Inhaltsverzeichnis

3 Stetigkeit

3.1 Reelle und komplexe Funktionen

Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und seien $M, N \subseteq \mathbb{K}$. Sei $f : M \to N$ eine Funktion. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sprechen wir von einer **reellen Funktion**, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ von einer **komplexen Funktion**. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist häufig $M = I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall oder eine endliche Vereinigung von Intervallen.
Beispiele:

i) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = c$ **konstant**, $f(x) = ax$ **linear** $(a \in \mathbb{C})$,
$f(x) = ax + b$ **affin** $(a, b \in \mathbb{C})$.

ii) $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$: f heißt **Polynom** (in $x \in \mathbb{K}$) und $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ sind die **Koeffizienten von** f.

iii) $f(x) = p(x)/q(x)$; p, q Polynome: f heißt **rationale Funktion**,
mit dem Definitionsbereich $M := \{x \in \mathbb{K} |\ q(x) \neq 0\}$.

iv) $f(x) = \sqrt[n]{x}$ heißt die n**-te Wurzel**, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

v) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = |x|$ heißt **Betrags-**, $f(x) = [x]$ heißt **Gauß-** und $f(x) = \operatorname{sgn} x$ heißt **Signumfunktion**.

vi) $M \subseteq \mathbb{K}$, $f(x) := \chi_M(x) := \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \notin M \\ 1 & x \in M \end{array} \right\}$: f heißt **charakteristische Funktion** von M oder **Indikatorfunktion** von M.

vii) $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ ist die **Dirichlet-Funktion**.

Definition. *Seien $f : M \to \mathbb{K}$, $M, N \subseteq \mathbb{K}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gegeben. Definiere für $x \in M$ $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$, $(\alpha f)(x) := \alpha \cdot f(x)$, $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ und $(f/g)(x) := f(x)/g(x)$, letzteres auf $M' = \{x \in M |\ g(x) \neq 0\}$.*

Definition. *Eine Funktion $f : M \to N$ heißt beschränkt $:\Leftrightarrow \sup\limits_{x\in M} |f(x)| < \infty$.*

Analog – für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ – **nach oben (unten) beschränkt**.
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\mathrm{Sup\,f} := \sup \mathrm{f(M)}$, $\mathrm{Inf\,f} := \inf \mathrm{f(M)}$.

3.2 Grenzwerte von Funktionen

Definition. *Sei $M \subseteq \mathbb{K}$. $x \in \mathbb{K}$ heißt **Häufungspunkt von** M $:\Leftrightarrow$ In jeder Umgebung von x liegt mindestens ein von x verschiedener Punkt von M (woraus $|U \cap M| \geq \aleph_0$ folgt).*

Bemerkung. Ein Häufungspunkt von M muss nicht zu M gehören,
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ Häufungspunkt von } (0,1)\} = [0,1]$, $\mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ Häufungspunkt von } \mathbb{Q}\}$.

Also: x Häufungspunkt von $\{x_n |\ n \in \mathbb{N}\} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} x$ Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Zu „$\not\Leftarrow$": $x_n = a$ konstant. Es gilt aber auch hier der

Satz von Bolzano-Weierstraß: *Jede beschränkte unendliche Menge $M \subseteq \mathbb{K}$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt. Jeder Häufungspunkt von M ist Limes einer Teilfolge aus M.*

Definition. *Seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $M, N \subseteq \mathbb{K}$, $f : M \to N$ und $c \in \mathbb{K}$. Sei x_0 Häufungspunkt von M. Dann **hat** f **den Grenzwert** c **für** x **gegen** x_0 oder f **konvergiert gegen** c **für** x **gegen** x_0 $:\Leftrightarrow$*

$$\forall_{(x_n)\in M^{\mathbb{N}}} \ \left(\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = c\right).$$

Man schreibt dies auch als $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$ oder $f(x) \underset{x\to x_0}{\to} c$.

Satz. *$M, N \subseteq \mathbb{K}$, $f : M \to N$, x_0 Häufungspunkt von M. Dann sind äquivalent:*

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$.

(2) $\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{\delta>0} \quad \forall_{x\in M} \ (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon)$ *(oder $\leq \varepsilon$).*

(3) $\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{\delta>0} \quad f(U_\delta(x_0) \cap M) \subseteq U_\varepsilon(c)$.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Wäre (2) falsch, gäbe es $\varepsilon > 0$ mit:
$\forall_{n\in\mathbb{N},\ \delta=\frac{1}{n}} \quad \exists_{x_n\in M} \quad |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \ \wedge \ |f(x_n) - c| \geq \varepsilon$.
Also: $x_n \to x_0$, aber $f(x_n) \not\to c$. Widerspruch zu (1).

(2) $\Rightarrow$ (1): Sei $(x_n) \in M^{\mathbb{N}}$ Folge mit $x_n \to x_0$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ mit:

$$\forall_{x\in I} \quad (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon).$$

Aber $\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n \geq n_0} \quad |x_n - x| < \delta$. Für $n \geq n_0$ also $|f(x_n) - c| < \varepsilon$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Nur Umformulierung in Termen des Umgebungsbegriffes. $\square$

Beispiele:

i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \operatorname{sgn}(x)$. Seien $M_1 := \mathbb{R}_-$, $M_2 := \mathbb{R}_+$ und $f_1 := f|_{M_1}$ $f_2 := f|_{M_2}$. Dann ist $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = -1, \quad \lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = 1$.

