ANALYSIS II

Prof. König, SS 2013

Literatur

[1] O. Forster; Analysis II, III, Vieweg

[2] W. Walter; Analysis II, Springer HTB

[3] H. Heuser; Lehrbuch der Analysis II, Teubner

[4] M. Barner, M. Flohr; Analysis II, de Gruyter

[5] H. Amann, J. Escher; Analysis II, Birkhäuser

[6] W. Kaballo; Einführung in die Analysis I, II, Spektrum

[7] S. Lang; Analysis, Addison Wesley

[8] J. Dieudonné; Foundations of Modern Analysis, Academic Press

Inhaltsverzeichnis

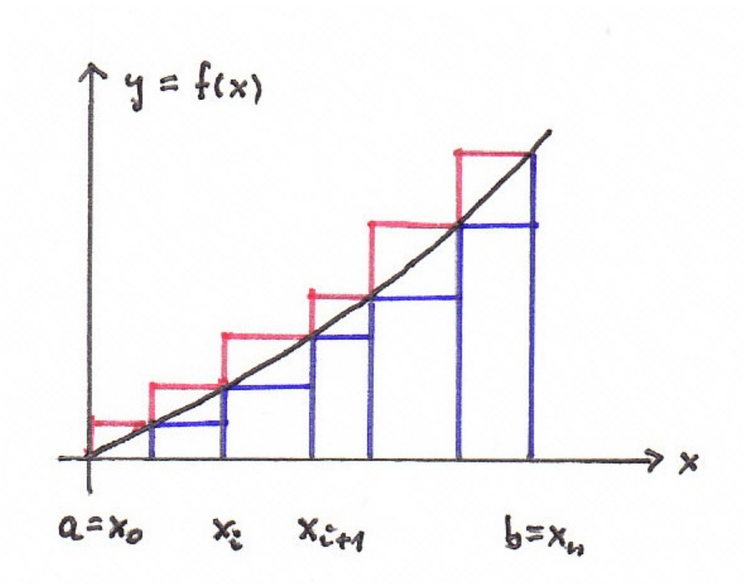
In dieser Vorlesung behandeln wir zunächst die Integralrechnung für Funktionen einer Variablen: wie berechnet man Flächen unter dem Graph einer gegebenen Funktion? Der Hauptsatz zeigt, dass Differentiation und Integration zueinander inverse Probleme sind. Wir werden auch verschiedene Integrationstechniken kennenlernen.

Im zweiten Teil der Vorlesung wenden wir uns der Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher zu, die für viele praktische Anwendungen essentiell ist; so würde etwa die Geschwindigkeit eines Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit durch eine Funktion $v : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(x,t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto v(x,t) \in \mathbb{R}^3$, modelliert. Dazu muss zunächst ein geeigneter Abstandsbegriff im $\mathbb{R}^n$ eingeführt werden, damit man Konvergenz und Stetigkeit für solche Funktionen über kleine Umgebungen von Punkten definieren kann. Das führt zu den Begriffen des normierten und allgemeiner des metrischen Raumes. Der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kann als Fläche im $\mathbb{R}^3$ visualisiert werden. Ist $x_0 \in \mathbb{R}^2$ und $P = (x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt dieser als glatt angenommenen Fläche, kann man diese nahe P durch durch die Tangentialebene in P_0 annähern. Die Tangentialebene wird durch zwei Richtungsvektoren $\left(x_0, \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\right)$ und $\left(x_0, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)\right)$ aufgespannt, wobei die „partiellen Ableitungen" $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ das Änderungsverhalten von Kurven in der Fläche in den Koordinantenrichtungen x_i beschreiben. Wir untersuchen dann allgemein die Differentiation für Funktionen zwischen vollständigen normierten Räumen, analog zum Vorgehen in $\mathbb{R}$. Wir zeigen Versionen des Mittelwertsatzes, der Taylorschen Formel und studieren Extremwertprobleme für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

5 Integralrechnung (Riemann-Integral)

Schon im Altertum versuchte man, den Flächeninhalt krummrandig begrenzter Gebiete durch Approximation von außen bzw. von innen zu bestimmen. Dies geschieht durch die Berechnung des Flächeninhalts unterhalb von Treppenfunktionen, die die Funktion annähern. Die daraus im 17. Jahrhundert entstandene Integralrechnung ist die Umkehrung der Differentiation.

5.1 Archimedes' Ausschöpfungsmethode



Sei F die Fläche zwischen x-Achse, der Geraden $x = a$ und der Parabel $y = x^2$. Wir illustrieren Archimedes' Methode hieran (er berechnete auch Volumina, etwa der Kugel). Wir wählen $a = 0$ und benutzen die Zerlegung von $[0, b]$ in äquidistante Intervalle durch Punkte $x_i = \dfrac{i}{n}\, b$ $(i = 0, \cdots, n)$ für große $n \in \mathbb{N}$.

$$|F| \begin{cases} \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{b}{n}\, f(x_i) & = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{b}{n} \left(\frac{ib}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum\limits_{i=1}^{n} i^2 \\ \geq \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{b}{n}\, f(x_{i-1}) & = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{b}{n} \left(\frac{ib}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum\limits_{i=1}^{n-1} i^2 \end{cases}$$

Also $|F| = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} i^2/n^3 \right) b^3$, falls der Grenzwert existiert. Da

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} i^2/n^3 \right) = 1/3,$$

finden wir $|F| = b^3/3$. Als Funktion der oberen Grenze $x = b$ ist

$$|F|(x) = x^3/3 \;,\; |F|'(x) = x^2!$$

Dass dies eine allgemeine Beziehung zwischen Funktionen und der zugehörigen Fläche unter den Graphen ist, erkannten Newton und Leibniz zwischen 1666 und 1680.

5.2 Riemann-Integrierbarkeit

Im Folgenden sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir untersuchen zunächst, wann man dem Gebiet unter dem Graphen von f sinnvoll einen Flächeninhalt zuordnen kann.

Definition. *(i) $Z = \{x_0, \cdots, x_n\}$ heißt* ***Zerlegung*** *von I $:\Leftrightarrow a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ heißt* ***k-tes Teilintervall*** *von Z und $|I_k| := x_k - x_{k-1}$ die* ***Länge*** *von I_k.*
$|Z| := \max\limits_{1\le k\le n} |I_k|$ nennt man ***Feinheit*** *von Z. Wir schreiben auch $\sharp Z := n$.*
(ii) Seien Z_1, Z_2 Zerlegungen von I. Z_1 ist ***feiner als*** *Z_2 $:\Leftrightarrow Z_1 \supset Z_2$ mengenmäßig.*

Wir approximieren den Flächeninhalt unter dem Graphen von f durch Ober-, Unter- und Riemann-Summen. Dabei wird f auf I_k durch $\sup\limits_{I_k} f,\ \inf\limits_{I_k} f$ ersetzt, und es ergibt sich eine „Treppenfunktions-Approximation" von f.

Definition. *Sei Z eine Zerlegung von I. Seien*

$$m_k := \inf\{f(x)\ |x \in I_k\}, \quad M_k := \sup\{f(x)\ |x \in I_k\}.$$

Dann heißen $\underline{S}(Z) = \sum_{k=1}^{n} m_k\,|I_k|$ und $\overline{S}(Z) = \sum_{k=1}^{n} M_k\,|I_k|$ ***Unter- und Obersumme von f zu Z.***

Offensichtlich ist $\underline{S}(Z) \le \overline{S}(Z)$.

Definition. *$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup\limits_{Z} \underline{S}(Z)$ heißt* ***Unterintegral*** *von f.*
$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf\limits_{Z} \overline{S}(Z)$ heißt ***Oberintegral*** *von f.*

Definition. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar (R-integrierbar) $:\Leftrightarrow$ $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx =: \int_a^b f(x)dx$. In diesem Fall heißt $\int_a^b f(x)dx$ das* ***Riemann-Integral über*** *I.*

Es gilt: Falls f integrierbar ist, ist f beschränkt ($\sup\limits_{I_k}$, $\inf\limits_{I_k}$ wären sonst $\pm\infty$).

