Übungen zur Analysis I
Blatt 4

13. (a) Zeige durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \; .$$

(b) Finde die kleinste natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt: $n^3 < 2^n$. Beweise dies dann mittels vollständiger Induktion.

14. Bestimme diejenigen natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$, für die die Ungleichung

$$n! \leq (n/2)^n$$

gilt. Beweise diese Ungleichung dann mittels vollständiger Induktion.

Tip: Beim Induktionsschritt könnte man die Bernoulli-Ungleichung auf $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ anwenden.

15. Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nach unten beschränkte nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ und sei $c \in \mathbb{R}$ gegeben, so dass $c \leq M$ ist. Zeige:

$$c = \inf M \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{x\in M} \quad c \leq x < c+\varepsilon .$$

16*. Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkte nicht-leere Teilmengen von M.
Seien $A + B := \{a + b |\ a \in A,\ b \in B\}$ und $A \cdot B := \{a \cdot b |\ a \in A,\ b \in B\}$.
Zeige:

(a) $A + B$ ist nach oben beschränkt und $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

(b) Gilt auch $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$?

(c) Bestimme die Mengen $A + B$ und $A \cdot B$ für $A = [-3, 2)$ und $B = (-2, 1]$ sowie das Supremum und das Infimum von $A + B$ und $A \cdot B$. Welche dieser Werte sind auch ein Maximum bzw. ein Minimum?

Abgabe der Übungen bis Mittwoch, den 21.11.2012, 8:15 Uhr im Schrein.
(2-Fach-BA-Studierende *müssen* Aufgabe 16* nicht bearbeiten.)