Inhaltsverzeichnis

4 Differentialrechnung

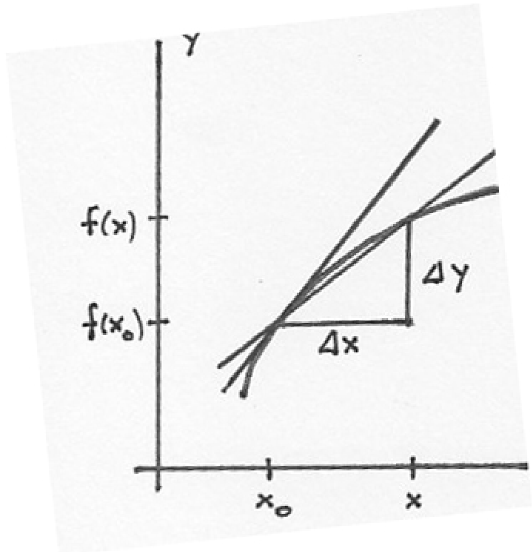
Die Differentialrechnung stand am Beginn der modernen Naturwissenschaft. Zwei historische Probleme sind:

- Das Tangentenproblem für eine gegebene Kurve (Geometrie).
- Die Momentangeschwindigkeit eines ungleichförmig bewegten Körpers (Physik).

In beiden Fällen ist das Änderungsverhalten einer gegebenen Funktion zu untersuchen, etwa der Ort als Funktion der Zeit. Der Ort des Punkts P auf Zahlengeraden $\mathbb{R}$ zur Zeit t sei $y(t)$. Die **Geschwindigkeit** von P zur Zeit t_0 ist näherungsweise

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} := \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \text{ mit } t \underset{\neq}{\approx} t_0 \ , \ \Delta t = t - t_0 \ .$$

Die **Momentangeschwindigkeit** ist gegeben durch $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$, sofern der Limes existiert. Dies ist auch die Steigung der Tangente an $y = f(t)$ in $t = t_0$: $\tilde{y}(t) = m(t - t_0) + y(t_0)$, $m = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}$ (als Limes der Steigung von Sekanten).



4.1 Differenzierbarkeit

Definition. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{K}$. Dann heißt f **differenzierbar** in $x_0 \in I$:⇔ Der Limes $f'(x_0) := \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert. $f'(x_0)$ heißt dann **Ableitung von** f **in** x_0 **.** Übliche Notationen: $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \; Df(x_0)$.
Die Funktion $f : I \to \mathbb{K}$ heißt **differenzierbar in** I :⇔ Für alle $x \in I$ ist f differenzierbar in x .
Falls also $f : I \to \mathbb{K}$ differenzierbar in I ist, ist $f' : I \to \mathbb{K}$ eine wohldefinierte Funktion, die **Ableitung von** f .

Lemma. *Seien $f : I \to \mathbb{K}$, $x_0 \in I$ und $m \in \mathbb{K}$. Dann sind äquivalent:*

(1) *f ist differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) = m$,*

(2) $\forall x_0 \neq x_n \to x_0 \quad \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} \to m \quad (n \to \infty)$,

(3) *$\exists r : I \to \mathbb{K}$ stetig in x_0 mit $r(x_0) = 0$ und*
$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + r(x)(x - x_0) \ .$$

(Für (3) definiere r durch $r(x) := \begin{Bmatrix} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{Bmatrix}$.)

Korollar. *Ist f differenzierbar in x_0, so ist f auch stetig in x_0 (gemäß (3)).*

Bemerkung.

(1) Die Differenzierbarkeit von $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wird charakterisiert durch die Differenzierbarkeit von $\mathrm{Re} f$ **und** $\mathrm{Im} f$.

(2) Analog definieren wir linksseitige und rechtsseitige Differenzierbarkeit. Differenzierbarkeit ist gleichbedeutend mit links- **und** rechtsseitiger Differenzierbarkeit **mit gleichem** Limes.

Beispiele.

(a) $f(x) = x^2$ ist differenzierbar in $\mathbb{R}$ mit $f'(x) = 2x$:

$f'(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$.

(b) $f(x) = |x|$ ist stetig in $x = 0$, aber nicht differenzierbar: Der links- und der rechtsseitige Limes existieren, sind aber verschieden:

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \neq 1 = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x}$ ("Knick" im Graphen).

(c) Es gibt stetige Funktionen in $[0, 1]$, die **nirgends** differenzierbar sind

$\left(\text{etwa } f(x) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sin(2^n \pi x)}{2^n \pi} \right)$.

4.2 Rechenregeln

Satz. *Seien $f, g : I \to \mathbb{K}$ differenzierbar in $x_0 \in I$ und $c \in \mathbb{K} \Rightarrow f \pm g,\ c \cdot f,\ f \cdot g$ und, falls $g(x_0) \neq 0,\ f/g$ differenzierbar in $x_0 \in I$ mit*

(1) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0),\ (cf)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$ **Linearität**.

(2) $(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$ **Produktregel**.

(3) *Für $g(x_0) \neq 0$ ist $(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$* **Quotientenregel**.

Beweis von (2) als Beispiel :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &\xrightarrow{x \to x_0} f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) , \end{aligned}$$

da f, g differenzierbar in x_0 sind, also g stetig in x_0 ist. □

Korollar. $(f_1 \cdots f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_n + \cdots + f_1 \cdots f_{n-1} f_n'$.

Kettenregel. *Seien $f : I_1 \to I_2$ in $x_0 \in I_1$ differenzierbar und $g : I_2 \to \mathbb{K}$ in $f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f : I_1 \to \mathbb{K}$ in x_0 differenzierbar mit*
$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ *("**äußere mal innere** Ableitung").*

Beweis. Sei $y_0 := f(x_0),\ g^*(y) := \left\{ \begin{array}{ll} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & y \neq y_0 \\ g'(y_0) & y = y_0 \end{array} \right\}$, d.h. $g^* : I_2 \to \mathbb{R}$.
Es gilt $\lim\limits_{y \to y_0} g^*(y) = g'(y_0)$ und $g(y) - g(y_0) = (y - y_0)g^*(y_0)$. Es folgt

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = g^*(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \to x_0} g'(f(x_0))f'(x_0) ,$$

da $y = f(x) \to y_0 = f(x_0)$ wegen der Stetigkeit von f gilt. □

Inverse Funktion. *Sei* $f : I \to \mathbb{R}$ *streng monoton und in* $x_0 \in I$ *differenzierbar mit* $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow f^{-1} : f(I) \to I \subset \mathbb{R}$ *ist differenzierbar in* $y_0 := f(x_0) \in f(I)$ *mit*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \ .$$

Beweis. Die Differenzierbarkeit liefert die Stetigkeit. Zusammen mit der Monotonie folgt die Existenz und Stetigkeit der Umkehrfunktion (vgl. 3.9). Wir haben dann:
$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ und

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \to \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0)}$$

für $y \to y_0$, da dann wegen der Stetigkeit von f^{-1} in x_0 gilt: $x \to x_0$. □

4.3 Ableitung von elementaren Funktionen

Wir illustrieren die Rechenregeln zur Differentiation an elementaren Funktionen.