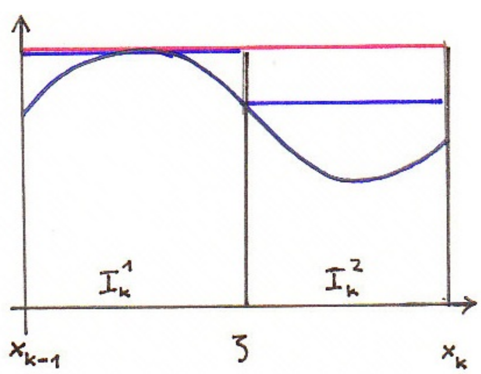
Lemma. *Seien Z, Z' Zerlegungen von I und sei Z' feiner als Z, $f : I \to \mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$\underline{S}(Z) \leq \underline{S}(Z') \leq \overline{S}(Z') \leq \overline{S}(Z).$$

Beweisidee. Z.z. nur $\overline{S}(Z') \leq \overline{S}(Z)$. Durch induktives Vorgehen kann man o.B.d.A. annehmen, dass $\sharp Z' = \sharp Z + 1$ ist. Ein Intervall I_k von Z wird in Z' neu unterteilt; der weitere Punkt sei ζ. Sei $I_k := [x_{k-1}, x_k]$, $I_k^1 := [x_{k-1}, \zeta]$, $I_k^2 := [\zeta, x_k]$. Dann gilt

$$\overline{S}(Z) - \underline{S}(Z) = (x_k - x_{k-1}) \sup_{I_k} f(x) - (\zeta - x_{k-1}) \sup_{I_k^1} f(x) - (x_k - x_{k-1}) \sup_{I_k^2} f(x).$$

Da $\sup\limits_{I_k^j} f(x) \leq \sup\limits_{I_k} f(x)$, $j \in \{1, 2\}$ und $(x_k - x_{k-1}) = (x_k - \zeta) + (\zeta - x_{k-1})$, ist dies größer gleich Null. (Im Bild ist $\sup\limits_{I_k^2} f(x) < \sup\limits_{I_k} f(x)$.)



□

Folgerung: Es gilt stets $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \ \leq \ \int_a^b f(x)dx$.

Riemannsches Integrierbarkeitskriterium. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann folgt:

$$(f \ R\text{-integrierbar} \ \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} \ \ \exists_{\text{Zerlegung } Z} \ \ \overline{S}(Z) - \underline{S}(Z) < \varepsilon.)$$

Beweis. „$\Leftarrow$" $0 \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \leq \overline{S}(Z) - \underline{S}(Z) < \varepsilon.$

„$\Rightarrow$" Sei f R-integrierbar und $\varepsilon > 0$. Nach der Definition von Supremum und Infimum gibt es Zerlegungen Z_1, Z_2 von I mit

$$\overline{S}(Z_1) \leq \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} \leq \underline{S}(Z_2).$$

Sei $Z := Z_1 \cup Z_2$. Dann ist Z feiner als Z_1 oder Z_2. Nach obigem Lemma ist

$$\overline{S}(Z) - \underline{S}(Z) \leq \overline{S}(Z_1) - \underline{S}(Z_2) < \varepsilon.$$

□

5.3 Beispiele für integrierbare Funktionen

Sei $I := [a,b],\ f : I \to \mathbb{R}$.

1. $f(x) = 1:\ \underline{S}(Z) = \overline{S}(Z) = b - a$ unabhängig von Z, $\displaystyle\int_a^b 1\,dx = b - a$.

2. $f(x) = \begin{Bmatrix} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{Bmatrix}$: $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R} \Rightarrow \forall$ Zerlegungen Z gilt $\underline{S}(Z) = 0$ und $\overline{S}(Z) = 1$: f ist **nicht** integrierbar.

3. **Satz 1.** *Sei f stetig. Dann ist f R-integrierbar.*

   Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da f nach 3.8. auf dem kompakten Intervall I **gleichmäßig** stetig ist, gibt es $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mit: $\forall\, x_1, x_2 \in I\ \left(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}\right)$.

   Sei $Z = \{x_0, \cdots, x_n\}$ eine Zerlegung von I mit Feinheit $|Z| < \delta$. Da f stetig ist, nimmt $f|_{I_k}$ sein Maximum und sein Minimum an (nach Satz 3.7). Es gibt also $\overline{\zeta_k}, \underline{\zeta_k} \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$ mit: $M_k = f(\overline{\zeta_k})$, $m_k = f(\underline{\zeta_k})$. Also gilt

   $$\begin{aligned} \overline{S}(Z) - \underline{S}(Z) &= \textstyle\sum_{k=1}^n (M_k - m_k)\,|I_k| \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n (f(\overline{\zeta_k}) - f(\underline{\zeta_k}))|I_k| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{b-a}\ \textstyle\sum_{k=1}^n |I_k| = \varepsilon, \end{aligned}$$

   mit $\sum_{k=1}^n |I_k| = |I| = b - a$ und $|\overline{\zeta_k} - \underline{\zeta_k}| \leq |I_k| \leq |Z| < \delta$. □

4. **Satz 2.** Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt und monoton. Dann ist f R-integrierbar.

   Beweis. Sei f o.B.d.A. monoton **wachsend**, $f(a) < f(b)$. Sei Z eine Zerlegung von I. Dann ist

   $$\begin{aligned} \overline{S}(Z) - \underline{S}(Z) &= \textstyle\sum_{k=1}^n (M_k - m_k)|I_k| \leq |Z|\ \textstyle\sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \\ &= |Z|\ (f(b) - f(a)), \end{aligned}$$

   denn die Suprema und Infima auf I_k werden in den Endpunkten von I_k angenommen. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta := \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Ist dann $|Z| < \delta$, folgt

   $$\overline{S}(Z) - \underline{S}(Z) < \varepsilon.$$

   □

   Auf Lebesgue geht folgender Satz zurück (Heuser S. 473):

5. **Satz.** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt und $\{x \in [a,b] |\ f$ ist unstetig in $x\}$ sei höchstens abzählbar. Dann ist f R-integrierbar.

5.4 Riemann-Summen

Statt $m_k = \inf_{I_k} f$, $M_k = \sup_{I_k} f$ zu nehmen, könnte man auch Werte $f(\zeta_k)$ mit $\zeta_k \in I_k$ nehmen. Das ergibt Riemann-Summen:

Definition. *$Z = \{x_0 < \cdots < x_n\}$ Zerlegung von I, $\zeta_k \in [x_{k-1}, x_k] = I_k$, $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$. Dann heißt $S(Z, \zeta) := \sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)|I_k|$ Riemann-Summe von f zu (Z, ζ).*

Die R-Integrierbarkeit kann man auch dadurch charakterisieren, dass sich alle Riemann-Summen für kleine $|Z|$ beliebig genau dem Integralwert annähern, unabhängig von ζ.

Satz 1. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$. Dann gilt: (f ist R-integrierbar $\Leftrightarrow$ $\exists S \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall Z$ Zerlegung von I, $|Z| < \delta$, $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ wie oben $\quad |S(Z, \zeta) - S| < \varepsilon$).*

Man hat dann $S = \int\limits_a^b f(x)\, dx$.

Beweis. Siehe Heuser. Man muss im Wesentlichen zeigen:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, |Z| < \delta \begin{cases} 0 & \leq \overline{S}(z) - \int_a^b f(x)\, dx < \varepsilon \\ 0 & \leq \int_a^b f(x)\, dx - \underline{S}(z) < \varepsilon\, . \end{cases}$$

$\square$

Für die Berechnung reichen abzählbar viele Zerlegungen:

Satz 2. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ R-integrierbar und seien Z^m Zerlegungen von I mit Feinheiten $|Z^m| \to 0$ ($m \to \infty$). Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{m \to \infty} S(Z^m, \zeta^m)$$

(der Limes existiert für beliebige Wahlen von ζ^m zu Z^m).

Wir beweisen diese Sätze nicht; wir arbeiten nur mit Ober- und Untersummen.

5.5 Integrations-Rechenregeln

Satz 1. *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ integrierbar, $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) $f \pm g$ und $c \cdot f$ sind integrierbar mit $\int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g$, $\quad \int_a^b cf = c \int_a^b f$.

(b) Falls ($\forall\, x \in I \quad f(x) \leq g(x)$) gilt, so ist auch $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Bemerkung: Also: $\displaystyle\int_a^b : \{f : [a,b] \to \mathbb{K} \mid f \text{ integrierbare Funktion}\} \to \mathbb{R}$ ist eine **lineare** Abbildung.
Der **Beweis** wird auf Ober- und Untersummen-Addition zurückgeführt, unter Benutzung von

$$\inf_{I_k} f + \inf_{I_k} g \leq \inf_{I_k} (f+g) \leq \sup_{I_k} (f+g) \leq \sup_{I_k} f + \sup_{I_k} g.$$

Definition. *Für $f : I \to \mathbb{R}$ sind $f^+(x) = \max(f(x), 0)$, $\quad f^-(x) = -\min(f(x), 0)$ der* ***positive und der negative Anteil von*** f.
Es gilt $f = f^+ - f^-$, $\quad |f| = f^+ + f^-$.

