# Übungen zur Analysis I
## Blatt 6

21. Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$; $x, y \in \mathbb{K}$. Zeige

    (a) $x_n y_n \to xy$.

    (b) Ist $y \neq 0$, gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $y_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ und $x_n/y_n \to x/y$.

22. Sei $x_1 := 1$ und $x_{n+1} := \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n}$, $n \in \mathbb{N}$ induktiv definiert. Zeige:

    (a) Für alle $n \geq 2$ ist $x_n > \sqrt{2}$ und es gilt

    $$(x_{n+1} - \sqrt{2}) \leq \frac{1}{2}\,(x_n - \sqrt{2})^2.$$

    (b) Beweise mittels der Definition der Folgenkonvergenz, dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$ ist.

    Tip: Bringe $x_n - \sqrt{2}$ auf Hauptnennerform.

23. Seien $U_i \subset \mathbb{K}$ offene Mengen für $i \in I$. Zeige: $\bigcup\limits_{i\in I} O_i$ ist offen.

    Ferner: Ist $I$ eine endliche Menge, ist auch $\bigcap\limits_{i\in I} O_i$ offen.

    Zeige ferner für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, dass $[a, b]$ als Menge abgeschlossen in $\mathbb{R}$ ist.

24*. Zeige: Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k}\frac{n+1-i}{n} \leq \frac{1}{k!}.$$

Zeige damit, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq 3.$$

Abgabe der Übungen bis Mittwoch, den 05.12.2012, 8:15 Uhr im Schrein.
(2-Fach-BA-Studierende *müssen* Aufgabe 24* nicht bearbeiten.)