Satz 1. a) *Polynome sind differenzierbar in* $\mathbb{R}$ *:* $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k\right)' = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \ k \ x^{k-1}.$

b) *Rationale Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich differenzierbar.*

Beweis.

a) $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k\right)' = \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k x^k)' = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (x^k)' \qquad (4.2.\ (1)).$

Für $f_1(x) := x$ ist $f_1'(x) = 1$ und für $f_0(x) = 1$ ist $f_0' = 0$. Mit 4.2.(2):
Für $f(x) := x^k$ ist $f'(x) = (\underbrace{f_1 \cdots f_1}_{k \text{ mal}})'(x) = k \ x^{k-1}$ (k mal $f_1' \cdot \underbrace{f_1 \cdots f_1}_{k-1}$).

b) Sei $r := p/q;\ p, q$ Polynome: $r'(x) = \frac{p'q-pq'}{q^2}$, p', q' mit a) berechnen.

□

Speziell [b)] für $x \neq 0$: $(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$, $(1/x)' = -1/x^2$.

Satz 2. (i) *Für* $a > 0$ *ist* $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ *. Speziell gilt* $(e^x)' = e^x$ *.*

(ii) *Für* $b > 1$ *ist* $(\log_b x)' = \frac{\log_b e}{x}$ *. Speziell gilt* $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ *.*

Die grundlegende Bedeutung der Zahl e , der Exponentialfunktion und des natürlichen Logarithmus beruhen auf diesen Formeln.

Beweis.

(i) $\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h-1}{h} \to e^x$ für $h \to 0$ nach 3.10. Daraus folgt: $(e^x)' = e^x$ (existiert).

Für a^x wenden wir die Kettenregel und $a^x = e^{x \ln a}$ an, d.h. $a^x = g \circ f(x)$ mit $f(x) = x \ln a$ und $g(y) = e^y$. Somit ist

$$(a^x)' = e^{(x \ln a)} \cdot \ln a = a^x \ln a \ .$$

(ii) $y = \ln x$ ist die Umkehrfunktion von $x = e^y$. Mittels 4.2 (inverse Funktion) ergibt sich

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} \ .$$

Für $\log_b x$ benutze $\log_b x = \log_b e \cdot \ln x$.

□

Satz 3. *Seien* $\alpha \in \mathbb{R},\ x > 0$. *Dann gilt* $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Beweis. $x^\alpha = e^{\alpha \ln x} = g(f(x))$ mit $f(x) = \alpha \ln x$, $g(y) = e^y$. Mit der Kettenregel ergibt sich

$$(x^\alpha)' = (g \circ f)'(x) = g'(f(x))\ f'(x) = e^{f(x)} \alpha \frac{1}{x} = \alpha\ x^{\alpha-1} \ .$$

□

Speziell gilt $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x}^{n-1}}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Satz 4. $\sin$ *und* $\cos$ *sind auf* $\mathbb{R}$ *differenzierbar mit*

$$(\sin x)' = \cos x \ ,\ (\cos x)' = -\sin x \ .$$

Beweis.

(a) Wir zeigen zunächst, dass $\frac{\sin x}{x} \to 1$ für $x \to 0$. Die Reihenentwicklung des Sinus ergibt

$\frac{\sin x}{x} - 1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$, also mit $(2k+1)! \geq 2^{2k}$ für $|x| \leq 1$

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{2k}}{(2k+1)!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|x|}{2} \right)^{2k} \overset{\text{geometr.}}{\underset{\text{Reihe}}{=\!=}} \frac{1}{1 - (\frac{x}{2})^2} - 1 = \frac{x^2}{4 - x^2} \leq x^2/3 \ .$$

(b) $\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \overset{\text{Kor.}}{\underset{\text{Add.th.}}{=\!=}} \frac{2 \cos(x+h/2) \sin h/2}{h} = \cos(x + h/2)\ \frac{\sin h/2}{h/2} \xrightarrow{(a)} \cos x$, unter Benutzung der Stetigkeit des cos. Also ist $(\sin x)' = \cos x$.

(c) $\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\frac{2\ \sin(x+h/2) \sin h/2}{h} = -\sin(x + h/2)\ \frac{\sin h/2}{h/2} \to -\sin x$.

Korollar. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Beweis. $(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\sin x)(-\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$ mit der Quotientenregel. □

4.4 Weitere Beispiele (einige als Übung)

(1) $(4/x^2 - 2/x^3 + 3)' = -2 \cdot 4/x^3 + 3 \cdot 2/x^4$

(2) $(x^3 e^x)' = 3x^2 e^x + x^3 e^x$

(3) $(x \ln x - x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x$

(4) $\left(\frac{1}{\ln x}\right)' = -\frac{1}{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} \quad (x > 0, x \neq 1)$

(5) $(x^x)' = (e^{x \ln x})' = x^x(\ln x + 1)$, $(x > 0)$ Kettenregel

(6) $(\ln \ln x)' = \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x}$

(7) $(\ln f(x))' = f'(x)/f(x)$ logarithmische Ableitung: $f'(x) = f(x)(\ln f(x))'$, z.B. $f(x) = x^x \Rightarrow f'(x) = x^x \cdot (x \ln x)' = x^x(\ln x + 1)$ [vgl. (5)]

(8) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$

Mit $y := \arcsin x$ ist $x = \sin y$, $\sqrt{1-x^2} = \cos y$, d.h. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Analog $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Folgerung. $(\arcsin x + \arccos x)' = 0$: Mit 4.6 Korollar 2 (siehe unten) folgt daraus

$$\arcsin x + \arccos x = \text{ konstant } = \pi/2 \; .$$

(9) $(\arctan x)' = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \cos^2(\arctan x)$. Mit $y = \arctan x$ ist $\tan y = x$, also $x^2 = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y} - 1$, $\cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$. Es folgt $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

4.5 Leibnizsche Regel

Falls $f : I \to \mathbb{K}$ differenzierbar und $f' : I \to \mathbb{K}$ wieder differenzierbar ist, so ist $f'' := (f')' : I \to \mathbb{K}$ definiert. **Höhere Ableitungen** $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$. Auch $\frac{d^n f}{dx^n}$.
Ist $y = f(t)$ etwa der Ort eines Teilchens zur Zeit t , ist $y' = f'(t)$ die Momentangeschwindigkeit und $y'' = f''(t)$ die Momentanbeschleunigung (Geschwindigkeitsänderung pro Zeiteinheit).

Satz (Leibniz-Regel). *Seien $f, g : I \to \mathbb{K}$ in $x \in I$ n-mal differenzierbar* $\Rightarrow$

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \; f^{(n-j)}(x) \; g^{(j)}(x) \; .$$