Bemerkung. Ist $|f|$ integrierbar, so ist im Allgemeinen f nicht integrierbar.
Beispiel: $f = 2\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} - 1$. Aber:

Satz 2. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann sind auch $f^+, f^-, |f|$ integrierbar und es gilt:*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq (b-a)\sup_{x\in I}|f(x)| \qquad (I = [a,b]).$$

Beweis. Sei Z eine Zerlegung von I und seien $m_k^+ = \inf\limits_{I_k} f^+$, $\quad M_k^+ = \sup\limits_{I_k} f^+$. Man findet durch Unterscheidung von 3 Fällen, dass $M_k^+ - m_k^+ \leq M_k - m_k$ gilt.
Multiplikation mit $|I_k|$ und Summation $\sum\limits_{k=1}^{n}$ liefert

$$\overline{S}(Z, f^+) - \underline{S}(Z, f^+) \leq \overline{S}(Z, f) - \underline{S}(Z, f).$$

Mit dem Riemannschen Integrierbarkeitskriterium folgt, dass f^+ integrierbar ist. Analog ist auch f^- integrierbar.
Es folgt: auch $|f| = f^+ + f^-$ ist integrierbar.
Da $|f(x)| \leq \sup\limits_{x\in I} |f(x)| \cdot 1$, folgt die letzte Ungleichung aus Satz 1, (b).
Ferner gilt: $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx \geq \pm\left(\int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx\right) = \pm\int_a^b f(x)dx.$ $\square$

Satz 3. *Seien $f, g : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist auch $f \cdot g$ integrierbar und, falls $\inf\limits_{x\in I} |g(x)| \geq c > 0$ gilt, ist auch f/g integrierbar über I.*

Definition. *Für $b < a$ setzen wir $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$. Ferner sei*
$\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

Satz 4. *(i) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und sei $[c,d] \subseteq [a,b]$. Dann ist $f|_{[c,d]}$ integrierbar.*

(ii) Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f : [b,c] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist auch $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ integrierbar und es gilt:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Die Formel gilt für a, b, c in beliebiger Lage.

Bemerkung. Mit f, g sind auch $\max(f,g)$ und $\min(f,g)$ integrierbar, da z.B. $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ ist.

5.6 Stammfunktionen

Definition. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt* ***Stammfunktion*** *oder* ***unbestimmtes Integral*** *von $f :\Leftrightarrow \forall\ x \in I \quad F'(x) = f(x)$.*

Sind F_1, F_2 zwei Stammfunktionen von f, gilt $(F_1 - F_2)' = 0$, also $F_1 - F_2 = c$ konstant.
Schreibweise: $F(x) = \int f(x)\,dx + c$.
Beachte: F hat zunächst noch nichts mit dem „bestimmten" Integral von f über I zu tun. Die Verbindung zwischen beiden Begriffen erfolgt durch den Hauptsatz der Differential- und Integral-Rechnung. Im Allgemeinen fallen die Funktionen mit Stammfunktion auch **nicht** mit den R-integrierbaren Funktionen zusammen:

Beispiele.

(1) Es gibt eine Riemann-integrierbare Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, die keine Stammfunktion F hat:
Sei $f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} -1 & x \in [-1,0) \\ 1 & x \in [0,1] \end{array} \right\}$. Angenommen, es gäbe eine differenzierbare Funktion $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$. O.B.d.A. sei $F(0) = 0$. Da $F' = f$, ist F streng monoton fallend (wachsend) auf $[-1,0)$ (bzw. $(0,1]$). Es sei o.B.d.A. $F(1) \geq F(-1) > 0 = F(0)$. Da F stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein ξ, $0 < \xi \leq 1$, mit $F(\xi) = F(-1) > 0$. Nach dem Mittelwertsatz ist $0 = F(\xi) - F(-1) = F'(y)(\xi + 1) = \pm(1 + \xi)$ für ein geeignetes $y \in (-1, \xi)$. Das ist ein Widerspruch.

(2) Es gibt eine nicht-Riemann-integrierbare Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, die eine Stammfunktion F hat:
Sei $F(x) = \left\{ \begin{array}{cc} x^2 \cos \frac{\pi}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{array} \right\}$. Dann ist F differenzierbar auf $[-1,1]$ mit
$f(x) := F'(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 2x \cos \frac{\pi}{x^2} + \frac{2\pi}{x} \sin \frac{\pi}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{array} \right\}$. Aber F ist unbeschränkt, also nicht R-integrierbar.

Das Beispiel (1) funktioniert nur, da f unstetig ist. Stetige Funktionen haben stets eine Stammfunktion (5.7). Man hat also die Implikationskette

$$
f \text{ differenzierbar } \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f \text{ stetig } \left\{ \begin{array}{lll} \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} & f \text{ integrierbar} & \text{(„hat bestimmtes Integral")} \\ & \quad \not\Downarrow \qquad \not\Uparrow & \\ \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} & f \text{ hat Stammfunktion} & \text{(„hat unbestimmtes Integral")} \end{array} \right.
$$

5.7 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

HAUPTSATZ.

(a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \big(=: F(x)|_a^b = [F(x)]_a^b\big)$$

(b) Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar und besitzt eine Stammfunktion $F : F(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ erfüllt $F'(x) = f(x)$.

Bemerkung. Teil (a) ist für die praktische Berechnung von Flächen und Integralen von immenser Bedeutung; Teil (b) ist von theoretischem Interesse, da die Gegenbeispiele aus 5.6. so ausgeschlossen werden (durch die **Stetigkeit** von f).

Beweis. (a) Sei $\varepsilon > 0$ und sei Z eine Zerlegung von $[a, b]$ mit

$$\int_a^b f(t)\,dt - \varepsilon < \underline{S}(Z) \leq \overline{S}(Z) < \int_a^b f(t)\,dt + \varepsilon$$

(gemäß des Riemannschen Integrierbarkeitskriteriums $\overline{S} - \underline{S} < \varepsilon$,

$\overline{S} - \varepsilon \;\leq\; \underline{S} \;\leq\; \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leq\; \overline{S} \;\leq\; \underline{S} + \varepsilon.$)

Mit $Z = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ ist $F(b) - F(a) = \displaystyle\sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1}))$.

Die Anwendung des Mittelwertsatzes auf $F|_{I_k}$ liefert Punkte $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ mit

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_k)|I_k|.$$

Also

$$m_k|I_k| \leq F(x_k) - F(x_{k-1}) \leq M_k|I_k|.$$

Die Summation ergibt

$$\int_a^b f(t)\,dt - \varepsilon \;\leq\; \underline{S}(Z) \;\leq\; F(b) - F(a) \leq\; \overline{S}(Z) \;\leq \int_a^b f(t)\,dt + \varepsilon.$$

Daher ist $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

(b) Wir zeigen: $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ ist Stammfunktion von f, d.h. $F' = f$.

Für $x \neq x_0$ ist

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))dt.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da f stetig ist, gibt es $\delta > 0$ mit:

$$\forall\ t \in [a, b] \cap [x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]\ \Rightarrow\ |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Also folgt:

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|dt \leq \varepsilon\, \frac{|x - x_0|}{|x - x_0|} = \varepsilon,$$

sofern $|x - x_0| < \delta$ (dann ist auch $|t - x_0| < \delta$).

Bildet man den Limes für $x \to x_0$, folgt

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

$\square$

Bemerkung. Der Name „Unbestimmtes Integral” für F rührt von Teil (a) her.
Notation: $F = \int f(x)\,dx$.

5.8 Elementare Integrationen

Der Hauptsatz zeigt: Differentiation und Integration sind zueinander inverse Operationen. Jede Differentiationsformel liefert also auch eine Integrationsformel. Die Flächen „unter f” können berechnet werden, wenn man Stammfunktionen F von f finden kann.
Beispiele.

(1) $\int_a^b x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}$, da $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

(2) $\int_1^a \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^a = \ln a\ (a > 1)$, da $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Es gelten folgende Formeln:

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}; \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x|,$

$\int \cos dx = \sin x, \quad \int \sin x\ dx = -\cos x,$

$\int e^x dx = e^x, \quad \int \cosh x\ dx = \sinh x, \quad \int \sinh x\ dx = \cosh x,$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x, \qquad \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \quad (|x| < 1),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \left\{ \begin{array}{cc} \operatorname{arcosh} x & x \in (1, \infty) \\ -\operatorname{arcosh}(-x) & x \in (-\infty, -1) \end{array} \right\},$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan\ x, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot\ x,$$

$$\int \tan\ x\ dx = -\ln|\cos x|, \qquad \int \cot x\ dx = \ln|\sin x|.$$

Mittels der Additionstheoreme des sin und cos können Integrale von $\sin(\alpha x)\cos(\beta x)$ etc. berechnet werden, etwa

$$\int \sin^2 x\ dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\ dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}.$$

$$\int f'(x)/f(x) dx = \ln f(x).$$

5.9 Partielle Integration und Substitutionsregel

Wir behandeln zwei allgemeine Integrationstechniken.