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{4-x} = 2$, da $|\sqrt{4-x} - 2| = \left|\frac{x}{\sqrt{4-x}+2}\right| \leq \left|\frac{x}{2}\right|$.
Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta := 2\varepsilon$. Aus $|x| < \delta$ folgt dann $|\sqrt{4-x} - 2| < \varepsilon$.

iii) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1} = n$, da $\dfrac{x^n - 1}{x-1} = 1 + x + \cdots + x^{n-1} \to n$ für $x \to 1$.

Rechenregeln. *Seien $M \subseteq \mathbb{K}$, $f : M \to \mathbb{K}$ und x_0 Häufungspunkt von M. Dann gilt:*

(a) Ist $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c, \quad \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = d$, existieren folgende Limites und es gilt:

*$\lim\limits_{x\to x_0}(f \pm g)(x) = c \pm d, \quad \lim\limits_{x\to x_0}(f \cdot g)(x) = c \cdot d$ und, falls zusätzlich $d \neq 0$ ist, $\lim\limits_{x\to x_0}(f/g)(x) = c/d$ (**Linearität** und Multiplikativität des Limes).*

*(b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Falls es $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in U_{\delta(x_0)\setminus\{x_0\}}$ gilt, dass $f(x) \leq g(x)$ ist, folgt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ (**Monotonie** des Limes).*

3.3 Einseitige oder uneigentliche Grenzwerte

Variationen des Grenzwert-Begriffes von **reellwertigen** Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$:

Definition. *$f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ mit $(x_0, x_0 + \gamma) \subset I$ für ein $\gamma > 0$. Dann hat f den **rechtsseitigen Grenzwert** c **für** $x \to x_0$ $:\Leftrightarrow \forall_{(x_n)\subset(x_0,x_0+\gamma)} \ (x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to c)$.*

Notation: $\lim\limits_{x\searrow x_0} f(x) := \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) := c$.

Analog: linksseitiger Grenzwert c **für** $x \to x_0$, $\lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = c$.

Beispiel: $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$.

Definition. $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ ***hat den Grenzwert*** c ***für*** $x \to \infty$ $:\Longleftrightarrow$

$\forall_{(x_n)\subset(a,\infty)} \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c\right)$.

Notation: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) := c$. Dies gilt genau dann, wenn: $\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{\delta>0} \quad \forall_{x\geq 1/\delta} \quad |f(x) - c| < \varepsilon$.

Beispiel: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-1/x}{1+1/x} = 1$, da $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Analog **Divergenz gegen ∞:** $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$.

Definition. *Seien $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von I. f* ***geht in*** *x_0* ***gegen*** *∞*

$$:\Leftrightarrow \qquad \forall_{(x_n)\subset I}\ (x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to \infty).$$

Notation: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

3.4 Stetigkeit

Anschaulich sind stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ solche, deren Graph sich mit dem Stift ohne Absetzen zeichnen lässt: Ecken sind zugelassen (wie bei $|x|$ in 0), aber Sprungstellen nicht. Die Anschauung kann aber bei pathologischen Funktionen täuschen.
Also: Annäherung $x \to x_0$ ergibt $f(x) \to f(x_0)$ (nicht nur $f(x) \to c$).

Definition. *Seien $M, N \subseteq \mathbb{K}$, $f : M \to N$.*

i) Für $x_0 \in M$ ist f ***stetig in*** *x_0 $:\Leftrightarrow f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.*

ii) f ist ***stetig (auf*** *M**)** $:\Leftrightarrow \forall_{x_0\in M}$ f ist stetig in x_0.*

Gemäß Satz 3.2. gilt das (für **kleine** $\varepsilon > 0$ interessante)

$\varepsilon-\delta-$**Kriterium**. f ist stetig in $x_0 \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in M}\ (|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon)$.
Folgerungen:

i) Ist f stetig in x_0 und $f(x_0) > 0$, gibt es ein $\delta > 0$ mit:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > \frac{f(x_0)}{2}, \quad \text{also} \quad f(x) \neq 0.$$

ii) f ist stetig in $x_0 \Leftrightarrow \forall_{(x_n)\subseteq M}\ (x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_0) \to f(x_0))$.

Beispiele:

i) $\mathrm{Id} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $\quad x \mapsto x$ ist stetig.

ii) $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $\quad x \mapsto x^2$ ist stetig: $|x^2 - y^2| \le (|x| + |y|)\ |x - y|$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2|x|+1}$. Für $|x - y| < \delta$ folgt $|x^2 - y^2| \le [|x| + (|x| + \delta)]\ |x - y| \le \varepsilon$ (o.B.d.A. $\delta \le 1$).

iii) $I = [a, b)$, $f = \chi_I \Rightarrow f$ ist unstetig in a und in b, sonst stetig.

iv) $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ ist nirgendwo stetig: $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists (x_n) \subseteq \mathbb{Q}$, $(y_n) \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $\quad x_n \to a \leftarrow y_n$. Aber dann ist $f(x_n) = 1 \neq 0 = f(y_n)$.

v) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ ist stetig, da $|\bar{z} - \bar{w}| = |\overline{z - w}| = |z - w|$.