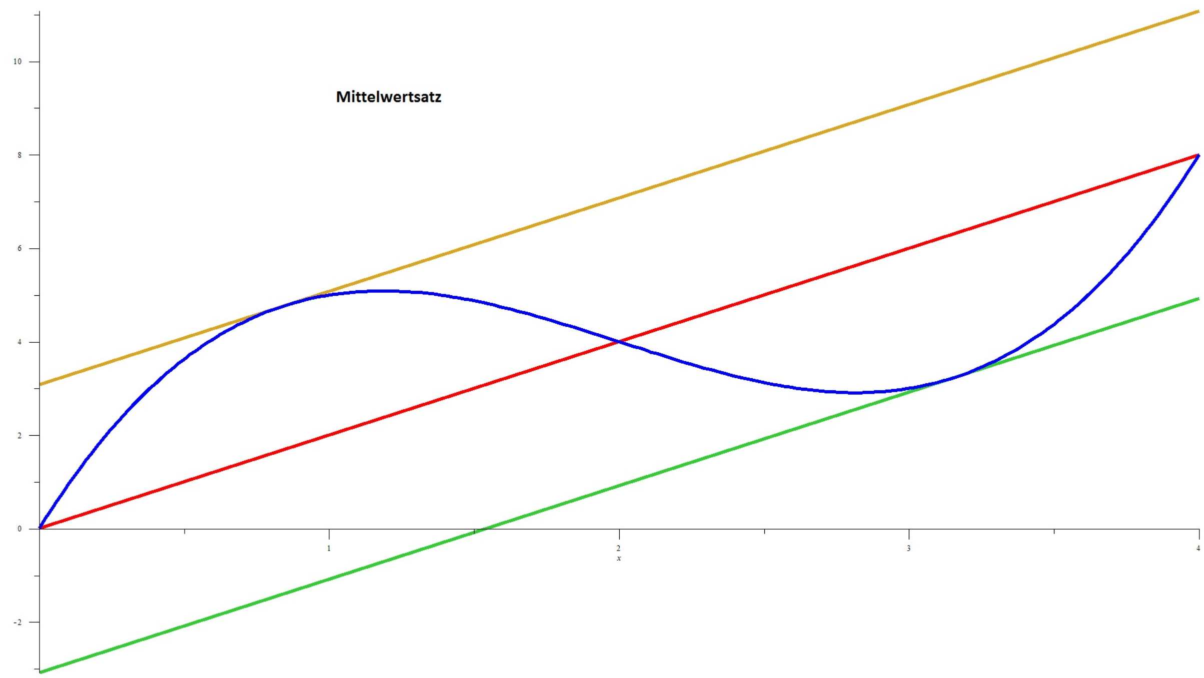
Beweis. Induktion, analog zum Beweis des Binomischen Lehrsatzes (Übung).

4.6 Der Mittelwertsatz

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben.

Mittelwertsatz (der Differentialrechnung). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann gibt es $\zeta \in (a, b)$ mit*

$$f(b) - f(a) = f'(\zeta)(b - a) \ , \quad \text{d.h.} \quad f'(\zeta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ .$$



Die beweistechnische Bedeutung des Mittelwertsatzes wurde zuerst von Cauchy erkannt. Wir zeigen sofort den

Verallgemeinerten Mittelwertsatz. *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Sei $g(b) \neq g(a)$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann gibt es $\zeta \in (a, b)$ mit*

$$(f(b) - f(a))g'(\zeta) = (g(b) - g(a))f'(\zeta),$$

d.h.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} \ .$$

Der Satz wird zurückgeführt auf den

Satz von Rolle. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, in (a, b) differenzierbar und $f(a) = f(b) = 0$. Dann gibt es $\zeta \in (a, b)$ mit $f'(\zeta) = 0$.*

Beweis (Rolle). O.B.d.A. gebe es $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) > 0$. Nach dem Maximumssatz nimmt f sein Maximum in einem Punkt $\zeta \in [a, b]$ an. Da $f(x_0) > 0 = f(a) = f(b)$, ist

$\zeta \in (a,b)$. Also gilt für alle $x \in [a,b]$, dass $f(\zeta) \geq f(x)$, d.h.

$$\frac{f(x)-f(\zeta)}{x-\zeta} \begin{cases} \leq 0 & x > \zeta \\ \geq 0 & x < \zeta \end{cases}$$

Da $f'(\zeta)$ existiert, folgt $f'(\zeta) = 0$. □

Beweis. (Verallgemeinerter Mittelwertsatz).
$h(x) := (f(b)-f(a))(g(x)-g(a)) - (g(b)-g(a))(f(x)-f(a))$ erfüllt $h(a) = h(b) = 0$.
Also gibt es ζ mit $h'(\zeta) = 0$, woraus die Behauptung folgt. □

Der Mittelwertsatz ist der Spezialfall $g(x) = x,\ g'(x) = 1 \neq 0$. Der Punkt $\zeta \in (a,b)$ ist i.a. nicht eindeutig. Eine typische andere Schreibweise des Mittelwertsatzes ist:

$$\forall x \in [a,b]\ \exists 0 < \theta < 1 \quad f(x) = f(a) + f'(a + \theta(x-a))(x-a) \ .$$

Korollar 1. *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, in (a,b) differenzierbar und es gelte für alle $x \in [a,b]$ $m \leq f'(x) \leq M$ mit $m, M \in \mathbb{R}$. Dann folgt*

$$m(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y-x) \qquad \text{für } a \leq x < y \leq b \ .$$

Speziell gilt für $\sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| \leq M$, dass $|f(y) - f(x)| \leq M|y-x|$:
f ist Lipschitz-stetig, wenn die Ableitung f' existiert und beschränkt ist (dies ist eine typische Anwendung des Mittelwertsatzes).

Beweis. Für $a \leq x < y \leq b$ gibt es $x < \zeta < y$ (nach dem Mittelwertsatz) mit $f(y) - f(x) = f'(\zeta)\ (y-x)$, also

$$m(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y-x) \ .$$

□

Korollar 2. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar mit $f' = 0$. Dann ist f konstant.*

Beweis. $m = M = 0$ in Korollar 1 $\Rightarrow$ $f(x) - f(a) = 0$, $f(x) = f(a)$ konstant. □

Bemerkung. Dies gilt auch für $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ durch Betrachtung von $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$.

4.7 Die Differentialgleichung der e-Funktion

Satz. *Seien $c \in \mathbb{K},\ f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ differenzierbar mit $f' = cf$. Dann ist $f(x) = f(0) \cdot e^{cx}$ für alle $x \in \mathbb{K}$.*

Beweis. Sei $F(x) := f(x)e^{-cx}$. Die Anwendung der Produktregel ergibt

$$F'(x) = f'(x)e^{-cx} - c\ f(x)e^{-cx} = (f' - cf)(x) \cdot e^{-cx} = 0 \ .$$

Aus 4.6 Korollar 2 folgt, dass F konstant ist, $F(x) = F(0) = f(0)$, also
$f(x) = F(x)e^{cx} = f(0)e^{cx}$. □

Diese **Differentialgleichung** $f' = cf$ tritt in der Physik häufig auf, etwa bei Wachstums- oder Zerfallsprozessen.

Beispiele.

(1) **Radioaktiver Zerfall**: Die Zahl der Teilchen eines radioaktiven Materials als Funktion der Zeit sei mit $n = n(t)$ bezeichnet, sie werde durch eine kontinuierliche Funktion angenähert. Die Zahl der pro Zeiteinheit zerfallenden Teilchen ist proportional zur vorhandenen Zahl, d.h.

$$\Delta n(t) = -k\; n(t)\; \Delta t \;,\; k > 0 \;\Rightarrow\; \text{Differentialgleichung } n'(t) = -kn(t) \;.$$

Also $n = n(0)e^{-kt}$. Die **Halbwertzeit** T ist gegeben durch $e^{-kT} = \frac{1}{2}$, $T = \frac{\ln 2}{k}$.

(2) **Barometrische Höhenformel**: Sei $p(x)$ der Luftdruck als Funktion der Höhe x über der Erdoberfläche. Dafür gilt ebenfalls die Differentialgleichung der e-Funktion $p'(x) = -\gamma\, p(x)$.

(3) **Abkühlung von Wasser**: Die Temperatur $T(t)$ als Funktion der Zeit ist gesucht: Die Abkühlung pro Zeiteinheit ist proportional zum Unterschied zur Umgebungstemperatur $\overline{T}$.

$$\Delta T = -k(T(t) - \overline{T})\; \Delta t \;,\; T'(t) = -k(T(t) - \overline{T}) \;.$$

Die Funktion $f(t) := T(t) - \overline{T}$ erfüllt dann $f'(t) = -k\; f(t)$.

4.8 Die Taylorsche Formel

Definition. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt **n-mal stetig differenzierbar** $:\Leftrightarrow f$ ist n-mal differenzierbar in I und $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ ist stetig.
Schreibweise: $f \in C^n(I)$.