Satz 1. *(Partielle Integration). Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Beweis. $f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x)$. □

Korollar. $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_b^a - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$

Beispiele.

(i) $\displaystyle\int \ln x\ dx = \int 1 \cdot \ln x\ dx = x \ln x - \int \frac{x}{x}\ dx = x \ln x - x.$

(ii) $\int x \cos x\ dx = x \sin x - \int 1 \sin x\ dx = x \sin x + \cos x.$

Der allgemeine Typ $\displaystyle\int x^n \cos x\ dx$ ist damit für $n \in \mathbb{N}$ berechenbar.

(iii) $\displaystyle\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx = \left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j j! \binom{n}{j} x^{n-j} \right) e^x.$

Satz 2. ***(Substitutionsregel)***. *Sei $g : [a,b] \to [c,d]$ stetig differenzierbar und sei $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig mit Stammfunktion F. Dann gilt:*

$$\int (f \circ g)(y)\; g'(y)dy = \int f(x)dx\Big|_{x=g(y)} = (F \circ g)(y).$$

Falls $g'(y) \neq 0$ für alle $y \in [a,b]$ ist, existiert $g^{-1} : g([a,b]) \to [a,b]$ und

$$\int f(x)dx = \left[\int (f \circ g)(y)\; g'(y)dy\right]_{y=g^{-1}(x)}.$$

Bemerkung. Eine typische Anwendungssituation ist: Sei $\int f(x)dx$ zu berechnen. Man wähle eine Substitution $x = g(y)$ so, dass eine Stammfunktion von $f \circ g(y)\; g'(y)$ „einfacher" zu finden ist.
Merkregel: $x = g(y)$, $\frac{dx}{dy} = g'(y)$, d.h. „$dx = g'(y)dy$"

$$\int f(x)dx = \int f(g(y))\; g'(y)dy.$$

Beweis. (i) $F(x) = \int f(x)dx$, $x = g(y)$, $\frac{d}{dx}F = f$. Mit der Kettenregel folgt

$$\frac{d}{dy}(F \circ g)(y) = \frac{d}{dx}F(g(y))\; \frac{dg}{dy}\,(y),$$

also

$$F(x) = F(g(y)) = \int (f \circ g)(y)\; g'(y)dy.$$

(ii) Falls $g'(y) \neq 0$ ist, existiert g^{-1} und ist stetig (Kapitel 3, Umkehrsatz). □

Korollar. $\displaystyle\int_c^d f(x)dx = \int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} f(g(y))\; g'(y)dy$, falls $g' > 0$ in $[a,b]$.

Beispiele.

(1) $\displaystyle\int g^\alpha(y)\; g'(y)dy = \left\{\begin{array}{ll} \ln|g(y)| & \alpha = -1 \\ \dfrac{g^{\alpha+1}(y)}{\alpha+1} & \alpha \neq -1 \end{array}\right\}$ mit Substitutionsfunktion $f(x) = x^\alpha$,
etwa $\displaystyle\int \frac{\ln y}{y}dy = \frac{1}{2}(\ln y)^2$.

(2) $\displaystyle\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^y dy = \frac{1}{2}\; e^y = \frac{1}{2}\; e^{x^2}$: Substitution $x = \sqrt{y}$, $y = x^2$.

(3) $\int \arcsin x \; dx = \int 1 \cdot \arcsin x \; dx = x \arcsin x - \int \frac{x \; dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Substitution $y = x^2$, $x \; dx = \frac{1}{2} dy$. Also

$$\begin{aligned} \int \arcsin x \; dx &= x \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{1-y}} = x \arcsin x + \sqrt{1-y} \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \end{aligned} .$$

(4)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{b}{a} x\right)^2} : \text{ Substitution } y = \frac{b}{a} x, \quad dy = \frac{b}{a} dx \\ &= \frac{1}{ab} \int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{ab} \; \arctan\left(\frac{b}{a} \; x\right) \end{aligned}$$

(5) $\int \sqrt{1-x^2} \; dx$. Substitution $x = g(y) = \sin y$, $g'(y) = \cos y$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} &= \int f(g(y)) \; g'(y) \; dy = \int \cos^2 y \; dy = \frac{y}{2} + \frac{\sin 2y}{4} \\ &= \frac{1}{2} \; (\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}), \quad \text{da} \quad \sin 2y = 2 \sin y \cos y. \end{aligned}$$

Die Fläche des Kreises mit Radius 1 ist also

$$2 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \; dx = 2 \left[\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = 2 \arcsin 1 = \pi.$$

(6) Integrale der Form $J = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \int \frac{dx}{a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right]}$ können durch eine Substitution $y = x + \frac{b}{2a}$ behandelt werden: Mit $A := \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$ ist $J = \frac{1}{a} \int \frac{dy}{y^2 + A}$ und, abhängig davon, ob $A > 0$ oder $A < 0$ ist, kann man das Integral J auf $\int \frac{dz}{z^2+1}$ oder $\int \frac{dz}{z^2-1}$ zurückführen.

(7) Integrale der Form $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ werden analog durch quadratische Ergänzung auf die Typen

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

zurückgeführt.

(8) Falls der Integrand eine rationale Funktion in $(\cos x, \sin x)$ ist, substituiere man $y = \tan\frac{x}{2}$.

Dann ist $x = 2\arctan y$, $\quad dx = \dfrac{2dy}{1+y^2}$, $\quad \sin x = \dfrac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \dfrac{2y}{1+y^2}$,

$\cos x = \dfrac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \dfrac{1-y^2}{1+y^2}$.

Als neuen Integranden erhält man eine rationale Funktion in y.

Beispiel: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+y^2}{2y}\,\frac{2dy}{1+y^2} = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|.$

Taylorformel mit Integralrestglied

Mittels partieller Integration kann man neben der Lagrange- und Cauchyform des Restgliedes bei der Taylorreihe auch eine Integralform des Restgliedes herleiten:

Satz. *Sei $I = [a, b]$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein nichttriviales Intervall und $f \in C^{n+1}(I)$. Sei $x_0 \in I$ fest. Dann gilt für alle $x \in I$*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + R_n(f,x), \\ R_n(f,x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \end{aligned}$$

Beweis. Durch Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$:

Induktions-Anfang $n = 0$: $f(x) = f(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt$ (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Induktions-Schritt $n \to n+1$: Mittels partieller Integration ergibt sich für $f \in C^{n+2}(I)$

$$\begin{aligned} R_n(f,x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \\ &= \frac{1}{n!}\left[f^{(n+1)}(t)\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right)\right]_{t=x_0}^{x} + \frac{1}{n!}\,\frac{1}{n+1}\int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}dt \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\,f^{n+1}(x_0)(x-x_0)^{n+1} + R_{n+1}(f,x), \end{aligned}$$

womit sich die Formel für $(n+1)$ ergibt, wenn diejenige für n gilt. □

Beispiel: $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x)$, $x_0 = 0$. Dann folgt

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(f,x).$$

Für $-1 < x < 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
|R_n(f,x)| &= \frac{1}{n!}\left|\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt\right| \\
&= \left|\int_x^0 \frac{(t-x)^n}{(1+t)^{n+1}}\, dt\right| = \int_x^0 \left(\frac{t-x}{1+t}\right)^n \frac{dt}{1+t} \\
&\le |x|^n \int_x^0 \frac{dt}{1+t} = |x|^n \ln\left(\frac{1}{1+x}\right),
\end{aligned}$$

da $0 \le \left(\frac{t-x}{1+t}\right)^n \le |x|^n$ für $-1 \le x \le t \le 0$ gilt. Es ist dann $\lim\limits_{n\to\infty} |x|^n \ln\left(\frac{1}{1+x}\right) = 0$.

Für $0 < x < 1$ gilt

$$|R_n(f,x)| = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\, dt \le x^n \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x^n \ln(1+x) \to 0 \ (n\to\infty).$$

Es folgt also für $|x| < 1$, wenn der Limes für $n \to \infty$ gebildet wird:

$$\ln(1+x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

5.10 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz. *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und sei $g \ge 0$ sowie f stetig. Dann gibt es ein $\zeta \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(\zeta) \int_a^b g(x)\, dx$*

Speziell ergibt sich für $g = 1$: $\int_a^b f(x)\, dx = f(\zeta)(b-a)$.

