frac{1}{2}\sqrt{3}\bigr) = -\frac{3}{4}$, $f(\xi_3) = h\bigl(\frac{1}{6}\pi\bigr) = 0$, $f(\xi_4) = g(-2) = h(\pi) = 4 + 2\sqrt{3}$ und $f(\xi_5) = g(2) = h(0) = 4 - 2\sqrt{3}$ folgt, dass f sein globales Maximum $4 + 2\sqrt{3}$ in $\xi_4 = (-2, 0)$ und sein globales Minimum -1 in $\xi_1 = \bigl(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\bigr)$ annimmt.

Wir haben hier die Extrema zur Übung mit Hilfe der Differentialrechnung bestimmt. Im konkreten Beispiel hätte man das leichter tun können, in dem man $f(x, y)$ in der Form $f(x, y) = \bigl(x - \frac{1}{2}\sqrt{3}\bigr)^2 + \bigl(y - \frac{1}{2}\bigr)^2 - 1$ schreibt.

Definition 7.3.1. Sei A reelle, symmetrische $(p \times p)$-Matrix. Dann heißt A

(i) *positiv definit*, falls $x^T Ax > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$;

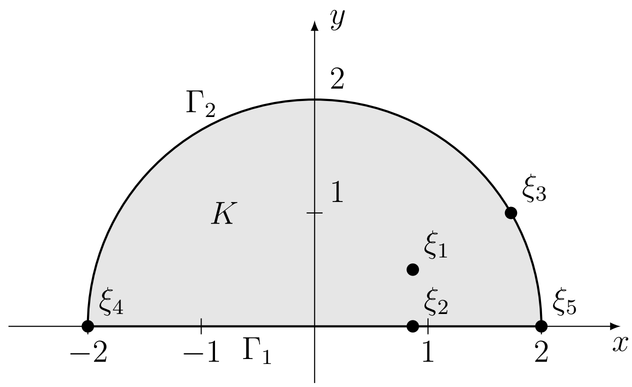

Abbildung 41: Die Menge K und die möglichen Extremstellen $\xi_1, \ldots, \xi_5$.

(ii) *negativ definit*, falls $x^T Ax < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$;

(iii) *positiv semidefinit*, falls $x^T Ax \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^p$;

(iv) *negativ semidefinit*, falls $x^T Ax \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^p$;

(v) *indefinit*, falls A weder positiv noch negativ semidefinit ist, das heißt, falls $x, y \in \mathbb{R}^p$ mit $x^T Ax > 0$ und $y^T Ay < 0$ existieren.

Ist A positiv definit, so ist wegen Satz 6.5.5

$$c := \min_{\substack{x \in \mathbb{R}^p \\ \|x\|=1}} x^T Ax > 0$$

und es gilt

$$x^T Ax = \left(\frac{x}{\|x\|} A \frac{x}{\|x\|} \right) \|x\|^2 \geq c\|x\|^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^p$. Entsprechendes gilt im negativ definiten Fall.

Satz 7.3.2. *Sei A reelle, symmetrische $(p \times p)$-Matrix. Dann sind alle Eigenwerte von A reell und es gilt:*

(i) *A ist positiv definit $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte von A sind positiv.*

(ii) *A ist negativ definit $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte von A sind negativ.*

(iii) *A ist positiv semidefinit $\Leftrightarrow$ A hat keine negativen Eigenwerte.*

(iv) *A ist negativ semidefinit $\Leftrightarrow$ A hat keine positiven Eigenwerte.*

(v) *A ist indefinit $\Leftrightarrow$ A hat sowohl positive wie negative Eigenwerte.*

Satz 7.3.3. *Sei*

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}}$$

reelle, symmetrische $(p \times p)$*-Matrix. Für* $1 \le k \le p$ *sei* A_k *die* $(k \times k)$*-Matrix, die man aus* A *durch Weglassen der letzten* $p - k$ *Zeilen und Spalten erhält, also*

$$A_k = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le k}} .$$

Dann gilt:

(i) A *ist positiv definit* $\Leftrightarrow$ *Für alle* $k \in \{1, \ldots, p\}$ *gilt* $\det(A_k) > 0$.

(ii) A *ist negativ definit* $\Leftrightarrow$ *Für alle* $k \in \{1, \ldots, p\}$ *gilt* $(-1)^k \det(A_k) > 0$.

Für den Beweis der Sätze 7.3.2 und 7.3.3 sei auf die Lineare Algebra verwiesen.

Satz 7.3.4. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^p$ *offen,* $f \in C^2(U, \mathbb{R})$*,* $\xi \in U$ *und* $\operatorname{grad} f(\xi) = 0$*. Dann gilt:*

(i) *Ist* $H_f(\xi)$ *positiv definit, so hat* f *ein lokales Minimum in* ξ.

(ii) *Ist* $H_f(\xi)$ *negativ definit, so hat* f *ein lokales Maximum in* ξ.

(iii) *Ist* $H_f(\xi)$ *indefinit, so hat* f *kein lokales Extremum in* ξ.

Im semidefiniten Fall ist keine allgemeine Aussage möglich. (Dies entspricht dem Fall $f''(\xi) = 0$ im Falle einer Veränderlichen.)

Beweis von Satz 7.3.4. Sei $h \in \mathbb{R}^p$ mit $\xi + h \in U$. Aufgrund der Taylorformel (Satz 7.2.6), und da $\operatorname{grad} f(\xi) = 0$ nach Voraussetzung, gilt

$$f(\xi + h) - f(\xi) = \frac{1}{2} h^T H_f(\xi) h + R(h)$$

mit $R(h) = o(\|h\|^2)$ für $h \to 0$.

Zu (i): Ist $H_f(\xi)$ positiv definiert, so existiert $c > 0$ mit $h^T H_f(\xi) h \ge c\|h\|^2$ für alle $h \in \mathbb{R}^p$. Weiter existiert $\delta > 0$ mit $|R(h)| < \frac{1}{2} c\|h\|^2$ für $0 < \|h\| \le \delta$. Es folgt

$$f(\xi + h) - f(\xi) \ge \frac{1}{2} h^T H_f(\xi) h - |R(h)| > 0$$

für $0 < \|h\| \le \delta$. Also ist ξ lokales Minimum.

Zu (ii): Dies folgt analog zu (i).