Bemerkung. Eine differenzierbare Funktion ist i.a. **nicht stetig differenzierbar** .
Übungsbeispiel: $x^2 \sin 1/x$.

Taylorsche Formel. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar und $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar. Dann gibt es für alle $x, x_0 \in [a,b]$ eine Zahl $\theta,\ 0 < \theta < 1$, mit*

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \right) + R_n(f,x) \;, \tag{1}$$

wobei das Restglied $R_n(f,x)$ die Form hat

$$R_n(f,x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad \textbf{Lagrange – Restglied}.$$

Bemerkungen.

(1) Die Bedeutung der Taylorschen Formel besteht in der näherungsweisen Berechnung von f in einem ganzen Intervall um x_0 , sofern nur $f(x_0)$ und die Ableitungen $f^{(k)}(x_0)$ bekannt sind. Dabei ist x_0 “günstig” zu wählen, so dass Restterm $R_n(f,x)$ “klein” wird (Fehlerterm).

Taschenrechner nutzen zur Berechnung von $e^x, \ln x, \sin x, \cos x$ Reihenapproximationen. Man nennt (1) auch eine “**Entwicklung von f um den Punkt x_0**” .

(2) $n = 0$ ist der Mittelwertsatz.

(3) Setzt man $h := x - x_0$, hat die Taylorsche Formel die Form

$$f(x_0 + h) = (f(x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n) + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!} h^{n+1} .$$

Ist $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ für alle $x \in I$, wird also $f(x_0 + h)$ durch das **Taylorpolynom** n-ter Ordnung in h , $p_n(h) = f(x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n$, bis auf einen maximalen Fehler $\frac{M}{(n+1)!} h^{n+1}$ approximiert. Für $h \to 0$ ist also der Fehler $f(x_0 + h) - p_n(h)$ von der Größenordnung h^{n+1} : Eine **Differentiationsordnung** $(n + 1)$ ergibt eine **Fehlerordnung** h^{n+1} .

Beweis. Seien $x, x_0 \in [a, b]$ gegeben, $h = x - x_0$. Definiere $F : I \to \mathbb{R}$ durch

$$F(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z)}{k!} (x - z)^k .$$

Sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, in (a, b) differenzierbar. Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gibt es $0 < \theta < 1,\ \theta = \theta(x_0, x, g)$, so dass

$$F(z) - F(x_0) = \frac{g(z) - g(x_0)}{g'(x_0 + \theta k)}\ F'(x_0 + \theta k)\ ,\ k := z - x_0 . \tag{2}$$

Mit der Produktregel erhalten wir

$$\begin{aligned} F'(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}}{k!} (x - t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}\ k(x - t)^{k-1} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\ (x - t)^n . \end{aligned} \tag{3}$$

Ferner ist $F(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k$, $F(x) = f(x)$. Wähle $z = x$ in (2), $t = x_0 + \theta h$ in (3). Dann folgt

$$\begin{aligned} f(x) = F(x) &= F(x_0) + \frac{g(x) - g(x_0)}{g'(x_0 + \theta h)} F'(x_0 + \theta h) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{g(x) - g(x_0)}{g'(x_0 + \theta h)}\ \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{n!} (1 - \theta)^n h^n . \end{aligned} \tag{4}$$

Für $g(z) := (x - z)^{n+1}$ (z im Intervall $[x_0, x]$, im Inneren (x_0, x) ist $g'(z) \neq 0$) ist $\frac{g(x)-g(x_0)}{g'(x_0+\theta h)} (1 - \theta)^n = \frac{h}{n+1}$, womit sich das Lagrange-Restglied $\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}$ aus (4) ergibt. □

Bemerkung. Für $g(x) = (x - z)$ erhält man die **Cauchysche Form des Restgliedes**

$$R_n(f, x) = (1 - \theta)^n\ \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{n!} h^{n+1} .$$

Korollar. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(n + 1)$-mal differenzierbar mit $f^{(n+1)} = 0$. Dann ist f ein Polynom vom Grad $\leq n$.*

Beweis. $R_n(f, x) = 0$. □

4.9 Monotonie und Konvexität

Satz 1. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:*

(a) $(\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0) \Leftrightarrow f$ *ist monoton wachsend.*

(b) $(\forall x \in I \quad f'(x) > 0) \Rightarrow f$ *ist streng monoton wachsend.*

Bemerkungen.

i) Analog für monoton fallend und $f'(x) \leq 0$.

ii) "(b)$\Leftarrow$" ist im allgemeinen falsch: $f(x) = x^3$ in $x = 0$.

Beweis. Seien $\alpha < \beta,\ [\alpha, \beta] \subset I \Rightarrow f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha)f'(\theta)$ mit $\alpha < \theta < \beta$, somit: (f monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in I\ f'(x) \geq 0)$). Falls $f'(\theta) > 0,\ f(\beta) > f(\alpha)$. □

Definition. $f : I \to \mathbb{R}$ heißt **konvex** (**konkav**) :$\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in I,\ 0 < \lambda < 1$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \underset{(\geq)}{\leq} \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \ .$$

Also ist f **konvex**, wenn der Graph von f **unterhalb** der Sekante verläuft.

Satz 2. $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *sei zweimal differenzierbar. Dann gilt:*

$$(f \text{ ist konvex } \Leftrightarrow \ (\forall x \in (a, b) \quad f''(x) \geq 0)) \ .$$

Beweis. Forster S. 113.

4.10 Extrema

Eine typische Anwendung der Differentialrechnung ist das Auffinden von Extrema.

Definition.

(i) $f : I \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in I$ ein **lokales Maximum** (**Minimum**) :$\Leftrightarrow$

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \cap U_\delta(x_0) \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)).$$

(ii) Das Maximum (Minimum) von f in I heißt auch **absolutes Maximum** (**Minimum**).

(iii) $x_0 \in I$ ist ein (**lokales**) **Extremum** :$\Leftrightarrow$ x_0 ist ein (lokales) Maximum **oder** Minimum.

(iv) **Strenges Extremum, Maximum, Minimum** : $\Leftrightarrow \leq (\geq)$ durch $< (>)$ für $x \neq x_0$ ersetzt.

Das Maximum (Minimum) einer stetigen Funktion auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ wird im Inneren oder auf Rand $\{a, b\}$ angenommen. Falls dies im Inneren (a, b) angenommen wird, ist die Differentialrechnung hilfreich.

Theorem. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ *differenzierbar auf einer ε-Umgebung des* **inneren** *Punktes $x_0 \in I$. Dann gilt:*

(i) *Falls f in x_0 ein lokales Extremum hat, ist $f'(x_0) = 0$ (***notwendige Bedingung***).*

(ii) *Falls $f^{(n)}$ auf $U_\varepsilon(x_0)$ existiert mit $n \geq 2$ sowie*

$$f^{(k)}(x_0) = 0,\ k = 1, \ldots, n-1 \qquad \textit{und } f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

gilt, hat f_0 in x_0 ein lokales Extremum genau dann, wenn n gerade ist.

*Ist dies der Fall, ist x_0 ein lokales Maximum, sofern $f^{(n)}(x_0) < 0$ und ein lokales Minimum, sofern $f^{(n)}(x_0) > 0$ ist (***strenges*** Extremum,* **hinreichende Bedingung***).*

Bemerkungen:

(1) Der wichtigste Fall ist $n = 2 : f'(x_0) = 0\ ,\ f''(x_0) \neq 0$.

(2) Der Satz erfasst nicht alle Fälle: es kann $f^{(n)}(x_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten und dennoch ein Extremum in x_0 existieren (Beispiel: $x_0 = 0, f(x) = \exp(-1/x^2)$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$).

