Übungen zur Analysis I
Blatt 5

17. Definiere induktiv die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$a_0 := 0, \quad a_1 := \frac{3}{2}, \quad a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Durch Betrachtung der ersten Folgenglieder komme man zu einer Vermutung für eine explizite Formel für a_n, $a_n = f(n)$. Man beweise sodann diese Vermutung durch vollständige Induktion.

18. (a) Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Man zeige die *Parallelogrammidentität*

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

Woher kommt wohl der Name Parallelogrammidentität?

(b) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(z) \neq 0$. Zeige: $z + |z| \neq 0$ und $w := \sqrt{|z|}\,\dfrac{z + |z|}{|z + |z||}$ löst die Gleichung $w^2 = z$ (Existenz von Wurzeln in $\mathbb{C}$).

19. Seien $A := \left\{(-1)^m - \dfrac{1}{4n} \mid m, n \in \mathbb{N}\right\}$ und $B := \left\{\dfrac{n^2}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.
Bestimme $\inf A$, $\sup A$ und $\inf B$, $\sup B$ (mit Beweisen).
Berechne ferner $\inf(A \cup B)$.

20*. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine streng monoton wachsende Abbildung, d.h. für alle $x, y \in [a, b]$ gelte

$$x < y \;\Rightarrow\; f(x) < f(y).$$

Zeige: f besitzt einen Fixpunkt, d.h. es gibt $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$.

Tip: Untersuche $c = \inf\{x \in [a, b] \mid f(x) \leq x\}$ und betrachte die Fälle $c = a$, $c = b$, $a < c < b$.

Abgabe der Übungen bis Mittwoch, den 28.11.2012, 8:15 Uhr im Schrein.
(2-Fach-BA-Studierende *müssen* Aufgabe 20* nicht bearbeiten.)