Zu (iii): Ist $H_f(\xi)$ indefinit, so existieren $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^p$ mit $c_1 := h_1^T H_f(\xi) h_1 < 0$ und $c_2 := h_2^T H_f(\xi) h_2 > 0$. Für $t \in \mathbb{R}$ und $j \in \{1, 2\}$ folgt $(th_j)^T H_f(\xi)(th_j) = c_j t^2$ und $R(th_j) = o(\|th_j\|^2\|) = o(t^2)$ für $t \to 0$. Für genügend kleines t ist dann $|R(th_j)| < \frac{1}{2}|c_j| t^2 = \frac{1}{2}\left|(th_j)^T H_f(\xi)(th_j)\right|$ und damit

$$f(\xi + th_1) - f(\xi) = \frac{1}{2}(th_1)^T H_f(\xi)(th_1) + R(th_1) \le \frac{1}{2} c_1 t^2 + |R(th_2)| < 0$$

und

$$f(\xi + th_2) - f(\xi) = \frac{1}{2}(th_2)^T H_f(\xi)(th_2) + R(th_2) \ge \frac{1}{2} c_1 t^2 - |R(th_2)| > 0.$$

Es folgt, dass ξ kein lokales Extremum ist. $\square$

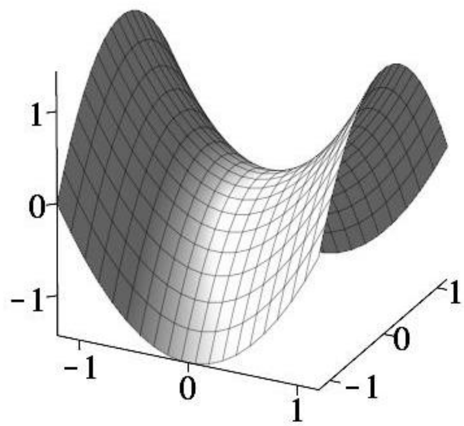

Abbildung 42: Ein Sattelpunkt.

Für $p = 2$ sieht im Falle (iii) der Graph von f, also die Menge

$$\{(x, y, f(x, y))\colon (x, y) \in U\} \subset \mathbb{R}^3,$$

lokal wie ein "Sattel" aus, im Beispiel $f(x, y) = x^2 - y^2$, $\xi = (0, 0)$ ist dies in Abbildung 42 dargestellt. Man spricht daher auch von einem *Sattelpunkt*.

Wir betrachten den Spezialfall $p = 2$ genauer. Für eine symmetrische (2×2)-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

ist die Determinante $\det(A)$ durch $\det(A) = ac - b^2$ gegeben und es gilt:

(i) A ist positiv definit $\Leftrightarrow a > 0$ und $\det(A) > 0$.

(ii) A ist negativ definit $\Leftrightarrow a < 0$ und $\det(A) > 0$.

(iii) A ist indefinit $\Leftrightarrow \det(A) < 0$.

Damit erhalten wir das folgende Resultat direkt aus Satz 7.3.4.

Satz 7.3.5. *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, $\xi \in U$ und* $\operatorname{grad} f(\xi) = 0$. *Sei*

$$\Delta(\xi) := \partial_{11} f(\xi) \partial_{22} f(\xi) - (\partial_{12} f(\xi))^2.$$

Dann gilt:

(i) *Ist $\Delta(\xi) > 0$ und $\partial_{11} f(\xi) > 0$, so hat f ein lokales Minimum in ξ.*

(ii) *Ist $\Delta(\xi) > 0$ und $\partial_{11} f(\xi) < 0$, so hat f ein lokales Maximum in ξ.*

(iii) *Ist $\Delta(\xi) < 0$, so hat f kein lokales Extremum (sondern einen Sattelpunkt) in ξ.*

Beispiel 1. Sei
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = xy - x^3 - y^2.$$
Dann ist $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und
$$\partial_1 f(x,y) = y - 3x^2 \quad \text{und} \quad \partial_2 f(x,y) = x - 2y.$$
Aus $\operatorname{grad} f(x,y) = 0$ folgt $y = 3x^2$ und $x = 2y$, also $y = 3(2y)^2 = 12y^2$ und damit $y = 0$ oder $y = \frac{1}{12}$. Zusammen mit $x = 2y$ folgt
$$(x,y) = \xi_1 := (0,0) \quad \text{oder} \quad (x,y) = \xi_2 := \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right).$$
Tatsächlich gilt auch $\operatorname{grad} f(\xi_j) = 0$ für $j \in \{1,2\}$.

Wegen $\partial_{11} f(x,y) = -6x$, $\partial_{12} f(x,y) = \partial_{21} f(x,y) = 1$ und $\partial_{22} f(x,y) = -2$ folgt
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$
und damit $\Delta(x,y) = \det H_f(x,y) = 12x - 1$.

Somit ist $\Delta(\xi_1) = \Delta(0,0) = -1 < 0$ und folglich ist ξ_1 Sattelpunkt. Weiter ist $\Delta(\xi_1) = \Delta\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = 1 > 0$ und wegen $\partial_{11} f(\xi_2) = -1 < 0$ hat f in ξ_2 ein lokales Maximum.

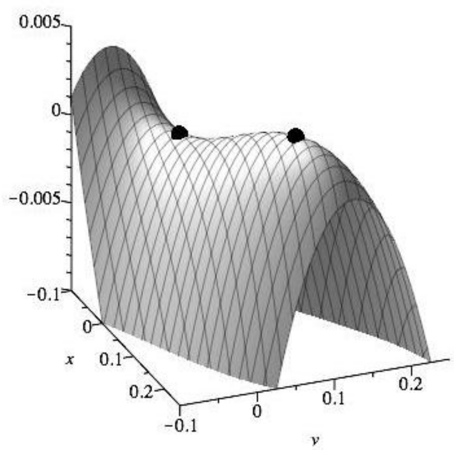

Abbildung 43: Der Graph der Funktion aus Beispiel 1.

Der Graph von f – mit den ξ_1, ξ_2 entsprechenden Punkten markiert – ist in Abbildung 43 dargestellt.

Beispiel 2. Sei
$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = 2x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz - 2x^2.$$
Dann ist $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und
$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (8x^3 - 4yz - 4x, 4y^3 - 4xz, 4z^3 - 4xy).$$

Eine längere Rechnung zeigt, dass $\operatorname{grad} f(x,y,z) = 0$ für genau 7 Punkte (x,y,z) gilt, nämlich für $(x,y,z) = \xi_j$ wobei $j \in \{1,\dots,7\}$, mit $\xi_1 := (0,0,0)$, $\xi_2 := \big(\frac{1}{2}\sqrt{2},0,0\big)$, $\xi_3 := \big(-\frac{1}{2}\sqrt{2},0,0\big)$, $\xi_4 := (1,1,1)$, $\xi_5 := (1,-1,-1)$, $\xi_6 := (-1,1,-1)$ und $\xi_7 := (-1,-1,1)$. Es ist

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 24x^2-4 & -4z & -4y \\ -4z & 12y^2 & -4x \\ -4y & -4x & 12z^2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$H_f(\xi_1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist negativ semidefinit, Satz 7.3.4 also nicht anwendbar. Es ist aber $f(0,0,z) > 0$ für alle $z \in \mathbb{R}$ und $f(x,0,0) < 0$ für $0 < x < 1$, und daher hat f in ξ_1 kein lokales Extremum. Weiter gilt

$$H_f(\xi_{2,3}) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2\sqrt{2} \\ 0 & \pm 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom dieser Matrix ist durch $(8-\lambda)(\lambda^2-8)$ gegeben. Damit hat $H_f(\xi_{2,3})$ sowohl positive wie negative Eigenwerte, ist also indefinit, und folglich ist in $\xi_{2,3}$ kein lokales Extremum. Weiter ist

$$H_f(\xi_4) = \begin{pmatrix} 20 & -4 & -4 \\ -4 & 12 & -4 \\ -4 & -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist positiv definit, wie man etwa durch Betrachtung der Abschnittsdeterminanten (Satz 7.3.3) feststellt. Damit liegt in ξ_4 ein lokales Minimum vor.