Beweis. Sei $m := \inf\limits_{[a,b]} f$ und $M := \sup\limits_{[a,b]} f$. Mit $g \ge 0$ folgt:
$m\, g(x) \le f(x)g(x) \le M\, g(x)$, also

$$m \int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M \int_a^b g(x)dx.$$

Also gibt es $\mu \in [m, M]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert $\zeta \in [a,b]$ mit $f(\zeta) = \mu$, da f stetig ist. □

5.11 Nullstellen von Polynomen

Um rationale Funktionen $f = p/q$ zu integrieren, muss man die Nullstellen von q kennen. Ein quadratisches Polynom $z^2 + az + b = 0$ hat zwei Nullstellen *in* $\mathbb{C}$, berechnet durch $z_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$.

Fundamentalsatz der Algebra. *Jedes komplexe Polynom* $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 \quad (a_i \in \mathbb{C},\ \ a_n \neq 0)$ *vom Grad* $n \geq 1$ *hat mindestens eine* ***komplexe*** *Nullstelle.*

Beweis. Algebra-/ Funktionentheorie-Vorlesung oder Heuser. □

Korollar. *Jedes komplexe Polynom vom Grad* n *besitzt eine eindeutige Zerlegung* $p(z) = a_n(z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_r)^{m_r}$ *mit verschiedenen Werten* $z_i \in \mathbb{C}$ *und Zahlen* $m_i \in \mathbb{N}$, *die* $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$ *erfüllen. Diese sind eindeutig bis auf Permutation der* z_i*: die* z_i *sind die* ***Nullstellen*** *von* p, *die* m_i *die* ***Vielfachheiten*** *der Nullstellen* z_i.

Also: Ein Polynom vom Grad n hat *genau* n Nullstellen, wenn man sie ihrer Vielfachheit entsprechend zählt.

Beweis. (i) Sei $p(z_1) = 0$ mit $z_1 \in \mathbb{C}$ nach dem Nullstellensatz. Dann folgt

$$p(z) = p(z) - p(z_1) = \sum_{i=1}^{n} a_i(z^i - z_1^i) = (z - z_1)\sum_{i=1}^{n} a_i(z^{i-1} + \cdots + z_1^{i-1}) =: (z - z_1)p_1(z)$$

mit Grad $p_1 = n - 1$.
(ii) **Induktionsbeweis des Korollars.**

$n = 1$: $\qquad p(z) = a_1 z + a_0 = a_1\left(z - \underbrace{\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)}_{\text{Nullstelle}}\right)$

$n \to n + 1$: Grad $p = n + 1$. Aus dem Nullstellensatz folgt: Es gibt $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_1) = 0$, also nach (i) $p(z) = (z - z_1)p_1(z)$ mit Grad $p_1 = n$.

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt:
$p_1(z) = a_{n+1}(z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_r)^{m_r}$.

□

Im reellen Fall ergibt sich folgende reelle Form:

Satz. *Sei* p *ein Polynom* n*-ten Grades mit* ***reellen*** *Koeffizienten. Dann gilt:*

(a) Ist $z_1 \in \mathbb{C}$ *Nullstelle von* p, *so ist* $\overline{z_1} \in \mathbb{C}$ *ebenfalls Nullstelle.*

(b) $\exists\ x_1, \cdots, x_r \in \mathbb{R}; \quad A_1, \cdots, A_s, B_1, \cdots, B_s \in \mathbb{R}, \quad \varrho_1, \cdots, \varrho_r, \sigma_1, \cdots, \sigma_s \in \mathbb{N}$

$$p(x) = a_n = a_n(x - x_1)^{\varrho_1} \cdots (x - x_r)^{\varrho_r}(x^2 + A_1 x + B_1)^{\sigma_1} \cdots (x^2 + A_s x + B_s)^{\sigma_s}$$

und $n = \varrho_1 + \cdots + \varrho_r + 2\sigma_1 + \cdots + 2\sigma_s$, *wobei* ***keiner*** *der Terme* $x^2 + A_i x + B_i$ ***reelle*** *Nullstellen hat.*

Beweis. (a) $\overline{p(z)} = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i} = p(\overline{z});\quad p(z_1) = 0 \Rightarrow p(\overline{z_1}) = 0.$

(b) Seien $x_1, \cdots, x_r$ die reellen Nullstellen von p und $(z_1, \overline{z_1}), \cdots, (z_s, \overline{z_s})$ die Paare konjugiert komplexer Nullstellen, mit (gleicher) Vielfachheit $\sigma_1, \cdots, \sigma_s$. Also nach Korollar

$$p(x) = a_n (x - x_1)^{\varrho_1} \cdots (x - x_r)^{\varrho_r} [(x - z_1)(x - \overline{z_1})]^{\sigma_1} \cdots [(x - z_s)(x - \overline{z_s})]^{\sigma_s}.$$

Aber

$$(x - z_j)(x - \overline{z_j}) \overset{x \in \mathbb{R}}{=\!=\!=} |x - z_j|^2 = x^2 - 2(\mathrm{Re}\ z_j)x + |z_j|^2,\quad A_j := -2\mathrm{Re}\ z_j,\quad B_j = |z_j|^2 \in \mathbb{R}.$$

□

Beispiel. $x^4 - x = x(x-1)(x^2 + x + 1)$.

5.12 Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen

Zur Integration rationaler Funktionen $f = p/q$ zerlegt man sie in einfachere „Bruchstücke". Falls Grad $p \geq$ Grad q, kann man durch Polynomdivision

$$\frac{p(x)}{q(x)} = r(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)}$$

erreichen, mit Grad r = Grad $p-$Grad q und Grad $p_1 <$ Grad q (Division mit Rest). Das Polynom r ist elementar zu integrieren und $p_1(x)/q(x)$ sind nach folgendem Satz zu zerlegen und die Bruchstücke sind dann gemäß 5.13 zu integrieren. Zur Nullstellensuche kann man die Intervallhalbierung oder das Newton-Verfahren für Nullstellen nichtlinearer Gleichungen benutzen. Es gibt keine allgemeinen Nullstellen-Formeln für Polynome vom Grad > 4, die nur Wurzel-Ausdrücke enthalten.

Satz. (Partialbruchzerlegung). *Sei* $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ *eine* ***reelle*** *rationale Funktion mit Polynomen* p, q, *die* Grad $p <$ Grad q *erfüllen. Es habe* q *die Zerlegung*

$$q(x) = a(x - x_1)^{\varrho_1} \cdots (x - x_r)^{\varrho_r} (x^2 + A_1 x + B_1)^{\sigma_1} \cdots (x^2 + A_s x + B_s)^{\sigma_s}.$$

Daraus folgt: es gibt $a_{ij}, \alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \cdots, r\}$, $j \in \{1, \cdots, \max\{\varrho_1, \cdots, \sigma_s\}\}$ mit

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{a_{11}}{x - x_1} + \cdots + \frac{a_{1\varrho_1}}{(x - x_1)^{\varrho_1}} \right) + \cdots + \left(\frac{a_{r1}}{x - x_r} + \cdots + \frac{a_{r\varrho_r}}{(x - x_r)^{\varrho_r}} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\alpha_{11} x + \beta_{11}}{(x^2 + A_1 x + B_1)} + \cdots + \frac{\alpha_{1\sigma_1} x + \beta_{1\sigma_1}}{(x^2 + A_1 x + B_1)^{\sigma_1}} \right) + \cdots \qquad . \end{aligned} \tag{1}$$

Beweis. Es reicht, den Fall $s = 0$, aber komplexe x_i, zu untersuchen, da

$$\frac{a_j}{(x - x_j)} + \frac{\overline{a_j}}{(\overline{x} - \overline{x_j})} = \frac{\alpha_j x + \beta_j}{(x^2 + A_j x + B_j)}$$

etc. ist.
Induktion über Grad $q = n = \varrho_1 + \cdots + \varrho_r \quad (\sigma_i = 0)$.

$\mathbf{n = 1}: \quad f(z) = \dfrac{c}{a_1(z - x_1)}.$

$(\mathbf{1}, \cdots, \mathbf{n - 1}) \Rightarrow \mathbf{n}:$ Sei $q(z) = (z - z_1)^{\varrho_1} s(z)$ mit $s(z) = a_n(z - z_2)^{\varrho_2} \cdots (z - z_r)^{\varrho_r}$.

$$\forall\ a \in \mathbb{C} \quad \frac{p(z)}{q(z)} - \frac{a}{(z - z_1)^{\varrho_1}} = \frac{p(z) - a\ s(z)}{(z - z_1)^{\varrho_1} s(z)}\ .$$

Mit $s(z_1) \neq 0$ sei $a := p(z_1)/s(z_1)$ gewählt. Dann ist $p(z_1) - a\ s(z_1) = 0$.