Rechenregeln: *Sei $M \subseteq \mathbb{K}$ und seien $f, g : M \to \mathbb{K}$ stetig in x_0 (bzw. auf M). Dann gilt:*

(1) $f \pm g,\ f \cdot g,\ |f|$ *sind stetig in x_0 (bzw. auf M).*

(2) f/g *ist stetig in x_0, wenn $g(x_0) \neq 0$ ist (bzw. auf $M' = \{x \in M|\ g(x) \neq 0\}$).*

(3) $\mathbb{K} = \mathbb{R}:\ \min(f, g)$ *und* $\max(f, g)$ *sind stetig in x_0 (auf M).*

Dies folgt für $f \pm g,\ f \cdot g,\ f/g$ aus den Rechenregeln für lim y_n, für den Betrag aus

$$\big||f(x_n)| - |f(x)|\big| \leq |f(x_n) - f(x)|$$

und für $\max(f, g)$ aus: $\max(f, g) = \dfrac{1}{2}(|f + g)| + |f - g|)$.

Komposition stetiger Funktionen: *Seien $L, M, N \subseteq \mathbb{K},\ f : L \to M,\ g : M \to N$ stetig (bzw. f stetig in $x_0 \in L$, g stetig in $f(x_0) \in M$). Dann ist $g \circ f : L \to N$ stetig (in $x_0 \in L$).*

Beweis. Sei $(x_n) \subset L$ mit $x_n \to x_0 \in L \underset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} f(x_n) \to f(x_0)$ in M.
$\underset{g \text{ stetig}}{\Longrightarrow} g(f(x_n)) \to g(f(x_0)),\ (g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x_0)$, d.h. $\lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0)$. $\square$

Weitere Beispiele:

(a) Polynome $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j, \quad a_j \in \mathbb{K}$, sind stetig auf $\mathbb{K}$.

(b) Rationale Funktionen $f = p/q$; $\quad p, q$ Polynome;
sind stetig auf $M = \{x \in \mathbb{K}|\ q(x) \neq 0\}$.

(c) $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto |x| \quad$ ist stetig: siehe Beispiel i) oben und Regel (1).

(d) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^r \quad$ mit $\quad r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ist stetig. Denn: $x \mapsto x^p$ ist stetig nach (a). Mit dem Kompositiossatz reicht es also, die Stetigkeit von $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^{1/q}$ zu zeigen. Aber $|\sqrt[q]{x} - \sqrt[q]{x_0}| = \left| \dfrac{x - x_0}{\sqrt[q]{x}^{q-1} + \cdots + \sqrt[q]{x_0}^{q-1}} \right| \leq \dfrac{1}{\sqrt[q]{x_0}^{q-1}} |x - x_0|$ für $x_0 > 0$, ($x_0 = 0$ trivial).

(e) $f(x) = \sqrt[4]{|x|^3 + 2x^2 + 1}$: f ist eine Komposition stetiger Funktionen, also ist f stetig auf $\mathbb{R}$. (Es ist $|x|^3 + 2x^2 + 1 > 0$.)

Definition. *$f : I \to \mathbb{R}$ ist **rechtsseitig stetig** in $x_0 \in I \subseteq \mathbb{R} :\Leftrightarrow \lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$.*

*Man hat: $f : I \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in I \Leftrightarrow f$ ist **rechts- und linksseitig stetig** in $x_0 \in I$.*

3.5 Stetigkeit, offene und abgeschlossene Mengen

Satz 1. *Sei $M \subseteq \mathbb{K}$ und $f : M \to \mathbb{K}$. Dann gilt:*
(f ist stetig in $M \Leftrightarrow \forall_{U \subset \mathbb{K} \text{ offen}}\ f^{-1}(U)$ ist offen relativ zu M).
Letzteres bedeutet: Es gibt eine offene Menge $O \subset \mathbb{K}$ mit $f^{-1}(U) = O \cap M$.

Beweis. „$\Leftarrow$" Sei $x_0 \in M$, $\varepsilon > 0$. Sei $U := U_\varepsilon(f(x_0))$. Dann ist
$f^{-1}(U) \cap M = \{x \in M |\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}$ offen relativ zu M, also
$\exists_{\delta>0} \quad U_\delta(x_0) \cap M \subseteq f^{-1}(U) \cap M : (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.