Analog – oder durch Symmetrieüberlegungen – zeigt man, dass f auch in ξ_5, ξ_6, ξ_7 lokale Minima hat.

7.4 Höhere Ableitungen und Taylorformel

Satz 7.2.6 liefert eine Taylorentwicklung vom Grad 2. Für Taylorentwicklungen höheren Grades muss man die entsprechenden höheren Ableitungen bilden.

Sei $f \in C^n(U,\mathbb{R})$ und $\xi \in U$. Wie in §7.2 sei $v \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\}$ und γ die in einem offenen Intervall I mit $0 \in I$ durch $\gamma(t) = \xi + tv$ definierte Funktion. Mit $\gamma'(t) = v$ und $\gamma^{(k)}(t) = 0$ für $k \geq 2$ erhalten wir genau wie in §7.2 dann

$$\begin{aligned}(f\circ\gamma)^{(n)}(t) &= \sum_{i_1=1}^{p} \cdots \sum_{i_n=1}^{p} (\partial_{i_1,\dots,i_n} f \circ \gamma)(t)\; v_{i_1} \dots v_{i_p} \\ &= \sum_{i_1=1}^{p} \cdots \sum_{i_n=1}^{p} \partial_{i_1,\dots,i_n} f(\xi + tv)\; v_{i_1} \dots v_{i_p}\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Schwarz gilt zum Beispiel $\partial_{112}f = \partial_{121}f = \partial_{211}f$. Um gleiche Ableitungen wie diese zusammenzufassen, sind folgende Notationen hilfreich.

Für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{N}_0^p$ und $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ setzt man

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j, \quad \alpha! = \prod_{j=1}^{p} \alpha_j! \quad \text{und} \quad x^\alpha = \prod_{j=1}^{p} x_j^{\alpha_j}.$$

Man nennt α hier auch *Multiindex*. Des Weiteren sei für $f \in C^{|\alpha|}(U, \mathbb{R})$

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_p^{\alpha_p} f.$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{N}_0^p$ mit $|\alpha| = n$. Wir betrachten die Menge I_α der n-Tupel $(i_1, \ldots, i_n)$, bei denen für alle $k \in \{1, \ldots, p\}$ die Menge $\{m \colon i_m = k\}$ genau α_k Elemente hat. Nach dem Satz von Schwarz gilt für $(i_1, \ldots, i_n) \in I_\alpha$ dann $\partial_{i_1,\ldots,i_n} f = \partial^\alpha f$. Eine kombinatorische Überlegung zeigt, dass I_α aus $n!/\alpha!$ Elementen besteht. Damit erhält obige Darstellung von $(f \circ \gamma)^{(n)}(t)$ folgende Form.

Satz 7.4.1. *Seien $p, n \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^p$ offen, $f \in C^n(U, \mathbb{R})$, $\xi \in U$ und $v \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\}$. Ist dann I offenes Intervall mit $0 \in I$ und $\gamma \colon I \to U$, $\gamma(t) = \xi + tv$, so gilt*

$$(f \circ \gamma)^{(n)}(t) = \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} \partial^\alpha f(\xi + tv)\, v^\alpha$$

Völlig analog zu Satz 7.2.6 erhält man nun folgendes Resultat.

Satz 7.4.2. *Seien $p, n \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^p$ offen, $f \in C^n(U, \mathbb{R})$ und $\xi \in U$. Dann gilt*

$$f(\xi + h) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(\xi)\, h^\alpha + o(\|h\|^n)$$

für $h \to 0$, $h \in \mathbb{R}^p$.

Die auf der rechten Seite stehende Summe bezeichnet man wieder als *Taylorpolynom* vom Grad n.

Wir haben hier Satz 5.4.2 benutzt. Stattdessen kann man natürlich auch die Lagrange- oder Integralform des Restglieds benutzen. So erhält man zum Beispiel folgendes Resultat.

Satz 7.4.3. *Seien $p, n \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^p$ offen, $f \in C^{n+1}(U, \mathbb{R})$ und $\xi \in U$. Sei $h \in \mathbb{R}^p$ mit $[\xi, \xi + h] \subset U$. Dann existiert $\theta \in [0, 1]$ mit*

$$f(\xi + h) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(\xi)\, h^\alpha + \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(\xi + \theta h)\, h^\alpha$$

Insbesondere gilt für $f \in C^{n+1}(U, \mathbb{R})$, schärfer als in Satz 7.4.2, dass

$$f(\xi + h) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(\xi)\, h^\alpha + O(\|h\|^{n+1})$$

für $h \to 0$.

7.5 Der Satz über implizite Funktionen

Wir betrachten die Frage, wann sich eine Gleichung der Form $F(x,y) = 0$ (mit einer differenzierbaren, auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ definierten Funktion F) nach y auflösen lässt, d.h., wann eine Funktion f existiert, so dass die Gleichung $F(x,y) = 0$ äquivalent zur Gleichung $y = f(x)$ ist. Es gilt dann $F(x, f(x)) = 0$. Wir nennen dann $F(x,y) = 0$ eine *implizite* Form der *explizit* gegebenen Gleichung $y = f(x)$.

Etwas genauer werden wir folgende Fragestellung untersuchen: Gegeben sei $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$ mit $F(\xi,\eta) = 0$. Existieren dann Umgebungen U und V von ξ und η und eine (differenzierbare) Funktion $f\colon U \to V$ mit $f(\xi) = \eta$ und $F(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in U$? Inwieweit ist f eindeutig bestimmt?

Für eine konkrete Funktion F könnte die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon F(x,y) = 0\}$ etwa wie in Abbildung 44 aussehen. Hier scheint es so zu sein, dass für $(\xi,\eta) = P$ Umgebungen U, V und eine Funktion f mit den verlangten Eigenschaften existieren, während das für $(\xi,\eta) = Q$ nicht der Fall ist.

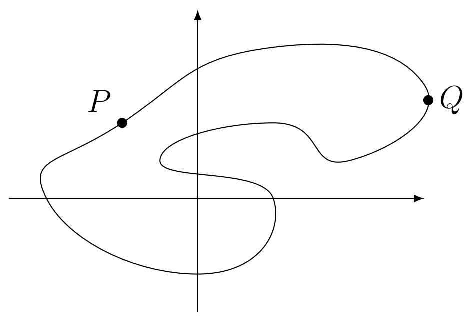

Abbildung 44: Bild von $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon F(x,y) = 0\}$ für eine Funktion F

Man erkennt nun, dass für $(\xi,\eta) = Q$ die durch $y \mapsto F(\xi,y)$ definierte Funktion in einer Umgebung von η immer ≤ 0 oder immer ≥ 0 ist, also in η ein lokales Extremum hat. Es folgt, dass $\partial_2 F(Q) = 0$ gilt.

Wir werden zeigen, dass (für stetig differenzierbares F) Umgebungen U, V und eine Funktion f mit den verlangten Eigenschaften existieren, wenn $\partial_2 F(\xi,\eta) \neq 0$ gilt.