(3) $f(x) = x^3\ :\ f'(0) = 0,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = 6 \neq 0$: kein Extremum.

(4) Um die Extrema differenzierbarer Funktionen zu finden, finde die Nullstellen $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$ von f' in (a, b) : die lokalen und absoluten Extrema von f in $[a, b]$ sind unter den Punkten $a, b, \zeta_1, \ldots, \zeta_r$.

Beweis.

(1) f habe ein lokales Maximum in $x_0 \in I$. Für kleine $\delta > 0$ und alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < \delta$ gilt dann

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \begin{cases} \geq 0 & h < 0 \\ \leq 0 & h > 0 \end{cases} .\ \text{Da } f' \text{ existiert, folgt } f'(x_0) = 0\ .$$

(2) Seien $f^{(k)}(x_0) = 0,\ k = 1, \ldots, n-1$; o.B.d.A. $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Für kleine $|h|$ und geeignetes θ, $0 < \theta < 1$ gilt nach der Taylorschen Formel

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \theta h)}{(n-1)!} h^{n-1}\ . \qquad (*)$$

Da $f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) > 0$, folgt für kleine $|h|$ und $x = x_0 + \theta h$, dass

$$\frac{f^{(n-1)}(x)}{x - x_0} = \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} > 0\ .$$

Also ist $f^{(n-1)}(x_0+\theta h)\begin{Bmatrix} <0 & h<0 \\ >0 & h>0 \end{Bmatrix}$, sofern $|h|<\delta$ und $\delta>0$ klein genug ist .
Ist n **ungerade**, ist h^{n-1} stets >0 $(h\neq 0)$, also

$$f^{(n-1)}(x_0+\theta h)h^{n-1}\begin{Bmatrix} <0 & h<0 \\ >0 & h>0 \end{Bmatrix} \stackrel{(*)}{\Rightarrow} f \text{ hat } \textbf{kein} \text{ relatives Extremum .}$$

Ist n **gerade**, so ist $\operatorname{sgn} h^{n-1}=\operatorname{sgn} h$, d.h. für kleine $\delta>0$ gilt

$$f^{(n-1)}(x_0+\theta h)h^{n-1}>0 \quad \text{für alle } 0<|h|<\delta\ .$$

Daher folgt aus $(*)$: $f(x_0+h)-f(x_0)>0$, $0<|h|<\delta$, und f hat in x_0 ein strenges relatives Maximum. □

4.11 Extremalprobleme

Das **Fermatsche Prinzip** liefert das Brechungsgesetz der Optik: Ein Lichtstrahl gelangt von $P_1=(0,h_1)$ nach $P_2=(a,-h_2)$ auf dem zeitlich kürzesten Weg. In Glas und Luft sind die Geschwindigkeiten des Lichtes verschieden, etwa c_1 und c_2. Oberhalb der x-Achse sei Glas, unterhalb Luft. Wir betrachten den Streckenzug, der von P_1 über $(x,0)$ mit $0<x<a$ nach P_2 führt. Sei α der Einfallswinkel und β der Ausfallswinkel in $(x,0)$.
Die Länge des Weges in Glas ist $\sqrt{h_1^2+x^2}$.
Die Länge des Weges in Luft ist $\sqrt{h_2^2+(a-x)^2}$.
Die Gesamtzeit des Lichtes von P_1 nach P_2 ist gegeben durch

$$T(x)=\frac{1}{c_1}\sqrt{h_1^2+x^2}+\frac{1}{c_2}\sqrt{h_2^2+(a-x)^2}\ ,$$

also

$$T'(x)=\frac{1}{c_1}\frac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}}-\frac{1}{c_2}\,\frac{a-x}{\sqrt{h_2^2+(a-x)^2}}\ .$$

Mit $\sin\alpha=\frac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}}$, $\sin\beta=\frac{a-x}{\sqrt{h_2^2+(a-x)^2}}$ folgt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{c_1}{c_2}= \text{ konstant .}$$

Wegen $T''(x)=\frac{1}{c_1}\,\frac{h_1^2}{(h_1^2+x^2)^{3/2}}+\frac{1}{c_2}\,\frac{h_2^2}{(h_2^2+(a-x)^2)^{3/2}}>0$ ist T **minimal**.

Übungen:

1) Aus drei Brettern der Breite g soll eine Rinne von maximalem Fassungsvermögen gebaut werden. Bestimme den Winkel α für maximalen Querschnitt.
   $Q=g^2(\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha)$, $\alpha=\pi/6$ (Heuser, S. 305).

2) Kreisförmiger Querschnitt, maximaler Füllfaktor für die Spule eines Transformators.

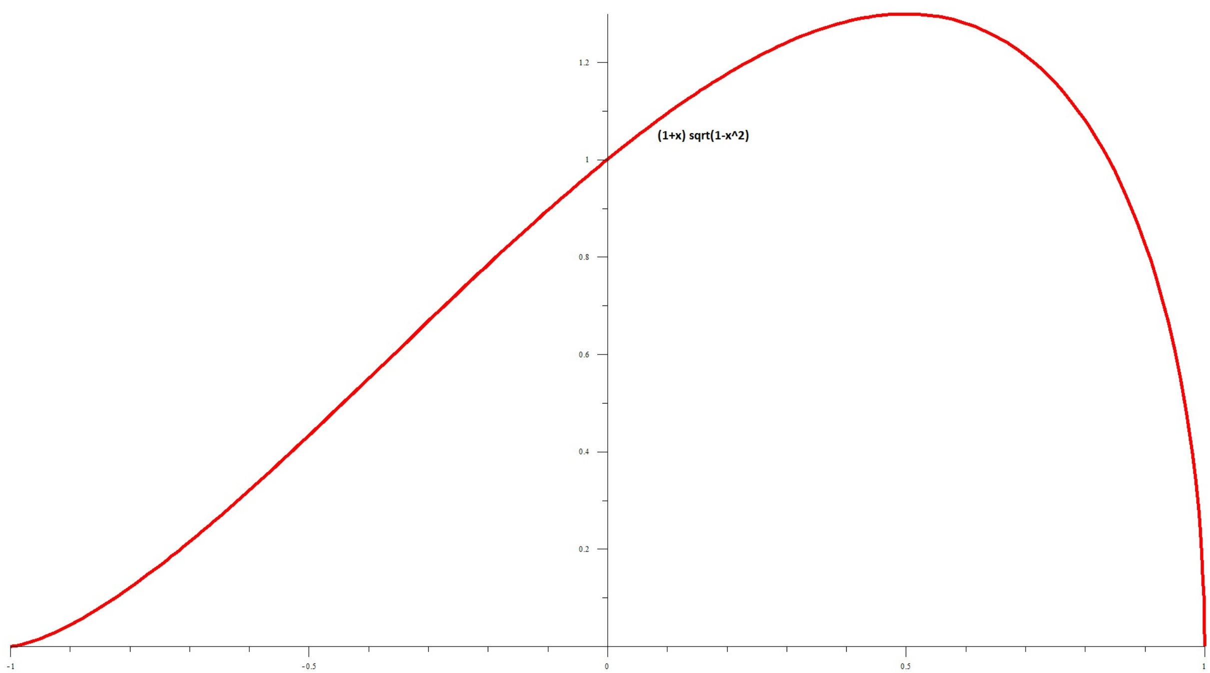
4.12 Kurvendiskussionen

Definition. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in I$ sei kein Randpunkt. f hat in x_0 einen **Wendepunkt** $:\Leftrightarrow$ f' hat in x_0 strenges lokales Extremum (d.h. die Tangente ändert ihre Drehrichtung).