(i) Falls $p - as \equiv 0$, fertig, da $\dfrac{p(z)}{q(z)} = \dfrac{a}{(z - z_1)^{\varrho_1}}$.

(ii) Falls $p - as \not\equiv 0$, $p(z) - a\ s(z) = (z - z_1)P(z)$, Grad $P <$ Grad $(z - z_1)^{\varrho_1 - 1} s(z)$.

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a}{(z - z_1)^{\varrho_1}} + \frac{P(z)}{(z - z_1)^{\varrho_1 - 1} s(z)}.$$

Der zweite Summand kann nach Induktionsvoraussetzung zerlegt werden. □

Praktische Bestimmung der Koeffizienten: (a) Multiplikation des unbestimmten Ansatzes (1) mit dem Nennerpolynom und Koeffizientenvergleich ergibt lineares Gleichungssystem für die a_{ij}.
(b) Die höchsten Koeffizienten $a_{i\varrho_i}$ sind durch eine Grenzwertmethode berechenbar: Multiplikation von (1) mit $(x - x_i)^{\varrho_i}$, dann $x \to x_i$: Grenzwert ist $a_{i\varrho_i}$. Diesen Term auf die linke Seite bringen und Methode fortsetzen: das ergibt die 2. Methode.
Beispiel: $f(z) = \dfrac{z^2 + 1}{z^3 - 2z^2 + z}, \quad z^3 - 2z^2 + z = z(z - 1)^2.$

Ansatz $f(z) = \dfrac{a}{z} + \dfrac{b}{z - 1} + \dfrac{c}{(z - 1)^2}.$

2. Methode:

Multiplikation von f mit z: $\quad \dfrac{z^2 + 1}{(z - 1)^2} = a + \dfrac{bz}{z - 1} + \dfrac{cz}{(z - 1)^2} \overset{z=0}{\Longrightarrow} a = 1$

Multiplikation von f mit $(z - 1)^2$: $\quad \dfrac{z^2 + 1}{z} = c + b(z - 1) + \dfrac{a}{z}(z - 1)^2 \overset{z=1}{\Longrightarrow} c = 2$

Eine kurze Rechnung zeigt $b = 0$. $\qquad f(z) = \dfrac{1}{z} + \dfrac{2}{(z - 1)^2}.$

5.13 Integration rationaler Funktionen

Es ist noch zu zeigen, wie Terme folgender Art integriert werden können:
$\int \dfrac{dx}{(x-x_0)^n}, \quad \int \dfrac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^m}\,dx \quad \text{mit} \quad a^2<4b \quad \text{(keine reelle Nullstelle).}$

Der Fall $m=1$ des zweiten Integrals kann durch quadratische Ergänzung und partielle Integration gelöst werden:

$$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+ax+b} = \frac{2}{\sqrt{4b-a^2}}\ \arctan\frac{2x+a}{\sqrt{4b-a^2}} \\ \displaystyle\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+ax+b}\,dx = \frac{\alpha}{2}\ln(x^2+ax+b)+\left(\beta-\frac{\alpha a}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+ax+b}\ . \end{cases}$$

Übung: Fall $m>1$ für $a^2<4b$.

Beispiel: $f(x)=\dfrac{x+1}{x^4-x}, \quad x^4-x=x(x-1)(x^2+x+1).$

Ansatz $f(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{\alpha x+\beta}{x^2+x+1}.$

Multiplikation mit x ergibt $a=-1$, Multiplikation mit $(x-1)$ ergibt $b=2/3$.
Wähle $x=-1,2$; setze a,b ein; bestimme α,β aus dem Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{ll} 0 & = 1-\frac{1}{3}-\alpha+\beta \\[2ex] \frac{3}{14} & = -\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{7}\alpha+\frac{1}{7}\beta \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \alpha-\beta & = \frac{2}{3} \\[2ex] 2\alpha+\beta & = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \alpha & = \frac{1}{3} \\[2ex] \beta & = -\frac{1}{3} \end{array}\right\}.$$

Also $f(x)=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{3}\ \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{3}\ \dfrac{x-1}{x^2+x+1}.$

$$\int f(x)dx = -\ln|x|+\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

5.14 Bogenlänge ebener Kurven

Problem. Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Bestimme die Länge der durch den Graphen

$$\{(x,y)|\ y=f(x),\ x\in[a,b]\}$$

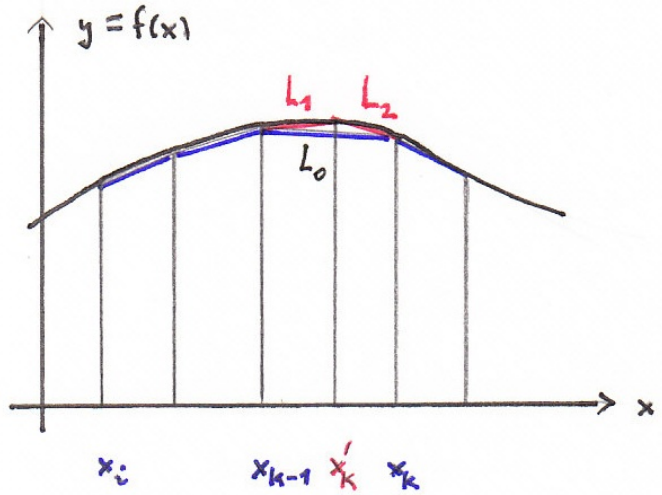
gegeben Kurve C_f.

Definition. $Z=\{x_0<...<x_n\}$ *Zerlegung von* $[a,b]$*. Dann ist*

$$L(Z,f):=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(f(x_k)-f(x_{k-1}))^2}$$

die ***Länge*** *des durch* Z *gegebenen* ***Polygonzuges****.*

Bemerkung. Ist Z' eine Verfeinerung von Z, gilt $L(Z,f) \leq L(Z',f)$: O.B.d.A. $Z' = Z \cup \{x'_k\}, \quad x_{k-1} < x'_k < x_k$.
Da $L_0 \leq L_1 + L_2$ wegen der Dreiecksungleichung in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ gilt, folgt die Behauptung.



Definition. *Die durch f gegebene Kurve C_f ist* ***rektifizierbar*** *(,d.h. eine Längenzuordnung ist möglich), wenn $\sup\limits_Z L(Z,f) < \infty$. $L(C_f) := \sup\limits_Z L(Z,f)$ heißt dann die* ***Bogenlänge von $\mathbf{C_f}$***.

Satz. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist C_f rektifizierbar und es gilt*

$$L(C_f) = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(x)|^2}\, dx.$$

Beweis. Sei Z eine Zerlegung. Der Polygonzug dazu hat die Länge

$$L(Z,f) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}\ (x_k - x_{k-1}).$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es $\zeta_k \in (x_{k-1}, x_k)$ mit

$$f'(\zeta_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Somit ist

$$L(Z,f) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'(\zeta_k)^2}\ |I_k|$$

eine Riemann-Summe der stetigen, also integrierbaren Funktion $g = \sqrt{1+f'^2}$: Aus der Riemann-Integrierbarkeit der Ableitung einer differenzierbaren Funktion f folgt die Rektifizierbarkeit der Funktion f.

Also ist $L(C_f) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx.$ $\square$

Beispiele. (1) **Kreis:** $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{1-x^2}$: C_f ist der Halbkreis mit Radius 1. Es gilt: $\sqrt{1+f'(x)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (*nicht* definiert für $x = \pm 1$).
Sei $-1 < -a < a < 1$. Dann

$$L(C_f; -a, a) = \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-a}^{a} = 2 \arcsin a.$$

Für $a \to 1$ gilt $\lim_{a\to 1} L(C_f; -a, a) = 2\arcsin 1 = \pi$. (Uneigentliche Integrale: siehe 5.15).