Satz 7.5.1. (Satz über implizite Funktionen in $\mathbb{R}^2$) *Seien $G \subset \mathbb{R}^2$ offen, $(\xi,\eta) \in G$ und $F \in C^1(G,\mathbb{R})$ mit $F(\xi,\eta) = 0$. Es sei $\partial_2 F(\xi,\eta) \neq 0$.*

Dann existieren Umgebungen I und J von ξ und η mit $I \times J \subset G$ sowie eine Funktion $f \in C^1(I,J)$ mit $f(\xi) = \eta$ und $F(x, f(x)) = 0$ für $x \in I$. Umgekehrt folgt für $(x,y) \in I \times J$ mit $F(x,y) = 0$, dass $y = f(x)$ gilt.

Des Weiteren gilt $f'(x) = -\partial_1 F(x,y)/\partial_2 F(x,y)$ für $x \in I$, insbesondere also $f'(\xi) = -\partial_1 F(\xi,\eta)/\partial_2 F(\xi,\eta)$.

Wir skizzieren den Beweis nur. Wir suchen – für festes x – eine Nullstelle der durch $y \mapsto \psi(y) := F(x,y)$ gegebenen Funktion. Dazu benutzen wir im Wesentlichen das Newtonverfahren, das wegen $\psi'(y) = \partial_2 F(x,y)$ aus der Iteration der Funktion

$$y \mapsto y - \frac{\psi(y)}{\psi'(y)} = y - \frac{F(x,y)}{\partial_2 F(x,y)}.$$

besteht. Für unsere Zwecke wird es etwas einfacher sein, hier $\partial_2 F(x,y)$ durch $\partial_2 F(\xi,\eta)$ zu ersetzen. Da wir ohnehin nur eine kleine Umgebung von (ξ,η) betrachten, ist plausibel, das dies nur einen geringen Unterschied ausmacht .

Wir werden also mit einem geeigneten Intervall I die rekursiv definierte Folge (f_n) von Funktionen $f_n\colon I \to \mathbb{R}$,

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) - \frac{F(x, f_n(x))}{\partial_2 F(\xi,\eta)}$$

betrachten, mit $f_0(x) = \eta$ für alle $x \in I$. Wir werden sehen, dass $(x, f_n(x)) \in G$ für alle $x \in I$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt, die Folge (f_n) also tatsächlich so definiert werden kann. Außerdem werden wir zeigen, dass die Folge gleichmäßig konvergiert. Der Grenzwert f ist dann stetig und es gilt $f(x) = f(x) - F(x, f(x))/\partial_2 F(\xi,\eta)$, also $F(x, f(x)) = 0$.

Bei den Konvergenzuntersuchungen zum Newtonverfahren hatten wir vorausgesetzt, dass die zu untersuchende Funktion eine Nullstelle hat. Hier wollen wir das gerade zeigen und müssen beim Konvergenzbeweis daher anders vorgehen.

Für genügend kleine $\varepsilon, \delta > 0$ sowie $I = [\xi - \delta, \xi + \delta]$ und $J = [\eta - \varepsilon, \eta + \varepsilon]$ gilt $I \times J \subset G$. Wir nehmen zunächst einmal an, dass $f_n(I) \subset J$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Mit dem Mittelwertsatz folgt dann

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= f_n(x) - f_{n-1}(x) - \frac{F(x, f_n(x)) - F(x, f_{n-1}(x))}{\partial_2 F(\xi,\eta)} \\ &= f_n(x) - f_{n-1}(x) - \frac{\partial_2 F(x, y^*)(f_n(x) - f_{n-1}(x))}{\partial_2 F(\xi,\eta)} \\ &= \left(1 - \frac{\partial_2 F(x,y^*)}{\partial_2 F(\xi,\eta)}\right)(f_n(x) - f_{n-1}(x)) \end{aligned}$$

für ein $y^* \in J$. Wählt man ε und δ klein genug, so folgt

$$\left|1 - \frac{\partial_2 F(x,y)}{\partial_2 F(\xi,\eta)}\right| \le \frac{1}{2} \quad \text{für } (x,y) \in I \times J.$$

und

$$\left|\frac{F(x,\eta)}{\partial_2 F(\xi,\eta)}\right| \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } x \in I.$$

Die erste Ungleichung liefert

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \le \frac{1}{2}|f_n(x) - f_{n-1}(x)|$$

Die zweite liefert

$$|f_1(x) - f_0(x)| = \left|\frac{F(x, f_0(x))}{\partial_2 F(\xi,\eta)}\right| = \left|\frac{F(x,\eta)}{\partial_2 F(\xi,\eta)}\right| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Induktiv erhält man

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \le \frac{1}{2^n}|f_1(x) - f_0(x)| \le \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

und damit

$$|f_{n+1}(x)-\eta| = |f_{n+1}(x)-f_0(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |f_{k+1}(x)-f_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

Aus der letzten Ungleichung folgt nun induktiv, dass tatsächlich $f_n(I) \subset J$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h., die Folge (f_n) kann wirklich wie beschrieben rekursiv definiert werden.

Weiter folgt analog wie oben, dass

$$|f_n(x) - f_m(x)| = \sum_{k=m}^{n-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leq \sum_{k=m}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} < \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{2^m}$$

für $n > m$ und $x \in I$. Mit dem Cauchykriterium für Funktionenfolgen (Satz 3.7.1) folgt nun, dass die Folge (f_n) gleichmäßig konvergiert. Wie bereits oben bemerkt, ist der Grenzwert f stetig und es gilt $F(x, f(x)) = 0$.

Wir verzichten hier auf den Beweis, dass aus $F(x, y) = 0$ für $(x, y) \in I \times J$ folgt, dass $y = f(x)$. Ebenso verzichten wir auf den Beweis, dass f differenzierbar ist. Ist das aber einmal bekannt, so folgt die Formel für f' direkt aus der Kettenregel.

Beispiel. Sei

$$F\colon (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}, \quad F(x, y) = x^y - y^x.$$

Es gilt $F(2, 4) = 0$ und $\partial_2 F(x, y) = x^y \ln x - xy^{x-1}$, also

$$\partial_2 F(2, 4) = 2^4 \ln 2 - 2 \cdot 4 = 8(2 \ln 2 - 1) > 0.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren $\varepsilon, \delta > 0$ und stetig differenzierbares $f\colon (2 - \delta, 2 + \delta) \to (4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon)$ mit $F(x, f(x)) = 0$, d.h.,

$$x^{f(x)} = f(x)^x.$$

Es ist $\partial_1 F(x, y) = yx^{y-1} - y^x \ln y$, also

$$\partial_1 F(2, 4) = 4 \cdot 2^3 - 4^2 \ln 4 = 32(1 - \ln 2).$$

Es folgt

$$f'(2) = -\frac{\partial_1 F(2, 4)}{\partial_2 F(2, 4)} = -4\frac{1 - \ln 2}{2 \ln 2 - 1} = -3,177\ldots.$$

Eine Lösung der Gleichung $F(x, y) = 0$ ist natürlich auch durch $y = x$ gegeben. Wegen $\partial_2 F(x, x) = x^x(\ln x - 1) \neq 0$ für $x \neq e$ folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, dass jeder Punkt $x \neq e$ eine Umgebung U besitzt, so dass $F(x, y) \neq 0$ für $x, y \in U$ mit $x \neq y$. Dies ist für $x = e$ nicht der Fall.