„$\Rightarrow$" Angenommen, es gäbe eine offene Menge $U \neq \emptyset$, so dass $\emptyset \neq f^{-1}(U)$ nicht offen relativ zu M wäre, d.h. $\exists_{y \in f^{-1}(U)} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad M \cap U_{1/n}(y) \not\subseteq f^{-1}(U)$, also $\exists_{y_n \in M}, |y - y_n| < 1/n$, aber $y_n \notin f^{-1}(U)$, $f(y_n) \notin U$. Da $\lim\limits_n \ y_n = y$ und f stetig ist, folgte $\lim\limits_n f(y_n) = f(y)$. Das steht aber im Widerspruch zu $(f(y) \in U \ \wedge \ f(y_n) \notin U)$. □

Satz 2. *$A \subset \mathbb{K}$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ A enthält sämtliche Häufungspunkte von A.*
$\Leftrightarrow$ A enthält die Limits aller Folgen aus A.

Beweis. Die letzte Äquivalenz gilt, da Häufungspunkte Limites von Teilfolgen sind.

„$\Rightarrow$" x sei Häufungspunkt von $A \Rightarrow \ \exists_{(x_n) \subset A \setminus \{x\}}, \ x_n \to x$. Wäre $x \notin A$, gäbe es – mit CA offen – eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(x) \subseteq CA : \ \exists_{n_0} \quad \forall_{n \geq n_0} \quad x_n \in U_\varepsilon(x) \subset CA, \ x_n \notin A.$ ↯

„$\Leftarrow$" Sei $x \in CA$. Zu zeigen: $\exists_{\varepsilon>0} \quad U_\varepsilon(x) \subseteq CA$. Wäre das falsch, so wäre für alle $n \in \mathbb{N} : \quad U_{1/n}(x) \subsetneqq CA$, d.h. $\exists_{(x_n) \subset A \setminus \{x\}} \quad |x - x_n| < 1/n$: also ist x Häufungspunkt von A, d.h. $x \in A$. ↯ □

3.6 Zwischenwertsatz

Satz. *Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ mit $f(x_0) \underset{\neq}{>} \alpha$. Dann gibt es eine Umgebung U von x_0, so dass $f(x) \underset{\neq}{>} \alpha$ für alle $x \in U \cap I$ ist. Also sind $\{x \in I |\ f(x) > \alpha\}$ bzw. $\{x \in I |\ f(x) \neq \alpha\}$ offene Mengen.*

Beweis. Setze $\varepsilon := f(x_0) - \alpha$. Dann ist $\varepsilon > 0$ und es gibt $\delta = \delta(\varepsilon)$ mit:
$\forall_{x \in I} \quad (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.
Es folgt $f(x) \geq f(x_0) - |f(x_0) - f(x)| > f(x_0) - \varepsilon = \alpha$ für $|x - x_0| < \delta$. Im Fall $\neq$ verläuft der Beweis ähnlich. Von Interesse ist insbesondere $\alpha = 0$. □

Korollar 1. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann sind $\{x \in I |\ f(x) = \alpha\}$ und $\{x \in I |\ f(x) \leq \alpha\}$ abgeschlossene Mengen.*

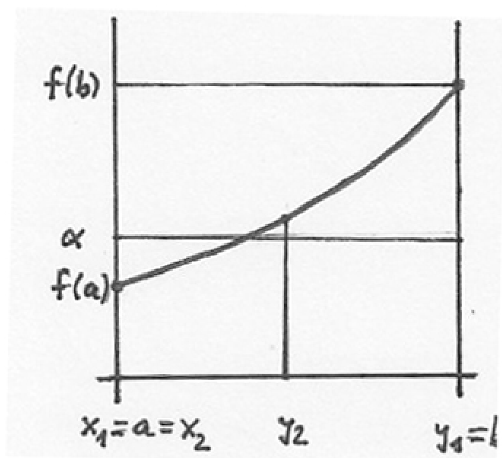
Beweis. $C\{x \in I |\ f(x) = \alpha\} = \{x \in I |\ f(x) \neq \alpha\}$ ist offen. □

Zwischenwertsatz. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) \neq f(b)$. Dann gibt es für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = \alpha$.*

Beweis. O.B.d.A. sei $f(a) < f(b)$. $x_1 := a$, $y_1 := b$. Setze ferner für $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} := \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x_n + y_n}{2}, & \text{falls} \quad f\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) \leq \alpha \\ x_n & \text{sonst} \end{array} \right\}$$

$$y_{n+1} := \left\{ \begin{array}{ll} y_n, & \text{falls} \quad f\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) \leq \alpha \\ \frac{x_n + y_n}{2} & \text{sonst} \end{array} \right\}.$$



Diese Halbierung ergibt $f(x_n) \leq \alpha \leq f(y_n),\ n \in \mathbb{N}$.

$$|y_n - x_n| = \frac{1}{2}\,|y_{n-1} - x_{n-1}| = \cdots = \frac{1}{2^{n-1}}\,|b-a|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Jede Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\xi_n \in [x_n, y_n]$ ist also Cauchyfolge, denn für $m > n$ gilt mit $\xi_m \in [x_m, y_m] \subseteq [x_n, y_n]$, dass $|\xi_m - \xi_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}\,|b-a| < \varepsilon$ für alle $m > n \geq n_0$ richtig ist. Es folgt $\xi_n \to x_0 \in [a,b]$. Der Punkt x_0 ist unabhängig von der speziellen Wahl von $\xi_n \in [x_n, y_n]$: bilde sonst die Doppelfolge ξ_n, ξ_n', die auch Cauchyfolge ist, also auch konvergent ist, $x_0 = x_0'$. Speziell $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$. Die Stetigkeit von f impliziert

$$f(x_0) = \lim_n \, f(x_n) \leq \alpha \leq \lim_n \, f(y_n) = f(x_0), \quad f(x_0) = \alpha.$$

$\square$

Das Beweisverfahren kann zum Auffinden von Näherungen von Nullstellen ($\alpha = 0$) von stetigen Funktionen, etwa Polynomen, genutzt werden.