Notwendig: Falls f in x_0 zweimal differenzierbar ist, $f''(x_0) = 0$.
Hinreichend: Falls f in x_0 dreimal differenzierbar ist, $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$.

Durch die Bestimmung der Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Positivitätsbereiche, Wachstumsbereiche von f lässt sich der qualitative Verlauf des Graphen von f herausfinden.

Beispiel. $f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$ auf $[-1, 1]$.
$f'(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}(1-2x)$, $f''(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\ \frac{2x^2-2x-1}{1-x^2}$ auf $(-1, 1)$.
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = 1/2 \\ x = -1 \end{pmatrix}$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.
f ist konvex auf $(-1, \frac{1-\sqrt{3}}{2})$,
f ist konkav auf $(\frac{1-\sqrt{3}}{2},\ 1)$,
$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ ist Wendepunkt von f ,
in $\frac{1}{2}$ nimmt f sein Maximum an, $f(\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$,
in $-1, 1$ liegen die Minima von f und auch die Nullstellen .
In 1 hat f eine senkrechte Tangente: $f'(x) \to \infty$ für $x \to 1$.



4.13 Die Regel von de l'Hospital

Satz (l'Hospital). *Seien* $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar,* g *und* g' *in* $[a, b) \neq 0$.

Es gelte $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} g(x) = \left\{\begin{matrix} 0 & (I) \\ \infty & (II) \end{matrix}\right\}$ *. Existiert dann der eigentliche oder uneigentliche Grenzwert* $\lambda := \lim\limits_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *, so existiert auch* $\lim\limits_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ *und es gilt*

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

Der Satz gilt auch formal für $b = \infty$ *(*$x \to \infty$*).*

Bemerkung. Formal: $(I)\ \frac{0}{0}$, $(II)\ \frac{\infty}{\infty}$: Unbestimmte Ausdrücke, die Antwort hängt von Art der Konvergenz ab.

Beweis.

(I) a) Seien $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch $F|_{[a,b)} = f$, $G|_{[a,b)} = g$ und $F(b) := 0 =: G(b)$ definiert. Dann sind F und G stetig, die stetigen Fortsetzungen von f bzw. g auf $[a,b]$. Mit dem verallgemeinerten Mittelwertsatz ergibt sich für F und G, dass es ein $\theta = \theta(x)$, $0 < \theta < 1$ gibt, so dass:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x) - F(b)}{G(x) - G(b)} = \frac{F'(b + \theta(x-b)}{G'(b + \theta(x-b))} \quad ,$$

Für $x \to b^-$ geht $b + \theta(x-b) \to b^-$, woraus die Formel folgt.

b) $b = \infty$: $y = \frac{1}{x}$ transformiert $x > a > 0$ in $0 < y < 1/a$. Setze $f_1(y) := f(\frac{1}{y}) = f(x)$, $g_1(y) := g(\frac{1}{y}) = g(x)$. Dann gilt:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-\frac{1}{x^2} f_1'(\frac{1}{x})}{-\frac{1}{x^2} g_1'(\frac{1}{x})} = \frac{f_1'(y)}{g_1'(y)}$$

konvergiert nach Annahme für $x \to \infty$, d.h. für $y \to 0$. Aus Teil a) folgt dann $\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{f_1'(y)}{g_1'(y)} = \lim\limits_{y\to 0^+} \frac{f_1(y)}{g_1(y)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

(II) Siehe Blatter.

□

Behandlung anderer Grenzwerte durch **Zurückführung** auf bekannte Fälle:

a) von $0 \cdot \infty$ auf $\frac{0}{0}$: $f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \begin{pmatrix} f \to 0 \\ g \to \infty \end{pmatrix}$.

b) von ∞^0, 0^0, 1^∞ durch Logarithmieren auf $0 \cdot \infty$.

Beispiele.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1} = 2$ (Der letzte Limes existiert, daher auch der erste. Die Rechtfertigung für die Gleichheit ist erst **nach** der Rechnung möglich; wir schreiben es aber der Kürze halber im folgenden ähnlich knapp auf).

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{x-\ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{1-\frac{1}{1+x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}}{\left(\frac{1}{1+x}\right)^2} = 2$ (zweimalige Anwendung).

(3) $\alpha > 0 : \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$.

"Der Logarithmus wächst für $x \to \infty$ langsamer als jede Potenz".

(4) $\begin{pmatrix} \alpha > 0 \\ b > 1 \end{pmatrix} : \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{b^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{b^x(\ln b)} = \cdots = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-[\alpha])\ x^{\alpha-[\alpha]-1}}{b^x(\ln b)^{[\alpha]+1}} = 0$, da $\alpha - [\alpha] - 1 \leq 0$ ist. "Jede Potenz wächst für $x \to \infty$ langsamer an als jede Exponentialfunktion mit Basis > 1".

(5) Typ $0 \cdot \infty$: $\alpha > 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0$.

(6) Typ 0^0 :

$\lim\limits_{x\to 0} x^x = \lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln x} = \exp\left(\lim\limits_{x\to 0} x\ln x\right) = e^0 = 1$.

4.14 Gleichmäßige Konvergenz

Für Taylorreihen und Potenzreihen ist ein weiterer Konvergenzbegriff von Interesse.

Definition. Seien $I \subset \mathbb{K}$ und $f_n : I \to \mathbb{K}$ Funktionen, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann heißt die Reihe $\sum\limits_{n\in N_0} f_n : I \to \mathbb{K}$ **gleichmäßig konvergent** auf $I :\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m > n \geq n_0,\ x \in I \quad \left| \sum_{j=n+1}^{m} f_j(x) \right| < \varepsilon\ .$$

Dieser **Begriff** ist stärker als die Konvergenz von $\sum\limits_{n\in N_0} f_n(x)$ in allen Punkten $x \in I$.

Beispiel. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ ist gleichmäßig konvergent in allen Intervallen $[-\alpha, \alpha]$ mit festem $0 < \alpha < 1$, jedoch nicht gleichmäßig konvergent in $(-1, 1)$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ ist aber konvergent für alle $x \in (-1, 1)$.

Kriterium von Weierstraß. *Falls es $c_n \geq 0$ gibt, so dass $|f_n(x)| \leq c_n$ für alle $x \in I$ gilt und $\sum\limits_n c_n < \infty$ ist, konvergiert $\sum\limits_n f_n$ gleichmäßig und absolut auf I.*

Beweis. Da $\sum\limits_n c_n < \infty$ ist, gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m > n \geq n_0\ \sum\limits_{j=n+1}^{m} c_j < \infty$. Also folgt für alle $x \in I$

$$\left| \sum_{j=n+1}^{m} f_j(x) \right| \leq \sum_{j=n-1}^{m} |f_j(x)| \leq \sum_{j=n+1}^{m} c_j \leq \varepsilon\ .$$

$\square$

Der Begriff “Gleichmäßige Konvergenz” von $\sum\limits_n f_n$ ist für Grenzvertauschungsprozesse wie $(\sum\limits_n f_n)' = \sum\limits_n f_n'$ etc. von Wichtigkeit. (Wir werden das später kennenlernen.)

Übung: $\sum\limits_{n=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$ konvergiert gleichmäßig in $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ (Forster I, S. 185).

Wir wenden uns der Konvergenz von Taylorreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ für C^∞-Funktionen f zu; sie sind spezielle Potenzreihen:

Definition. Eine (formale) **Potenzreihe um** z_0 ist eine Funktionenreihe der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$; $a_n, z_0 \in \mathbb{K}$.