Die durch $F(x, y) = 0$ gegebene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist in Abbildung 45 dargestellt.

Als Satz über implizite Funktionen bezeichnet man eine höherdimensionale Verallgemeinerung des vorigen Satzes. Seien dazu $G \subset \mathbb{R}^p$ offen, $H \subset \mathbb{R}^q$ offen, $\xi \in G$,

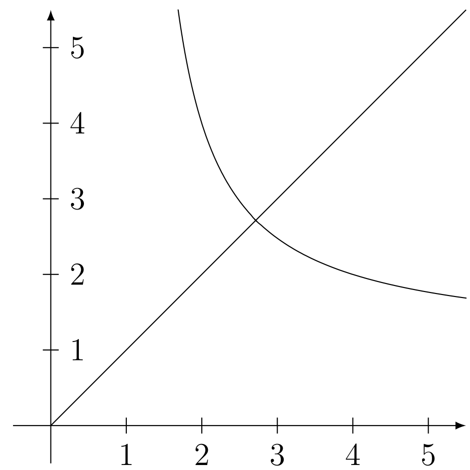

Abbildung 45: Die Menge der $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^y = y^x$.

$\eta \in H$ und $F \in C^1(G \times H, \mathbb{R}^q)$ mit $F(\xi, \eta) = 0$. Wir fragen nach der Existenz von Umgebungen U und V von ξ und η und einer differenzierbaren Funktion $f\colon U \to V$ mit $f(\xi) = \eta$ und $F(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in U$.

Sei $F_2^x\colon H \to \mathbb{R}^q$, $y \mapsto F(x, y)$. Die Terminologie soll andeuten, dass wir x festlassen und F nur noch als Funktion der zweiten Variablen y betrachten. Wir setzen

$$D_2F(x, y) := DF_2^x(y)$$

und

$$\partial_2^* F(x, y) := J_{F_2^x}(y) = \begin{pmatrix} \partial_{p+1}F_1(x, y) & \dots & \partial_{p+q}F_1(x, y) \\ \partial_{p+1}F_2(x, y) & \dots & \partial_{p+q}F_2(x, y) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{p+1}F_q(x, y) & \dots & \partial_{p+q}F_q(x, y) \end{pmatrix}.$$

Man schreibt auch $\frac{\partial F}{\partial y}$ statt $\partial_2^* F$. Analog definiert man D_1F und $\partial_1^* F$, indem man $F_1^y\colon G \to \mathbb{R}^q$, $x \mapsto F(x, y)$, betrachtet.

Wir benötigen jetzt, dass $D\psi(\eta) = D_2F(\xi, \eta)$ invertierbar ist. Dies ist nach Linearer Algebra äquivalent zu $\det(\partial_2^* F(\xi, \eta)) \neq 0$. Im bereits diskutierten Fall $p = q = 1$ erhält man die dort genannte Bedingung $\partial_2 F(\xi, \eta) \neq 0$

Satz 7.5.2. (Satz über implizite Funktionen) *Sei $G \subset \mathbb{R}^p$ offen, $H \subset \mathbb{R}^q$ offen, $\xi \in G$, $\eta \in H$ und $F \in C^1(G \times H, \mathbb{R}^q)$ mit $F(\xi, \eta) = 0$. Es sei $D_2F(\xi, \eta)$ invertierbar. Dann existieren offene Umgebungen $U \subset G$ und $V \subset H$ von ξ und η und eine Funktion $f \in C^1(U, V)$ mit $f(\xi) = \eta$ und $F(x, f(x)) = 0$ für $x \in U$. Umgekehrt folgt für $(x, y) \in U \times V$ mit $F(x, y) = 0$, dass $y = f(x)$ gilt.*

Des Weiteren gilt

$$Df(x) = -D_2F(x, f(x))^{-1} \circ D_1F(x, f(x))$$

für $x \in U$, insbesondere also $Df(\xi) = -D_2F(\xi, \eta)^{-1} \circ D_1F(\xi, \eta)$.

Die Beweisidee ist wie vorher: Mit dem (wie oben modifizierten) Newtonverfahren sucht man für festes x und $\psi(y) = F_2^x = F(x,y)$ eine Nullstelle der durch $y \mapsto \psi(y) := F(x,y)$ gegebenen Funktion.

Dazu skizzieren wir kurz das Newtonverfahren in höheren Dimensionen. Die Newtonsche Iterationsfunktion $y \to y^*$ erhält man im Eindimensionalen durch Auflösen der Gleichung $\psi(y)+\psi'(y)(y^*-y) = 0$. Für eine differenzierbare Funktion $\psi\colon H \to \mathbb{R}^q$, wobei $H \subset \mathbb{R}^q$ offen ist, löst man analog $\psi(y) + D\psi(y)(y^* - y) = 0$ und erhält

$$y \mapsto y^* := y - (D\psi(y))^{-1}(\psi(y)).$$

Dabei wird natürlich vorausgesetzt, dass die lineare Abbildung $D\psi(y)\colon \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ invertierbar ist. (Dies entspricht der Annahme $\psi'(y) \neq 0$ im eindimensionalen Fall.) Für unsere Zwecke ist es aber analog zum Vorigen etwas einfacher, $D_2F(\xi,\eta)$ statt $D\psi(y)$ zu betrachten. Die Invertierbarkeit dieses Ausdrucks ist ja vorausgesetzt.

Die Konvergenz der (modifizierten) Newtonschen Iterationsfolge könnte man ähnlich wie im eindimensionalen Fall zeigen, aber wir werden folgenden Satz benutzen.

Satz 7.5.3. (Banachscher Fixpunktsatz) *Sei (M,d) vollständiger metrischer Raum und $T\colon M \to M$. Es existiere $\alpha \in [0,1)$ mit $d(T(x),T(y)) \le \alpha d(x,y)$ für alle $x,y \in M$. Dann hat T genau einen Fixpunkt, d.h., es existiert genau ein $\xi \in M$ mit $T(\xi) = \xi$.*

Darüberhinaus gilt $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = \xi$ für alle $x \in M$. Dabei ist T^n die n-te Iterierte von T, die rekursiv durch $T^1 := T$ und $T^{n+1} := T \circ T^n$ definiert ist.

Der *Beweis* sei als Übung überlassen.

Beweis des Satzes über implizite Funktionen. Wir werden nur die Existenz einer Funktion $f \in C(U,V)$ mit den verlangten Eigenschaften beweisen, und den Beweis der stetigen Differenzierbarkeit von f nur skizzieren. Ist aber die Differenzierbarkeit von f bekannt, so folgt die Formel für Df wieder aus der Kettenregel.

Zur Abkürzung sei $A := D_2F(\xi,\eta)$. Es ist $A \in L(\mathbb{R}^q,\mathbb{R}^q)$ und nach Voraussetzung existiert A^{-1}. Seien $\varepsilon,\delta > 0$, $U := U(\xi,\delta)$ und $V := U(\eta,\varepsilon)$. Dabei können wir ε und δ so klein wählen, dass die folgenden drei Bedingungen gelten:

(i) $\overline{U} \subset G$ und $\overline{V} \subset H$.