(2) **Kettenlinie:** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cosh x$. f ist stetig differenzierbar, und mit dem obigen Satz folgt

$$L(C_f) = \int_a^b \sqrt{1+\sinh^2 x}\, dx = \int_a^b \cosh x\, dx = \sinh b - \sinh a.$$

(3) **Parabel:** $f : [0,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2/2$ auf $(0,b]$, $f'(x) = x$.

$$L(C_f) = \int_0^b \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}(b\sqrt{1+b^2} + \ln(b+\sqrt{1+b^2})).$$

5.15 Uneigentliche Integrale

Bisher wurde das bestimmte Integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ nur definiert für i) f ist beschränkt, ii) $[a,b]$ ist beschränkt, abgeschlossen. In Anwendungen sind beide Bedingungen zu einschränkend. Über Limites kann man in etlichen Fällen „uneigentliche Integrale” definieren, vgl. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ über $[-1,1]$ in 5.14.

Definition. *Sei $-\infty < a < b \le \infty$. $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ heißt* ***uneigentlich integrierbar auf*** $[\mathbf{a},\mathbf{b})$, *wenn f auf jedem kompakten Teilintervall $[a,c]$, $a < c < b$ integrierbar ist und*

$$\int_a^{b_-} f(x)dx := \lim_{c\to b} \int_a^c f(x)dx$$

existiert. Der Grenzwert heißt ***Uneigentliches Integral von*** $\mathbf{f}$.

Obiges gilt analog für $(a,b]$ und (a,b), auch für $a = -\infty$ oder für ganz $\mathbb{R}$.

Das schließt für $b = \infty$ unendliche Intervalle oder für $b \in \mathbb{R}$ Integration über unbeschränkte Funktionen f ein.

Beispiele.

(1) $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} -\ln\varepsilon & \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha}) & \alpha \neq 1 \end{cases} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$

Also: $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ existiert $\Leftrightarrow \alpha < 1$, $\displaystyle\int_{0^+}^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$ „**integrierbare Singularität**".

(2) $\displaystyle\int_1^c \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln c & \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}(c^{1-\alpha}-1) & \alpha \neq 1 \end{cases} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$

Somit: $\displaystyle\lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{dx}{x^\alpha}$ existiert $\Leftrightarrow \alpha > 1$, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$.

(3) $\displaystyle\int_0^{1^-} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{c\to 1^-}\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{c\to 1^-}[-2\sqrt{1-x}]_0^c = 2$ existiert.

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R,S\to\infty}\int_{-R}^S \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{S\to\infty}\arctan S - \lim_{R\to\infty}\arctan(-R) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$

Beide Limites wurden unabhängig voneinander vorgenommen.

(5)
$$\begin{aligned}\int_0^1 \log x\, dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \log x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}[x\log x - x]_\varepsilon^1 \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(-1-\varepsilon\log\varepsilon+\varepsilon) = -1, \text{ da } \varepsilon\log\varepsilon \to 0 \quad (\varepsilon\to 0).\end{aligned}$$

5.16 Konvergenzkriterien

Das **Konvergenzkriterium von Cauchy** nimmt hier die folgende Form an:

Satz 1. *Sei $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ auf jedem kompakten Teilintervall integrierbar. Das Integral $\displaystyle\int_a^{b^-} f(x)dx$ existiert genau dann, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ eine δ-Umgebung U von b gibt, so dass für alle $x, y \in U$ $\displaystyle\left|\int_x^y f(\zeta)d\zeta\right| < \varepsilon$ gilt.*

(Für $b = \infty$: $U = \{x \in \mathbb{R} |\ x > 1/\delta\}$.)

Satz 2. *Sei $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ auf jedem kompakten Teilintervall integrierbar. Existiert dann $\displaystyle\int_a^{b^-} |f(x)|dx$, so auch $\displaystyle\int_a^{b^-} f(x)dx$.*

Beweis. Es ist $g(x) := f(x) + |f(x)| \geq 0$, $\quad g(x) \leq 2|f(x)|$. Also

$$\sup_{c<b}\int_a^c g(x)dx \leq 2\int_a^{b^-}|f(x)|dx < \infty.$$

Da für jede monoton wachsende Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch $\left(\int_a^{c_n} g(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, existiert $\lim_n \int_a^{c_n} g(x)dx$ nach Bolzano-Weierstraß. Also ist auch $f = g - |f|$ uneigentlich integrierbar (Linearität des Limes). $\square$

Warnung. Auf kompakten Intervallen gilt: f integrierbar $\overset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ $|f|$ integrierbar.

Hier: ($f\big|_{\text{kompakt integrierbar}}$+$|f|$ uneigentlich integrierbar) $\Rightarrow f$ uneigentlich integrierbar.

Es gilt *nicht*: f uneigentlich integrierbar $\Rightarrow |f|$ uneigentlich integrierbar.

Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto (-1)^{n+1}/n$ für $x \in [n-1, n)$. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_0^n f(x)dx &= \textstyle\sum_{i=1}^n (-1)^{n+1}/n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln 2 && \text{alternierende Reihe,}\\
\int_0^n |f(x)|dx &= \textstyle\sum_{i=1}^n 1/n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty && \text{harmonische Reihe.}
\end{aligned}$$

Satz 3. *(Majorantenkriterium). Sei $|f| \le g$ auf $[a,b)$, beide auf allen kompakten Teilintervallen integrierbar und $\int_a^{b^-} g(x)dx$ uneigentlich integrierbar. Dann gilt: $\int_a^{b^-} |f(x)|dx$ und $\int_a^{b^-} f(x)dx$ sind uneigentlich integrierbar.*

Dies folgt wie bei Reihen.

Beispiele. (1) Sei $\alpha > -1$. $\int_0^\infty t^\alpha e^{-t}dt$ konvergiert nach Satz 3, da $t^\alpha e^{-t} \le \frac{M}{t^2}$ für $t \ge 1$ und $t^\alpha e^{-t} \le t^\alpha$ für $t \le 1$. Aber $\int_0^1 t^\alpha dt$ und $\int_1^\infty \frac{dt}{t^2}$ existieren nach 5.15.

(2) **Dirichlet-Integral** $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$ konvergiert $(= \pi/2)$:
Nachweis mit dem Cauchy-Kriterium. Sei $0 < x < y$. Partielle Integration ergibt

$$\int_x^y \frac{\sin t}{t}dt = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_x^y - \int_x^y \frac{\cos t}{t^2}dt$$

$$\left|\int_x^y \frac{\sin t}{t}dt\right| \le \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \int_x^y \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{x} \to 0 \quad \text{für} \quad y > x \to \infty.$$

Aber $\int_0^\infty \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = \infty$ (Übung).

5.17 Das Integralkriterium für Reihen

Integralkriterium. Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ positiv und monoton fallend. Dann gilt:

$$\left(\int_1^\infty f(x)dx \text{ existiert } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty f(n) \text{ konvergiert} \right).$$

Beweis. Da f monoton ist, ist f auf jedem kompakten Intervall integrierbar. Wegen der Monotonie gilt für alle $x \in [k, k+1]$, dass $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ ist. Also:

$$\sum_{k=n}^m f(k+1) \leq \sum_{k=n}^m \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=n}^m f(k).$$

Der Satz folgt hieraus mit dem Monotoniekriterium für Reihen und Integrale. □

Beispiel. $\sum_{n=1}^\infty n^{-\alpha}$ konvergiert $\Leftrightarrow \alpha > 1$, da

$$\int_1^\infty x^{-\alpha}dx \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

5.18 Die Γ-Funktion

Definition. $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\Gamma(x) := \int_{0^+}^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$. Γ *heißt* ***Eulersche*** Γ***-Funktion*** *(existiert nach Beispiel 1, 5.16).*

Die Γ-Funktion ist wichtig, da sie die Fakultäten „extrapoliert”:

Satz.

$$\begin{array}{lll} (1) & \forall_{x>0} & \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \\ (2) & \forall_{n\in\mathbb{N}_0} & \Gamma(n+1) = n! \end{array}$$

Beweis. (1) Sei $0 < a < 1 < b < \infty$. Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \int_1^b t^x e^{-t}dt &= \left(\tfrac{1}{e} - \tfrac{b^x}{e^b}\right) + x\int_1^b t^{x-1}e^{-t}dt, \\ \int_1^\infty t^x e^{-t}dt &= \tfrac{1}{e} + x\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \\ \int_a^1 t^x e^{-t}dt &= \left(\tfrac{a^x}{e^a} - \tfrac{1}{e}\right) + x\int_a^1 t^{x-1}e^{-t}dt, \\ \int_{0^+}^1 t^x e^{-t}dt &= -\tfrac{1}{e} + x\int_{0^+}^1 t^{x-1}e^{-t}dt, \\ \Gamma(x+1) = \int_{0^+}^\infty t^x e^{-t}dt &= \int_{0^+}^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \\ &= x\int_{0^+}^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x). \end{aligned}$$

(2)

$\mathbf{n = 0}$: $\quad \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1.$