4.15 Konvergenzradius von Potenzreihen

Satz. *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ *. Dann gibt es einen Wert* $0 \le r \le \infty$ *, so dass die Potenzreihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit*

- $|z-z_0| < r$ *(absolut) konvergiert*
- $|z-z_0| > r$ *divergiert*
- $|z-z_0| \le r-\varepsilon$ *gleichmäßig konvergiert, sofern* $0 < \varepsilon < r$ *ist.*

Man hat $r = \left(\overline{\lim\limits_n}\ \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$ *(mit* $\frac{1}{\infty} = 0,\ \frac{1}{0} = \infty$*).*

Definition. Die Zahl r heißt der **Konvergenzradius der Potenzreihe** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

Bemerkungen.

(1) Interpretation für $r = 0$: Konvergenz nur in $z = z_0$ und für $r = \infty$: Konvergenz für alle $z \in \mathbb{C}$.

(2) Im **reellen** Fall hat man ein Konvergenz**intervall** $(z_0 - r,\ z_0 + r)$, im **komplexen** Fall einen Konvergenz**kreis** $\{z \mid |z-z_0| < r\}$.

(3) Für $z \in \mathbb{K}$ mit $|z-z_0| = r$ kann Konvergenz oder Divergenz vorliegen.

Beispiele.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^\alpha z^n$ hat für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ den Konvergenzradius $r = \left(\overline{\lim\limits_n} \sqrt[n]{n^\alpha}\right)^{-1} = 1$, da $\sqrt[n]{n} \to 1$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ hat den Konvergenzradius $r = \left(\overline{\lim\limits_n} \sqrt[n]{n^n}\right)^{-1} = (\overline{\lim\limits_n}\ n)^{-1} = 0$, also konvergiert die Reihe nur für $z = 0$.

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ hat den Konvergenzradius $r = \left(\overline{\lim_n} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}\right)^{-1} = \underline{\lim_n} \sqrt[n]{n!} = \infty$, da $n! = 1 \cdot 2 \cdots n \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}$, $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{\frac{n}{2}} \to \infty$: die (Exponential-) Reihe für $\exp(z)$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. Sei $r := \left(\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$.

i) **Konvergenz.** O.B.d.A. sei $r > 0$. Sei $0 < \varepsilon < r$ und $z \in \mathbb{K}$ mit $|z - z_0| \leq r - \varepsilon$. Sei $\delta := \frac{1}{r-\varepsilon/2} - \frac{1}{r}$, $\delta > 0$. Nach 2.8, Satz 3 gilt für **fast alle** $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} \leq \left(\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|} + \delta\right) |z - z_0| = \frac{1}{r - \varepsilon/2}|z - z_0| \leq \frac{r - \varepsilon}{r - \varepsilon/2} =: q \ ,$$

$q < 1$. Also ist $|a_n(z - z_0)^n| \leq q^n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergiert (geometrische Reihe).

Nach dem Weierstraß-Kriterium ist die Potenzreihe in $|z - z_0| \leq r - \varepsilon$ gleichmäßig und absolut konvergent.

ii) **Divergenz.** Falls $z \in \mathbb{K}$ mit $|z - z_0| > r$ gegeben ist, gibt es $\varepsilon > 0$ mit $|z - z_0| = r + \varepsilon$. Sei $\delta := \frac{1}{r} - \frac{1}{r+\varepsilon} > 0$. Nach 2.8, Satz 3 gilt für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} \geq \left(\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|} - \delta\right) (r + \varepsilon) = 1 \ .$$

Nach dem Wurzelkriterium ist die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ in z divergent.

$\square$

4.16 Identitätssatz für Potenzreihen

Eine Folge der Rechenregeln für Reihen, des Satzes über das Cauchy-Produkt von Reihen und des Satzes 4.15 sind die

Rechenregeln für Potenzreihen. Seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ Potenzreihen um $z_0 \in \mathbb{C}$ mit Konvergenzradien r_1, r_2 . Sei $r := \min(r_1, r_2) > 0$. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < r$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z - z_0)^n \\ \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l(z - z_0)^l\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) (z - z_0)^n \end{aligned}$$

Identitätssatz. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe um $z_0 \in \mathbb{K}$ mit Konvergenzradius $r > 0$. Gilt für alle $z \in \mathbb{K}$ mit $|z - z_0| < r$, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = 0$ ist, folgt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Induktion über $m \in \mathbb{N}_0$: $m = 0$: für $z = z_0$ ergibt sich $a_0 = 0$.
$m \Rightarrow m+1$: Seien $a_0 = \cdots = a_m = 0$ schon gezeigt. Dann gilt für alle z mit $|z - z_0| < r$

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = 0 \ .$$

Für $z \in \mathbb{K}, z \neq z_0$ dividieren wir durch durch $(z - z_0)^{m+1}$ und erhalten

$$a_{m+1} + \left(\sum_{n=m+2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-m-2} \right) (z - z_0) = 0 \ .$$

Da für $|z - z_0| < r$ absolute Konvergenz vorliegt, gilt $\sum\limits_{n=m+2}^{\infty} |a_n| \ |z - z_0|^{n-m-2} \leq c < \infty$, und es folgt für $z \to z_0$ aus $|a_{m+1}| \leq c|z - z_0|$, dass $a_{m+1} = 0$ ist. □

4.17 Konvergenz von Taylorreihen

Ist f unendlich oft differenzierbar, liefert die Taylorsche Formel

$$f(x) = f(x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(f, x)$$

eine **formale** Potenzreihenentwicklung von f mit $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Probleme dabei:

1. Für welche x konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$?

2. Wenn sie konvergiert, stellt sie f dar, gilt also $R_n(f, x) \to 0$?

Beispiel. Die Frage 2. stellt i.a. in der Tat ein Problem dar: $f(x) = \begin{Bmatrix} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{Bmatrix}$ ist in $x_0 = 0$ unendlich oft differenzierbar mit $f^{(n)}(0) = 0$ $(n \in \mathbb{N}_0)$: **Übung.** Die formale Taylorreihe konvergiert also, nämlich gegen die 0-Funktion, stellt aber f nicht dar.

Satz. *Sei $I \subset \mathbb{K}$ und $f : I \to \mathbb{K}$ beliebig oft differenzierbar und $x_0 \in I$ ein innerer Punkt von I. Dann besitzt f die* **Taylorentwicklung** $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ *genau dann, wenn $R_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$. Dies ist z.B. für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x - x_0| < A$ erfüllt, wenn*

(1) $\exists c, B > 0 \ \forall |x - x_0| < A, \ n \in \mathbb{N} \qquad |f^{(n)}(x)| \leq c \ B^n$ *oder*

(2) $\exists c > 0 \ \forall |x - x_0| < A, \ n \in \mathbb{N} \qquad |f^{(n)}(x)| \leq c \ \frac{n!}{A^n} \qquad (\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\})$.

Beweis. Aus der Taylorformel folgt, dass die Taylorreihe von f genau dann in x gegen $f(x)$ konvergiert, wenn $R_n(f, x) \to 0$ geht. Im Fall (1) gilt

(1) $|R_n(f, x)| \leq c \ \frac{(B \ |x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} \ \leq \ c \ \frac{(BA)^{n+1}}{(n+1)!}$. Aber $(n+1)! \geq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$. Also folgt $|R_n(f, n)| \leq c \left(\frac{2BA}{\sqrt{n+1}} \right)^{n+1} \longrightarrow 0 \ (n \to \infty)$. In Fall (2) hat man

(2) $|R_n(f, x)| \to 0$, da $q^n \to 0$ für $q := \frac{|x-x_0|}{A} < 1$. □

4.18 Beispiele für konvergente Taylorreihen

(a) $f(x) = e^x \ : \ f^{(n)}(x) = e^x$. (1) gilt mit $c = 1,\ B = e$. Also konvergiert die Taylorreihe $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für alle $x \in \mathbb{K}$ gegen die Exponentialfunktion.