(ii) Für $x \in U$ und $y \in V$ gilt

$$\left\|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^q} - A^{-1}(D_2F(x,y))\right\|_{L(\mathbb{R}^q,\mathbb{R}^q)} \le \frac{1}{2}.$$

(iii) Für $x \in U$ gilt

$$\left\|A^{-1}(F(x,\eta))\right\| \le \frac{\varepsilon}{4}.$$

Dabei können (ii) und (iii) erreicht werden, weil die linken Seiten stetig in $G \times H$ bzw. G sind und für $(x,y) = (\xi,\eta)$ bzw. $x = \xi$ verschwinden. Wir setzen nun

$X := C(\overline{U}, \mathbb{R}^q) = \{g\colon \overline{U} \to \mathbb{R}^q\colon g \text{ stetig}\}$ und $\|g\|_X := \max_{x\in\overline{U}} \|g(x)\|$ für $g \in X$. Dann ist $(X, \|\cdot\|_X)$ Banachraum; vgl. Beispiel 1 zu Satz 6.3.4. Weiter setzen wir

$$M := \left\{ g \in X\colon g(\xi) = \eta \text{ und } \|g(x) - \eta\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } x \in \overline{U} \right\}.$$

Dann ist $M \neq \emptyset$, da die konstante Funktion $g = \eta$ in M ist. Außerdem ist M abgeschlossen. Nach Satz 6.3.4 ist M also vollständig.

Wir betrachten jetzt die Funktion $T\colon M \to X$,

$$T(g)(x) := g(x) - A^{-1}(F(x, g(x))).$$

Wir werden zeigen:

(iv) Für $g, h \in M$ gilt $\|T(g) - T(h)\|_X \leq \frac{1}{2}\|g - h\|_X$.

(v) $T(M) \subset M$.

Der Banachsche Fixpunktsatz liefert nun $f \in M \subset C\Big(\overline{U}, \overline{U(\eta, \frac{1}{2}\varepsilon)}\Big)$ und damit $f \in C(U, V)$ mit $T(f) = f$. Daraus folgt $A^{-1}(F(x, f(x))) = 0$, also $F(x, f(x)) = 0$ für $x \in U$.

Zu (iv): Für $x \in \overline{U}$ betrachten wir $\phi^x\colon V \to \mathbb{R}^q$, $y \mapsto y - A^{-1}(F(x, y))$, also $\phi^x = \mathrm{id}_V - A^{-1} \circ F_2^x$. Es ist dann $\phi^x(g(x)) = T(g)(x)$ für $g \in M$.

Nach Kettenregel ist ϕ^x differenzierbar mit

$$D\phi^x(y) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^q} - A^{-1}\left(D_2F(x, y)\right).$$

Nach (ii) folgt $\|D\phi^x(y)\|_{L(\mathbb{R}^q,\mathbb{R}^q)} \leq \frac{1}{2}$ für $y \in V$. Nach Mittelwertungleichung (Satz 7.2.5) folgt

$$\|\phi^x(y_1) - \phi^x(y_2)\| \leq \sup_{y\in[y_1,y_2]} \|D\phi^x(y)\|_{L(\mathbb{R}^q,\mathbb{R}^q)} \|y_1 - y_2\|$$

für $y_1, y_2 \in V$, und damit

$$\|\phi^x(y_1) - \phi^x(y_2)\| \leq \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|,$$

und das gilt aus Stetigkeitsgründen sogar für für $y_1, y_2 \in \overline{V}$. Es folgt

$$\|T(g)(x) - T(h)(x)\| = \|\phi^x(g(x)) - \phi^x(h(x))\| \leq \frac{1}{2}\|g(x) - h(x)\|$$

für $g, h \in M$ und $x \in \overline{U}$ und damit (iv).

Zu (v): Für $g \in M$ und $x \in \overline{U}$ gilt mit (iv) und (iii)

$$\begin{aligned} \|T(g)(x) - \eta\| &\leq \|T(g)(x) - T(\eta)(x)\| + \|T(\eta)(x) - \eta\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|g(x) - \eta\| + \|A^{-1}(F(x, \eta))\| \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

und daraus folgt (v).

Wir haben also die Existenz einer Funktion $f \in C(U,V)$ mit $F(x,f(x))=0$ für $x \in U$ nachgewiesen. Zum Nachweis der Eindeutigkeit seien nun $x \in U$ und $y \in V$ mit $F(x,y)=0$. Dann ist $\phi^x(y)=y$ und damit

$$\|f(x)-y\| = \|\phi^x(f(x)) - \phi^x(y)\| \le \frac{1}{2}\|f(x)-y\|.$$

Hieraus folgt $\|f(x)-y\|=0$, also $f(x)=y$.

Um die Differenzierbarkeit von f in ξ zu zeigen, betrachtet man die Entwicklung

$$\begin{aligned} 0 &= 0-0 \\ &= F(x,f(x)) - F(\xi,\eta) \\ &= D_1F(\xi,\eta)(x-\xi) + D_2F(\xi,\eta)(f(x)-\eta) + \ldots, \end{aligned}$$

die wegen $f(\xi)=\eta$

$$f(x) - f(\xi) = -(D_2F(\xi,\eta))^{-1} \circ D_1F(\xi,\eta))(x-\xi) + \ldots$$

liefert. Die Differenzierbarkeit von f in ξ erhält man nun durch eine Analyse der hier nur durch $\ldots$ angedeuteten Restglieder. Die Differenzierbarkeit von f in einer Umgebung von ξ erhält man analog. (Dabei muss das im ersten Teil des Beweises gewählte δ eventuell noch verkleinert werden.) $\square$

Beispiel. Sei $G=\mathbb{R}$, $H=(0,\infty)^2 \subset \mathbb{R}^2$ und $F=(F_1,F_2)^T\colon G\times H \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x,y_1,y_2) = \begin{pmatrix} F_1(x,y_1,y_2) \\ F_2(x,y_1,y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\ln y_1 + y_1 e^{xy_2} - 1 \\ xe^{y_1} + \sqrt{y_1y_2} - y_2e^x \end{pmatrix}.$$

Es ist dann $F \in C^1(G\times H,\mathbb{R}^2)$ und $F(0,1,1)=0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \partial_2^* F(x,y_1,y_2) &= \begin{pmatrix} \partial_2F_1(x,y_1,y_2) & \partial_3F_1(x,y_1,y_2) \\ \partial_2F_2(x,y_1,y_2) & \partial_3F_2(x,y_1,y_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{x}{y_1} + e^{xy_2} & y_1xe^{xy_2} \\ xe^{y_1} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y_2}{y_1}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y_1}{y_2}} - e^x \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also

$$A := \partial_2^* F(0,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det A = -\frac{1}{2} \neq 0$ ist A invertierbar. Es gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert also eine Umgebung $U \subset G$ von 0 und eine Umgebung $V \subset H$ von $(1,1)$ sowie eine Funktion $f=(f_1,f_2)^T\colon U \to V$ mit $F(x,f_1(x),f_2(x))=0$ für alle $x\in U$. Wegen

$$\partial_1^* F(x,y_1,y_2) = \begin{pmatrix} \partial_1F_1(x,y_1,y_2) \\ \partial_1F_2(x,y_1,y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln y_1 + y_1y_2e^{xy_2} \\ e^{y_1} - y_2e^x \end{pmatrix}$$

ist

$$\partial_1^* F(0,1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ e-1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$f'(0) = -\partial_2^* F(0,1,1)^{-1} \partial_1^* F(0,1,1) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2e-3 \end{pmatrix}.$$

