Übungen zur Analysis I
Blatt 7

25. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$x_n := \frac{n^2 + \sqrt{n} + 1}{4n^2 + 1 + \frac{1}{n}}, \qquad y_n := \frac{(3+n^2)^2(1+n)}{(1+\sqrt{2}\,n)^5}, \qquad z_n := \sqrt{9^n + 3^n} - \sqrt{9^n}.$$

Man zeige mittels der Rechenregeln für konvergente Folgen, dass die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =: x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n =: y$ existieren und bestimme x und y. Existiert auch $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$, und wenn ja, welches ist der Grenzwert?

26. Sei $c > 0$ und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ induktiv definiert durch

$$x_1 := \sqrt{c}, \qquad x_{n+1} := \sqrt{c + x_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zeige:

(a) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n < 1 + \sqrt{c}$.

(c) Die Folge konvergiert. Bestimme den Grenzwert.

27. Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Zeige:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n.$$

Finde ein Beispiel dafür, dass hier i.a. nicht das Gleichheitszeichen gilt.
Sei $z_n := \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$, $n \in \mathbb{N}$. Berechne $\underline{\lim}_{n\to\infty} z_n$ und $\overline{\lim}_{n\to\infty} z_n$.

28*. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ eine gegen $x \in \mathbb{K}$ konvergente Folge, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Sei $y_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j$. Zeige: Die Folge der arithmetischen Mittel $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert ebenfalls, und zwar auch gegen x.

Abgabe der Übungen bis Mittwoch, den 12.12.2012, 8:15 Uhr im Schrein.
(2-Fach-BA-Studierende *müssen* Aufgabe 28* nicht bearbeiten.)