Übungen zur Analysis I
Blatt 9

33. Sei $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$. Zeige, dass die Doppelreihe

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{(m^2+n^2)^s}$$

absolut konvergent ist. Was passiert für $s = 1$?

34. Man bestimme die folgenden Grenzwerte, sofern sie existieren:

i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - x^2 - x - 2}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{2x}$,

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{\dfrac{9}{x^4} - \dfrac{3}{x^2} - 1} - \dfrac{3}{x^2} \right)$.

35. Sei $f : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & x = 0 \end{array} \right\} .$$

Zeige unmittelbar mittels der Definition der Stetigkeit, dass f in $x_0 = 0$ stetig ist.

36*. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ monoton fallend und $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konvergiere.
Zeige, dass $\lim\limits_{x\to\infty} n\, x_n$ existiert und gleich 0 ist. Zeige ferner durch ein Beispiel, dass dies i.a. falsch ist, wenn die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_+$ nicht monoton fallend ist.

Abgabe der Übungen bis Mittwoch, den 9.01.2013, 8:15 Uhr im Schrein.
(2-Fach-BA-Studierende *müssen* Aufgabe 32* nicht bearbeiten.)

$\ast\ \ast\ \ast$ ***Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr 2013!*** $\ast\ \ast\ \ast$