Satz 7.5.4. (Umkehrsatz) *Sei $G \subset \mathbb{R}^p$ offen, $f \in C^1(G, \mathbb{R}^p)$, $\alpha \in G$ und $Df(\alpha)$ invertierbar. Dann existieren offene Umgebungen $U \subset G$ von α und $V \subset \mathbb{R}^p$ von $\beta := f(\alpha)$, so dass $f\colon U \to V$ bijektiv ist (d.h., $f|_U$ ist injektiv und $V := f(U)$ ist eine offene Umgebung von β).*

Die Umkehrfunktion $g\colon V \to U$ von $f\colon U \to V$ ist stetig differenzierbar und es gilt $Dg(x) = Df(g(x))^{-1}$ für $x \in V$.

Beweis. Wir wenden den Satz über implizite Funktionen auf die Funktion

$$F\colon \mathbb{R}^p \times G \to \mathbb{R}^p, \quad F(x,y) = f(y) - x,$$

an. Es ist dann $F(\beta, \alpha) = 0$ und $D_2F(x,y) = Df(y)$, also $D_2F(\beta,\alpha) = Df(\alpha)$.

Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren offene Umgebungen W von α und V von β sowie eine Funktion $g \in C^1(V, W)$ mit $0 = F(x, g(x)) = f(g(x)) - x$ für $x \in V$, und $F(x,y) \neq 0$ falls $x \in V$, $y \in W$, $y \neq g(x)$.

Wegen $f(g(x)) - x = 0$ für $x \in V$ folgt, dass g injektiv ist. Mit $U := g(V)$ folgt also, dass $f\colon U \to V$ bijektiv mit Umkehrfunktion $g\colon V \to U$ ist.

Noch zu zeigen ist, dass U offen ist. Dazu zeigen wir zunächst, dass $U = f^{-1}(V) \cap W$ gilt. Sei dazu $y \in U$. Dann existiert $x \in V$ mit $y = g(x)$. Es folgt $f(y) = f(g(x)) = x \in V$, also $y \in f^{-1}(V)$, und wegen $U \subset W$ also $U \subset f^{-1}(V) \cap W$. Ist umgekehrt $y \in f^{-1}(V) \cap W$, so folgt $x := f(y) \in V$. Wegen $F(x,y) = f(y) - x = 0$ folgt $y = g(x) \in U$. Insgesamt erhalten wir $U = f^{-1}(V) \cap W$. Da f stetig und V offen ist, ist $f^{-1}(V)$ offen und damit auch $f^{-1}(V) \cap W$ offen.

Die Formel $Dg(x) = Df(g(x))^{-1}$ folgt aus dem Satz über implizite Funktionen – oder direkt aus der Kettenregel. □

Nach Linearer Algebra ist die Voraussetzung, dass $Df(\alpha)$ invertierbar sei, wieder äquivalent dazu, dass $\det J_f(\alpha) \neq 0$ gilt.

Der Satz ist nur lokal, d.h., auch wenn $Df(x)$ für alle $x \in G$ invertierbar ist, muss $f\colon G \to f(G)$ nicht bijektiv sein. Man betrachte etwa die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $f(z) = e^z$. In reeller Schreibweise haben wir

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$$

und damit

$$\det J_f(x,y) = \det \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} = e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{2x} \neq 0,$$

womit $Df(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ invertierbar ist. Andererseits gilt aber $f(0, 2\pi) = f(0,0)$, womit f nicht injektiv ist.

Definition 7.5.1. Seien (M, d_M) und (N, d_N) metrische Räume. Eine Abbildung $f\colon M \to N$ heißt *offen*, wenn $f(U)$ für jedes offene $U \subset M$ offen ist.

Man vergleiche diese Definition mit der durch Satz 6.4.3 gegebenen Charakterisierung der Stetigkeit. ("Urbilder offener Mengen sind offen.")

Eine Folgerung aus dem Umkehrsatz ist das folgende Resultat.

Satz 7.5.5. *Sei $G \subset \mathbb{R}^p$ offen, $f \in C^1(G, \mathbb{R}^p)$ und $Df(x)$ invertierbar für alle $x \in G$. Dann ist f offen.*

7.6 Extrema unter Nebenbedingungen

In §4.3.3 haben wir für $U \subset \mathbb{R}^p$ Funktionen $f\colon U \to \mathbb{R}$ auf lokale Extrema untersucht. Jetzt betrachten wir den Fall, dass zusätzlich noch eine Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}^q$ gegeben ist, und wollen lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ bestimmen, d.h., wir untersuchen $f|_{\{x \in U\colon g(x)=0\}} = f|_{g^{-1}(0)}$ auf lokale Extrema.

Beispiel. Man maximiere (oder minimiere) $f(x, y) = x + y$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Eine Methode besteht darin, die Gleichung $g(x, y) = 0$ nach y aufzulösen und das Resultat $y = h(x)$ in f einzusetzen, also das Extremum von $f^*(x) := f(x, h(x))$ zu bestimmen.

Im obigen *Beispiel* ist $h(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$ und $f^*(x) = x \pm \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$.

Der Nachteil dieser Methode ist, dass eine Auflösung der Gleichung $g(x, y)$ nach y (oder x) nicht immer möglich ist, oder die Auflösung oft kompliziert ist. Stattdessen werden wir jetzt den Satz über implizite Funktionen benutzen.

Satz 7.6.1. (Lagrangesche Multiplikatorenregel) *Sei $q < p$, $G \subset \mathbb{R}^p$ offen, $f \in C^1(G, \mathbb{R})$, $g \in C^1(G, \mathbb{R}^q)$, $\xi \in G$ und $g(\xi) = 0$. Die Funktion f habe in ξ ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g = 0$. Hat dann $Dg(\xi)$ Rang q, so existiert $\Lambda \in L(\mathbb{R}^q, \mathbb{R})$ mit $\Lambda \circ Dg(\xi) = Df(\xi)$.*

Ist $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ die Λ darstellende $(1 \times q)$-Matrix bezüglich der Standardbasis, so erhält die Gleichung $\Lambda \circ Dg(\xi) = Df(\xi)$ die Form

$$\operatorname{grad} f(\xi) = \lambda \cdot J_g(\xi),$$

mit $g = (g_1, \dots, g_q)^T$ also

$$\sum_{j=1}^{q} \lambda_j \partial_k g_j(\xi) = \partial_k f(\xi)$$

für $1 \leq k \leq p$. Die λ_j nennt man *Lagrangesche Multiplikatoren.*

Beweis von Satz 7.6.1. Nach der Voraussetzung über den Rang von $Dg(\xi)$ existieren q linear unabhängige Spalten in $J_g(\xi)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die letzten q Spalten linear unabhängig. Wir setzen nun $r := p - q$. Dann ist

$\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^q$ und f und g können als Abbildungen von $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^q$ nach $\mathbb{R}$ aufgefasst werden. Dementsprechend schreiben wir $x \in \mathbb{R}^p$ in der Form $x = (z, y)$ mit $z \in \mathbb{R}^r$ und $y \in \mathbb{R}^q$ und damit $f(z, y)$ bzw. $g(z, y)$ statt $f(x)$ bzw. $g(x)$. Wir definieren $D_1 f, D_2 f, D_1 g$ und $D_2 g$ wie zuvor.