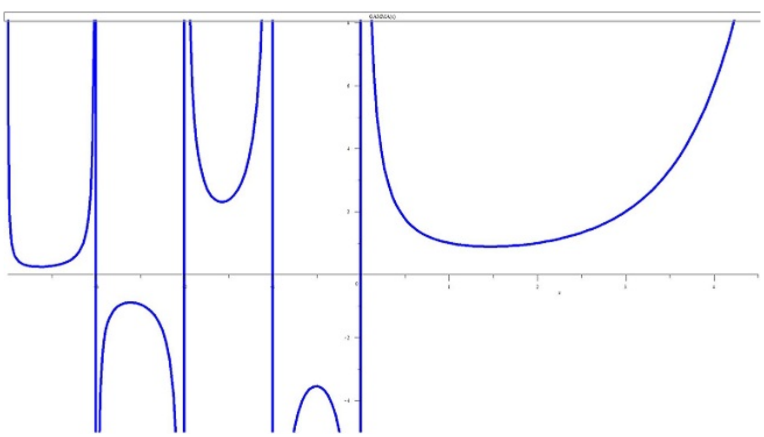
$\mathbf{n \Rightarrow n+1}$: Sei $\Gamma(n+1) = n!$. Dann ist
$\Gamma(n+2) \overset{(1)}{=} (n+1)\,\Gamma(n+1) \overset{\text{Vor.}}{=} (n+1)n! = (n+1)!$

$\square$

Die Funktionalgleichung $\Gamma(x+n) = x(x+1)\cdots(x+n-1)\Gamma(x)$, $x > 0$, benutzt man zur Definition von $\Gamma(x)$ **auch für** $x < 0$:

Definition. $x < 0$, $\;x \notin \mathbb{Z}$: *Sei* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $0 < x + n < 1$ *und setze*

$$\Gamma(x) := \Gamma(x+n)/(x(x+1)\cdots(x+n-1)).$$



Man hat: $\log\Gamma$ *ist konvex,* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Für die Fakultäten gilt die
Stirlingsche Formel. $n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}$ (Quotient $\to 1$ für $n \to \infty$. Ohne Beweis.)
Z.B. ist $100! \sim 9.3 \cdot 10^{157}$ mit Genauigkeit von $0,1\%$.

5.19 Integration unendlicher Reihen

Satz 1. *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall und seien* $f_n : I \to \mathbb{R}$ *stetig und die Reihe* $f := \sum_n f_n : I \to \mathbb{R}$ *sei gleichmäßig konvergent, d.h.* $\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \quad \forall_{m>n\geq n_0,\; x\in I} \left|\sum_{k=n}^{m} f_n(x)\right| < \varepsilon$. *Dann ist* f *stetig.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in I$. Da $f = \sum_n f_n$ gleichmäßig konvergent ist, gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in I$ gilt

$$\left| \sum_{n=0}^{N} f_n(x) - f(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \varepsilon/3 \, .$$

Da $\sum_{n=0}^{N} f_n$ in x_0 stetig ist, gibt es $\delta > 0$, so dass für alle $x \in I$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \sum_{n=0}^{N} (f_n(x) - f_n(x_0)) \right| \leq \varepsilon/3 \, .$$

Also folgt für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \right| + \left| \sum_{n=0}^{N} (f_n(x) - f_n(x_0)) \right| + \left| \sum_{n=0}^{N} f_n(x_0) - f(x_0) \right| \\ &\leq 3 \cdot \varepsilon/3 = \varepsilon \, . \end{aligned}$$

□

Beispiel: Für punktweise Konvergenz gilt der Satz nicht: $f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0$.

Dann ist

$$s_N(x) = \sum_{n=0}^{n} f_n(x) = 1 - x^{N+1}, \quad f(x) = \lim_N s_N(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x = 1 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \end{array} \right\} \, .$$

Aber f ist unstetig in $x = 1$.

Satz 2. ***(Vertauschung von Integration und Summation).*** *Seien $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergent auf $[a, b]$. Dann ist f integrierbar und*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Also: $\int \sum_n f_n = \sum_n \int f_n$.

Beweis. Nach Satz 1 ist f stetig, also integrierbar. Man hat wegen der Linearität des Integrals

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{n=1}^{N}\int_a^b f_n(x)dx\right| &= \left|\int_a^b \left(f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\right) dx\right| \\ &\leq \int_a^b \left|f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\right| dx \\ &\leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} \left|f(x) - \textstyle\sum_{n=1}^{N} f_n(x)\right|\end{aligned}$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit:

$$\forall_{N\geq N_0} \quad \sup_{x\in[a,b]} \left|f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

□

Korollar. *Die Potenzreihe* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *habe einen Konvergenzradius* $r > 0$. *Dann ist* f *auf allen kompakten Teilintervallen* $[a,b] \subset (x_0 - r,\ x_0 + r)$ *integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}\Big|_a^b .$$

Beweis. Nach 4.15 ist die Potenzreihe auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergent. □

Bemerkungen.

– Ohne die „gleichmäßige Konvergenz"-Voraussetzung ist der Satz i.a. falsch.
– Es gibt wichtige, nicht „in geschlossener Form" integrierbare Funktionen, etwa

$$e^{-x^2}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{e^x}{x}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}.$$

Man kann sie in Reihen entwickeln und dann gliedweise integrieren:

Beispiele:

(a) $e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!}$ ist gleichmäßig konvergent auf $[0,x]$, also

$$\int_0^x e^{-t^2}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

(b) $\frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$ ist gleichmäßig konvergent auf $[0,x]$; folglich

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(c) Die Reihenentwicklung des $\arcsin x$ in eine Taylorreihe kann man so zeigen:
Für $|x| \le q < 1$ konvergiert die binomische Reihe

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} x^{2n}$$

gleichmäßig. Also gilt: $\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + c$, und $c = 0$ wegen $\arcsin 0 = 0$. Für $|x| < 1$ folgt

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Analog gilt: $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, $\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots$.

5.20 Differentiation unendlicher Reihen

Satz. *Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit:*
(a) Die Reihe $f := \sum_{n \in N} f_n$ ist punktweise konvergent in $[a,b]$.
(b) Die Ableitungsreihe $\sum_{n \in N} f_n'$ ist ***gleichmäßig*** *konvergent.*

Dann ist f differenzierbar in $[a,b]$ und $f'(x) = \sum_{n \in N} f_n'(x)$, $x \in [a,b]$.

Also $(\sum f_n)' = \sum f_n'$.

Beweis. Sei $g(x) := \sum_n f_n'(x)$. Nach 5.19 ist g stetig und es gilt

$$\begin{aligned}\int_a^x g(t)dt &= \sum_{n \in N} \int_a^x f_n'(t)dt = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_a^x f_n'(t)dt \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a).\end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist $f'(x) = g(x)$. □

Korollar. *Sei $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann kann f für alle x mit $|x - x_0| < r$ beliebig oft (gliedweise) differenziert werden,*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (x-x_0)^{n-1}.$$

Der Konvergenzradius der Reihe für f' ist wieder r.

Beweis. Man hat $\overline{\lim_n}\ \sqrt[n]{n|a_n|} = \overline{\lim_n}\ \sqrt[n]{|a_n|}$, da $\sqrt[n]{n} \to 1$. $\square$

Beispiel: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\ \ x^n \ = \ x\sum_{n=1}^{\infty} n\ \ x^{n-1} \ = \ x\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \ = \ x\ \ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) \ = \ \frac{x}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$.

Übung: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ für $|x| < 1$.

Bemerkung. Der Satz ist falsch, wenn $\displaystyle\sum_n f_n'$ *nicht* gleichmäßig konvergiert (selbst wenn $\displaystyle\sum_n f_n$ gleichmäßig konvergiert):

$$f_n(x) := \frac{1}{n}\sin n\, x - \frac{1}{n+1}\sin(n+1)x\ ,\ \ n \in \mathbb{N}\ ;\ \ f_0(x) := -\sin x.$$

Dann ist $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} f_n(x) = -\frac{1}{N+1}\sin(N+1)x$. Daraus folgt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = 0$ gleichmäßig konvergent ist. Aber

$$\sum_{n=0}^{N} f_n'(x) = -\cos(N+1)x \not\to 0 = 0' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)'.$$

Wiederholte Anwendung des Korollars liefert für $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots\ (n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k},$$

insbesondere: $f^{(k)}(x_0) = k!\ a_n, \quad a_n = f^{(k)}(x_0)/k!$. Also haben wir das

Korollar. *Jede Potenzreihe ist die Taylorreihe ihrer Summenfunktion.*