Korollar 2. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:*

(a) $f([a,b])$ *ist ein Intervall (möglicherweise entartet).*

(b) *Falls* $\forall_{x\in[a,b]} \quad f(x) \neq \alpha$, *so gilt* $\quad (\forall_{x\in[a,b]} \quad f(x) > \alpha)$ ***oder*** $(\forall_{x\in[a,b]} \quad f(x) < \alpha)$.

(c) *Jedes Polynom* p ***ungeraden Grades*** *besitzt wenigstens eine reelle Nullstelle.*

3.7 Der Maximumssatz für stetige Funktionen

Definition. *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall.* I *ist* ***kompakt*** $:\Leftrightarrow$ I *ist beschränkt und abgeschlossen, d.h.* $I = [a,b]$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

Satz vom Maximum. Sei $I = [a,b]$ *ein kompaktes Intervall und sei* $f : I \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann ist die Funktion* f *beschränkt und nimmt ihr Supremum als Maximum an:*
Es gibt $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \max\ f(I) = \sup\ f(I)$ *(analog für das Minimum).*

Beweis. Sei $A := \sup\ \{f(x) |\ x \in I\} \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Es gibt eine Folge $x_n \in I$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ (ggf. uneigentlicher Limes).
Die Folge $(x_n) \subset [a,b]$ hat nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $x_{n_k} \to \xi \in [a,b] = I$. Da f stetig in I ist, folgt

$$f(\xi) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = A \in \mathbb{R}.$$

Somit ist $f(I)$ nach oben beschränkt und $\max f(I) = f(\xi)$. $\square$

Bemerkung. Auf anderen Intervallen ist der Satz i.a. falsch. Etwa:
$f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$ ist stetig, aber unbeschränkt.
Auf $[1,\infty)$ hat $x \mapsto 1/x$ kein Minimum, aber das Infimum 0.

Das Maximum kann, aber muss nicht in den Randpunkten von I liegen.
Als Folgerung beweisen wir den

Satz. *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $f : I \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann gilt:*

(1) $f(I)$ *ist wieder ein Intervall.*

(2) I *kompakt* $\Rightarrow f(I)$ *kompakt.*

Beweis. (1) $f =$ konstant $= c \Rightarrow f(I) = [c,c]$. Ist $f \neq$ konstant, folgt aus dem Zwischenwertsatz: $\forall_{\alpha,\beta\in f(I)}$, $\alpha < \beta : [\alpha,\beta] \subseteq f(I)$. Mit Korollar 2 aus 3.6 folgt: $J := f(I)$ ist Intervall. Denn: Seien $a := \inf J$, $b := \sup\ J$ und $x \in (a,b)$. Nach Definition des Infimums und Supremums gilt: $\exists_{\alpha,\beta} \in J \quad a < \alpha < x < \beta < b$. Wir wissen $[\alpha,\beta] \subseteq J = f(I)$, also $x \in J$. Somit $(a,b) \subseteq J : J$ ist ein Intervall (dabei ist unbestimmt, ob a oder b zu J gehören).

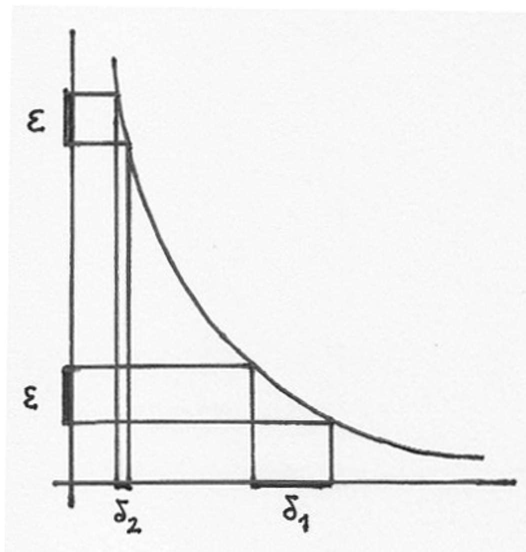
(2) $I = [a,b]$ kompakt $\Rightarrow A := \min\ f(I) \in f(I)$, $B := \max\ f(I) \in f(I)$.
Zusammen mit (1) gilt also $f(I) = [A,B]$. $\square$

3.8 Gleichmäßige Stetigkeit

Definition. *Seien $M, N \subseteq \mathbb{K}$. Eine Funktion $f : M \to N$ heißt* ***gleichmäßig stetig*** *(auf M)* $:\Leftrightarrow \quad \forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{\delta>0} \quad \forall_{x,y\in M} \quad (|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon)$.