Nach obiger Annahme über die Spalten von $J_g(\xi)$ ist dann $D_2 g(\xi)$ invertierbar. Setzen wir noch $\xi = (\zeta, \eta)$, so folgt mit dem Satz über implizite Funktionen, dass Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^r$ von ζ und $V \subset \mathbb{R}^q$ von η und eine Funktion $h \in C^1(U, V)$ existieren, so dass $h(\zeta) = \eta$ und $g(z, h(z)) = 0$ für $z \in U$. Damit ist in ζ ein lokales Extremum der durch $z \mapsto f(z, h(z))$ definierten Funktion $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$. Es folgt $D\varphi(\zeta) = 0$.

Nun ist (nach Kettenregel)

$$D\varphi(\zeta) = D_1 f(\zeta, \eta) + D_2 f(\zeta, \eta) \circ Dh(\zeta)$$

und (nach Satz über implizite Funktionen)

$$Dh(\zeta) = -D_2 g(\zeta, \eta)^{-1} \circ D_1 g(\zeta, \eta).$$

Es folgt

$$0 = D\varphi(\zeta) = D_1 f(\xi) - D_2 f(\xi) \circ D_2 g(\xi)^{-1} \circ D_1 g(\xi).$$

Mit $\Lambda := D_2 f(\xi) \circ D_2 g(\xi)^{-1}$ folgt also $D_1 f(\xi) = \Lambda \circ D_1 g(\xi)$. Trivialerweise ist auch $D_2 f(\xi) = \Lambda \circ D_2 g(\xi)$. Es folgt $Df(\xi) = \Lambda \circ Dg(\xi)$. □

Beispiel 1. Es seien f und g wie in dem vor Satz 7.6.1 betrachteten Beispiel, also

$$f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x + y, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Man bestimme das Maximum und Minimum von f unter der Nebenbedingung $g = 0$. (Die Existenz von Maximum und Minimum folgt, da f stetig und $g^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon g(x, y) = 0\}$ kompakt.

Es sind $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (1, 1) \quad \text{und} \quad \operatorname{grad} g(x, y) = (2x, 2y).$$

Aus $\operatorname{grad} g(x, y) = (0, 0)$ folgt $(x, y) = (0, 0)$. Da aber $g(0, 0) = -1 \neq 0$, ist die Voraussetzung über den Rang von Dg in allen Punkte von $g^{-1}(0)$ erfüllt.

Wir betrachten die Gleichung

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \lambda \operatorname{grad} g(x, y),$$

also

$$(1, 1) = \lambda(2x, 2y).$$

Es folgt $\lambda \neq 0$ und damit $x = y$. Zusammen mit $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ erhalten wir $(x, y) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) =: \xi_1$ oder $(x, y) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) =: \xi_2$. Es folgt, dass f sein Maximum $\sqrt{2}$ in ξ_1 und sein Minimum $-\sqrt{2}$ in ξ_2 annimmt.

Beispiel 2. Man maximiere das Volumen einer Konservendose bei konstanter Oberfläche, das heißt, man maximiere

$$V(r,h) := \pi r^2 h$$

unter der Nebenbedingung

$$g(r,h) := 2\pi r^2 + 2\pi r h - F = 0,$$

wobei F eine gegebene positive Konstante ist. Hierbei sind $V, g\colon (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$.

Zunächst ist wegen $2\pi r^2 < F$ für $g(r,h) = 0$ die Menge aller $r > 0$, für die ein $h > 0$ mit $g(r,h) = 0$ existiert, beschränkt. Damit gilt $V(r,h) \to 0$ für $h \to 0$ (und $g(r,h) = 0$). Außerdem gilt für $g(r,h) = 0$ auch $2\pi rh < F$ und damit $r < F/2\pi h$, also $V(r,h) < \pi h F^2/(4\pi^2 h^2) = F^2/4\pi h$. Es folgt $V(r,h) \to 0$ für $h \to \infty$ (und $g(r,h) = 0$). Zusammen mit der Stetigkeit von V folgt aus diesen Überlegungen, dass das gesuchte Maximum existiert.

Es gilt nun $V, g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit

$$\operatorname{grad} V(r,h) = (2\pi rh, \pi r^2) \quad \text{und} \quad \operatorname{grad} g(r,h) = (4\pi r + 2\pi h, 2\pi r).$$

Aus $\operatorname{grad} g(r,h) = (0,0)$ folgt $(r,h) = (0,0)$. Da $(0,0)$ nicht im Definitionsbereich von g liegt, ist die Voraussetzung über den Rang von Dg wieder in allen Punkte von $g^{-1}(0)$ erfüllt. (Auch wenn man g und F im Definitionsbereich $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ betrachten würde, wäre die Voraussetzung über den Rang von Dg wegen $g(0,0) = -F \neq 0$ in allen Punkte von $g^{-1}(0)$ erfüllt.) Die Gleichung

$$\operatorname{grad} V(r,h) = \lambda \operatorname{grad} g(r,h)$$

hat jetzt die Form

$$\begin{aligned} 2\pi rh &= \lambda\,(4\pi r + 2\pi h), \\ \pi r^2 &= \lambda\, 2\pi r. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $\lambda = \frac{1}{2}r$ und Einsetzen in die erste liefert $2\pi rh = \frac{1}{2}r(4\pi r + 2\pi h) = 2\pi r^2 + \pi rh$ und damit $rh = 2r^2$, also $h = 2r$.

Bemerkung. In Beispiel 2 kann man natürlich auch die Nebenbedingung $g(r,h) = 0$ nach h auflösen und erhält

$$h = \alpha(r) := \frac{F - 2\pi r^2}{2\pi r}.$$

Man hat dann

$$\beta(r) := V(r, \alpha(r)) = \pi r^2 \frac{F - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{1}{2}Fr - \pi r^3$$

zu maximieren. Aus

$$\beta'(r) = \frac{1}{2}F - 3\pi r^2$$

folgt, dass β sein Maximum bei

$$r = r_0 := \sqrt{\frac{F}{6\pi}}$$

annimmt. Der zugehörige Wert von h ist durch

$$h_0 := \alpha(r_0) = \frac{F - 2\pi r_0^2}{2\pi r_0} = \cdots = 2\sqrt{\frac{F}{6\pi}}$$

gegeben.

Die interessante Aussage in diesem Beispiel ist, dass das Maximum für $h = 2r$ angenommen wird. Diese erhält man mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren direkt. Durch das Auflösen der Nebenbedingung nach einer Variablen erhält man zunächst die eher uninteressante Aussage, wie sich an der Stelle, wo das Maximum angenommen wird, r und h aus F berechnen lassen, und man kann die Bedingung $r = 2h$ dann erst durch Elimination von F daraus gewinnen.