(b) $f(x) = \ln(1+x),\ f'(x) = \frac{1}{1+x},\ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Damit erhält man $f^{(n)}(0)/n! = (-1)^{n-1}/n \ \ (n \in \mathbb{N})$ und $f(0) = 0$. Für das Restglied gilt mit geeignetem $0 < \theta < 1$

$$|R_n(f,x)| = \left| \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}} \ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1} \ ,$$

wenn $0 \leq x \leq 1$ ist. Dann folgt $R_n(f,x) \to 0$. Im Fall $-1 < x < 0$ benutzen wir die Cauchy-Form des Restgliedes:

$$|R_n(f,x)| = \left| (-1)^n \ \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1} \right| = \left| \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \to 0$$

da $1 + \theta x \geq 1 - \theta$ und $1 + \theta x \geq 1 - |x|$ ist. Also konvergiert die Taylorreihe für $|x| < 1$ gegen $\ln(1+x)$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots$$

Sie ist auch für $x = 1$ konvergent; der Wert der alternierenden Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots$ ist $\ln 2$ nach dem

Abelschen Grenzwertsatz. Sei $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ für $-r < x - x_0 \leq r$ konvergent. Dann ist f in $(x_0 - r, x_0 + r]$ stetig. (Speziell ist f **in** $\mathbf{x_0 + r}$ stetig!)

(c) **Allgemeine binomische Formel.** Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und $f(x) = (1+x)^\alpha$. Dann ist $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\ (1+x)^{\alpha-n},\ \ \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha}{1}\ \frac{\alpha-1}{2} \cdots \frac{\alpha-n+1}{n}$.

Wir zeigen für $|x| < 1$: $\ \ (1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ (Allgemeine Binomische Formel). Für $\alpha \in \mathbb{N}$ ist dies auch richtig; es ergibt sich die abbrechende Reihe des Binomischen Lehrsatzes. Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ geht das Restglied gegen 0, wenn $|x| < 1$ ist: Im Fall $0 \leq x < 1$ hat man mit geeignetem $0 < \theta < 1$

$$|R_n(f,x)| = \left| \binom{\alpha}{n+1} x^{n-1} (1+\theta x)^{\alpha-(n+1)} \right| \leq \left| \binom{\alpha}{n+1} \right| \ |x|^{n+1} \ ,$$

sofern $n > \alpha - 1$ ist. Die Folge $x_n := \binom{\alpha}{n} |x|^n$ erfüllt

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| \ |x| \to |x| \ ;$$

nach dem Quotientenkriterium ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergent für alle x mit $|x| < 1$,

$$|R_n(f,x)| \leq x_{n+1} \to 0 \ .$$

Für $-1 < x < 0$ wenden wir wieder die Cauchysche Form des Restgliedes an, mit geeignetem $0 < \theta < 1$ hat man

$$|R_n(f,x)| = \left| \frac{\alpha \cdots (\alpha - n)}{1 \cdots n} \ x^{n+1}(1-\theta)^n \ (1+\theta x)^{\alpha-(n+1)} \right| \to 0 \ (n \to \infty) \ .$$

Speziell gilt: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 \cdots$ So kann man sukzessive $\sqrt{1+x}$ für $-1 < x < 1$ durch Polynome in x approximieren.

4.19 Division von Potenzreihen

Satz. *Sei $r > 0$. Die Potenzreihen $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ mögen für $|x| < r$ konvergieren, wobei $b_0 \neq 0$ ist. Dann lässt sich $\frac{f(x)}{g(x)}$ als Potenzreihe für $|x| < \varrho$ mit hinreichend kleinem $\varrho > 0$ darstellen. Die Koeffizienten der Reihe von $\frac{f}{g}$ können z.B. durch einen Koeffizientenvergleich bestimmt werden.*

Beweis. Siehe Walter.

Beispiel. Wir machen einen Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten für die tan-Reihe

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 \ldots .$$

Dabei kommen nur ungerade Potenzen vor, da tan eine ungerade Funktion ist. Es muss $\sin x = \cos x \cdot \tan x$, gelten, also

$$(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots) = (1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} \ldots) \ (c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \cdots) \ .$$

Wir multiplizieren die beiden Reihen auf der rechten Seite und vergleichen dann die Koeffizienten der Potenzen $x^1, x^3, x^5, \cdots$ auf der linken und der rechten Seite. Eine Benutzung des Identitätssatzes für Potenzreihen ergibt dann die Gleichungen

$$1 = 1 \cdot c_1 \ , \ -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{2!}c_1 + c_3 \ , \ \frac{1}{5!} = \frac{1}{4!}c_1 - \frac{1}{2!}c_3 + c_5 \ \cdots$$

Also ist $c_1 = 1$, $c_3 = \frac{1}{3}$, $c_5 = \frac{2}{15}, \cdots$, $\quad \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$ für kleine $|x| < \varrho$. Insbesondere folgt $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.

4.20 Die hyperbolischen Funktionen

Definition. Für $z \in \mathbb{C}$ wird durch $\cosh z := \frac{e^z+e^{-z}}{2}$ der **Cosinus-Hyperbolicus** und durch $\sinh z := \frac{e^z-e^{-z}}{2}$ der **Sinus-Hyperbolicus** definiert.

Es gilt für alle $x,\ y,\ z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\cosh z &= \cosh(-z)\ ,\ \sinh(z) = -\sinh(-z) \\
\cosh(x+y) &= \cosh x\ \cosh y + \sinh x\ \sinh y \\
\sinh(x+y) &= \sinh x\ \cosh y + \cosh x\ \sinh y \\
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1\ .
\end{aligned}$$

Definition. $\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}\ ,\ \coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x}\ .$
Man hat $(\cosh x)' = \sinh x\ ,\ (\sinh x)' = \cosh x$,
$(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x\ ,\ (\coth x)' = 1 - \coth^2 x\ .$

Die **Umkehrfunktionen** der hyperbolischen Funktionen bezeichnet man als Area-Funktionen, *Arsinh x* , *Arcosh x*, *Artanh x*, *Arcoth x* . Diese **Area-Funktionen** haben die Ableitungen

$$\begin{aligned}
(Arsinh\ x)' &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad x \in \mathbb{R} \\
(Arcosh\ x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad |x| > 1 \\
(Artanh\ x)' &= \frac{1}{1-x^2} \quad |x| < 1 \\
(Arcoth\ x)' &= \frac{-1}{x^2-1} \quad |x| > 1\ .
\end{aligned} \tag{1}$$

Es gelten ferner die Formeln

$$\begin{aligned}
Arsinh\ x &= \ln(x+\sqrt{1+x^2})\ ,\ Artanh\ x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\
Arcosh\ x &= \ln(x+\sqrt{x^2-1})\ ,\ Arcoth\ x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\ .
\end{aligned} \tag{2}$$

Reihenentwicklungen. Für alle $x \in \mathbb{C}$ konvergieren

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\ ,\ \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ .$$

Bemerkung. Ein homogenes Seil ohne Biegesteifigkeit (z.B. eine Hochspannungsleitung), das an zwei symmetrisch zur y-Achse liegenden Punkten aufgehängt ist, nimmt die Form $y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ einer **Kettenlinie** an; a gibt dabei die Höhe des tiefsten Punktes über der x-Achse an.