Vergleich: $f : M \to N$ stetig (auf M):$\Leftrightarrow$
$\forall_{x\in M} \quad \forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{\delta=\delta(x)>0} \quad \forall_{y\in M} \quad (|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon)$.
Bei gleichmäßiger Stetigkeit darf δ nur von ε, aber nicht von x abhängen. Offensichtlich sind gleichmäßig stetige Funktionen stetig. Die Umkehrung ist i.a. falsch:

Beispiel: Die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$ ist stetig, aber **nicht** gleichmäßig stetig: Wäre f gleichmäßig stetig, gäbe es zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ mit $|x-y| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < 1$.



Aber für große $n \in \mathbb{N}$ erfüllen $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{2n}$, dass $|x-y| < \delta$ $(n \geq n_0 \geq \frac{1}{2\delta})$; hingegen ist $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = n > 1 \qquad ↯$.
Auf **kompakten** Intervallen ist die Situation anders:

Satz. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig auf I.*

Der Satz ist wichtig, um später die Integrierbarkeit stetiger Funktionen zu beweisen.

Beweis. Indirekt: Wäre f nicht gleichmäßig stetig, gäbe es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n, x_n' \in I = [a,b]$ existierten mit

$$|x_n - x_n'| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(x_n')| \geq \varepsilon$$

(setze sukzessive $\delta = 1/n$). Mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß folgt, dass die beschränkte Folge (x_n) eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k}) \subset I$ hat. Sei $\xi = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Da I

abgeschlossen ist, folgt $\xi \in I$. Wegen $|x_{n_k} - x'_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ ist auch $\xi = \lim_{k\to\infty} x'_{n_k}$. Da f stetig in ξ ist, folgt

$$0 = f(\xi) - f(\xi) = \lim_{k\to\infty} (f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})),$$

im Widerspruch zu $|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon > 0$. ↯ □

3.9 Stetigkeit der Umkehrfunktion

Stetige Funktionen auf Intervallen sind umkehrbar, wenn sie monoton sind. Man verwechsle die Umkehrfunktion f^{-1} nicht mit $\frac{1}{f}$: für $f(x) = x^2$ ist $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, aber $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{x^2}$. Die Spiegelung des Graphen von f an der Geraden $y = x$ ergibt den Graphen von f^{-1}.

Satz. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$*

(1) f ist injektiv $\Leftrightarrow$ f ist streng monoton (wachsend oder fallend) (auch f^{-1}!).

(2) f ist injektiv $\Rightarrow$ $J := f(I)$ ist Intervall und $f^{-1} : J \to I$ ist stetig.

Beweis. (1) „$\Leftarrow$" ist klar.
„$\Rightarrow$" Im Fall $I = [a, b]$: O.B.d.A. sei $f(a) < f(b)$. Dann ist $f(a) = \min f(I)$ und $f(b) = \max f(I)$. Würde $\min f(I)$ in $c \in (a, b)$ angenommen, gäbe es nach dem Zwischenwertsatz in (c, b) eine weitere Stelle mit dem Funktionswert $f(a)$, im Widerspruch zur Injektivität von f.
Wäre f nicht streng monoton wachsend, gäbe es $x_1, x_2 \in I$ mit

$$x_1 < x_2 \quad \text{und} \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

Dann ist $f(a) \leq f(x_2) \leq f(x_1)$: $\quad \exists_{z\in[a,x_1]} \quad f(z) = f(x_2)$ (Zwischenwertsatz),
$x_2 \notin [a, x_1]$: Widerspruch zur Injektivität von f, da $x_2 \neq z$.

(2) $J := f(I)$ ist nach 3.7 ein Intervall. Sei f streng monoton wachsend. Sei x_0 kein Randpunkt von I und $\varepsilon > 0$ so klein, dass $[x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon] \subset I$. Sei $y_0 := f(x_0)$. Sei $y_1 := f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 := f(x_0 + \varepsilon)$, $\delta := \min(y_0 - y_1,\ y_2 - y_0)$. Dann ist $\delta > 0$ und

$$|y - y_0| < \delta \Rightarrow y_1 \leq y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \leq y_2.$$

Da f monoton ist, folgt $x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_0 + \varepsilon,\ |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$.
In Randpunkten x_0 betrachte man einseitige Umgebungen. □

Beispiel: $\mathbb{R}^+ \underset{x \,\longmapsto\, x^n}{\longrightarrow} \mathbb{R}^+$ ist stetig. Somit ist auch die n-te Wurzel $\mathbb{R}^+ \underset{x \,\longmapsto\, x^{1/n}}{\longrightarrow} \mathbb{R}^+$ stetig.

3.10 Die Exponentialfunktion

In 1.16 wurde die p-te Potenz a^p für $a > 0$, $p \in \mathbb{Q}$ definiert. Wir wollen allgemeine Potenzen a^r für beliebige $r \in \mathbb{R}$ mittels der Exponentialfunktion definieren.
In 2.5 gesehen: $e := \lim_n (1 + 1/n)^n$ existiert.

In 2.11 gesehen: $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{K}$.
In 2.14 gesehen: $x, y \in \mathbb{K} \Rightarrow \exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y), \quad \exp(0) = 1,$
$\exp(-x) = 1/\exp(x), \quad \exp(x) > 0.$

Satz. $\forall_{x\in\mathbb{Q}} \quad e^x = \exp(x)$. *Insbesondere ist* $e = \exp(1)$, *d.h.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Damit ist dann folgende Definition sinnvoll:

Definition. $\forall_{z\in\mathbb{C}} \quad e^z := \exp(z)$. *Es gilt:* $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, $e^0 = 1$.

Beweis. Zunächst ist $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$, denn für $|x| < 2$ gilt

$$\left|\frac{\exp(x)-1}{x}\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|x|}{2}\right)^k = \frac{|x|}{2-|x|} \to 0 \text{ für } x \to 0.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \exp(x) - \left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n &= \exp\left(\tfrac{x}{n}\right)^n - \left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n \\ &= \underbrace{\left[\exp\left(\frac{x}{n}\right) - \left(1+\frac{x}{n}\right)\right]}_{=:\kappa_n} \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{x}{n}\right)^k \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1-k}\right]}_{=:\sigma_n}. \end{aligned}$$

Nach der Vorbemerkung konvergiert $\kappa_n = \frac{x}{n}\left(\frac{\exp(x/n)-1}{x/n} - 1\right) =: \frac{x}{n} \cdot r_n$ gegen 0, da $r_n \to 0$.

Nun ist $\left|\exp\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leq \exp\left(\frac{|x|}{n}\right)$, $\left(1+\frac{x}{n}\right) \leq 1 + \frac{|x|}{n} \leq \exp\left(\frac{|x|}{n}\right)$, also
$\sigma_n \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{|x|}{n}\right)^{n-1} \leq n \exp|x|$. Hieraus folgt für $n \to \infty$:

$$\left|\exp(x) - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| = |\kappa_n \sigma_n| \leq \frac{|x|}{n} \cdot r_n \cdot n \exp|x| = (|x| \exp|x|) \cdot r_n \to 0.$$

Für $x \in \mathbb{Z}$ folgt damit $\quad \exp(x) = e^x \quad$ (speziell auch für $x = 0, 1$). Für $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ gilt

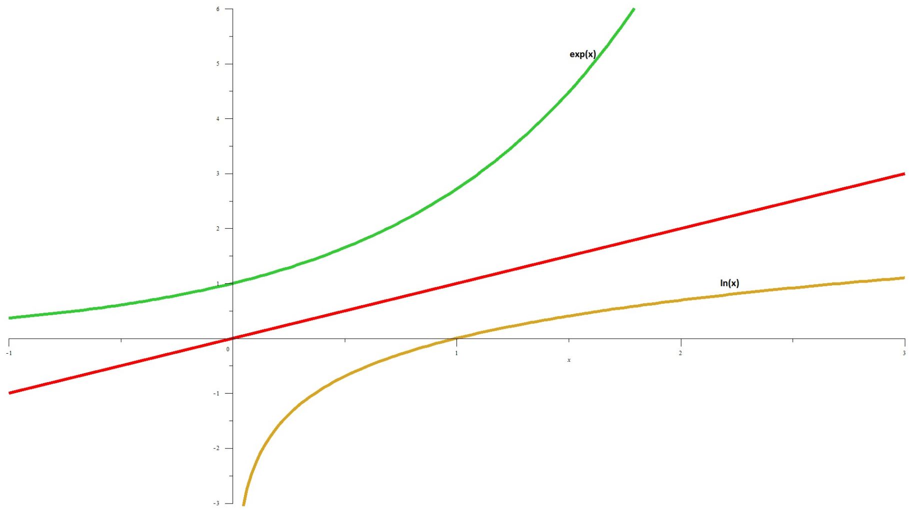
$$\exp(p/q)^q = \exp(p) = e^p, \text{ d.h. } \exp(p/q) = e^{p/q}.$$

$\square$

Korollar. $\mathbb{R} \underset{x \,\mapsto\, e^x}{\to} \mathbb{R}^+$ *ist stetig und streng monoton wachsend auf* $\mathbb{R}$.

Beweis. $|e^{x+h} - e^x| = |e^x|\,|e^h - 1| \to 0$ für festes x und $h \to 0$ (letzter Beweis).
Es folgt $e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1) > 0$ für $h > 0$, da dann $e^h > 1$ ist. $\square$

3.11 Logarithmen und allgemeine Potenzen



Die Abbildung $\exp : \underset{x \,\mapsto\, e^x}{\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+} = \{x \in \mathbb{R} |\ x > 0\}$ ist bijektiv, stetig und streng monoton wachsend. Aus dem Umkehrsatz folgt:
Die Umkehrabbildung $\exp^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist stetig, bijektiv und streng monoton wachsend.
Sie heißt **natürlicher Logarithmus** $\ln := \exp^{-1}$. Man hat

$$x = e^{\ln x} = \ln e^x,\ \ln(x_1 \cdot x_2) \overset{(+)}{=} \ln x_1 + \ln x_2; \quad x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+.$$

Lemma. $\forall_{a \in \mathbb{R}^+,\ r \in \mathbb{Q}} \qquad \ln a^r = r\ \ln a.$

Beweis. $(+) \Rightarrow \ln a^n = n\ \ln a$ für $n \in \mathbb{Z}$. Für $r = p/q,\ q \in \mathbb{N}$ folgt

$$q\ \ln\,(a^{p/q}) = \ln\,((a^{p/q})^q) = \ln\,(a^p) = p\ \ln a, \quad \ln\,(a^r) = r(\ln a).$$

$\square$

Folgerung. $\forall_{a \in \mathbb{R}^+,\ r \in \mathbb{Q}} \qquad a^r = e^{\ln\,(a^r)} = e^{r\ \ln a}.$
Diese Folgerung erlaubt es, die allgemeine Potenz a^x für $x \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ zu definieren:

Definition. *Für $a > 0,\ x \in \mathbb{R}$ heißt $a^x := e^{x\ \ln a}$ die **allgemeine Potenz**.*

Daraus folgt $\forall_{a,b>0;\ x,y \in \mathbb{R}}$ $\ln a^x = x\ \ln a, \quad a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{-x} = 1/a^x,$

$$(a^x)^y = a^{xy}, \quad a^x b^x = (ab)^x, \quad x \mapsto a^x \ \textit{stetig.}$$

[4. Aussage: $\ln(a^x)^y = y\ \ln a^x = xy\ \ln a = \ln a^{xy}$.]

Satz. ***(Monotonie von Potenzen).*** *Sei $a > 0$ und $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(1) $\underset{x \,\mapsto\, x^r}{\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}}$ *ist positiv und* $\left\{ \begin{array}{ll} \textit{streng monoton wachsend,} & \textit{falls } r > 0 \\ \textit{streng monoton fallend,} & \textit{falls } r < 0 \end{array} \right\}.$

(2) $\underset{x \,\mapsto\, a^x}{\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+}$ *ist positiv und* $\left\{ \begin{array}{ll} \textit{streng monoton wachsend,} & \textit{falls } a > 1 \\ \textit{streng monoton fallend,} & \textit{falls } a < 1 \end{array} \right\}.$

Beweis. Folgt aus der Monotonie des ln und den Rechenregeln der Exponentiation. $\square$

Für $a > 0$ und $b > 1$ ist $a = b^x$ für genau ein $x \in \mathbb{R}$ lösbar, da $x \mapsto b^x$ eine bijektive, streng monoton wachsende Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist.

Definition. $\log_b a$, *der* ***Logarithmus von*** a ***zur Basis*** b, *bezeichnet die eindeutige Lösung* x *von* $a = b^x$. *Speziell ist* $\ln = \log_e$.

Rechenregeln.

i) $\log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0, \quad x \mapsto \log_a x$ ist stetig, monoton wachsend für $a > 1$.

ii) $\log_b xy = \log_b x + \log_b y \quad \log_b x/y = \log_b x - \log_b y, \quad \log_b a^r = r \log_b a$.

iii) Da $a = b^{\log_b a}$, folgt $x = a^{\log_a x} = b^{(\log_b a)(\log_a x)}$, d.h. $\log_b x = (\log_b a)(\log_a x)$. Insbesondere gilt

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \qquad \ln x = \frac{\log_a x}{\log_a e} = (\ln a) \log_a x.$$

Von Bedeutung ist dies insbesondere für $a = 2$ und 10.

Man hat $\ln 10 = 2.34\ldots, \ \ln 2 = .693\ldots$.

3.12 Die trigonometrischen Funktionen

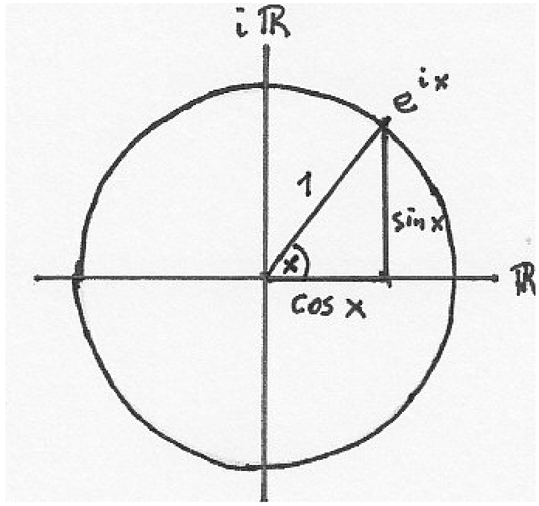
Vorbemerkung. Die wohlbekannte Definition von sin und cos wird am Einheitskreis in der Figur (unten) dargestellt. Das Problem dieser Definition ist: Ein Winkel x müsste vorher definiert werden, was nicht-trivial ist. Z.B. ist das möglich über die Bogenlänge, was aber ein nicht-trivialer Begriff ist. Wir gehen deshalb einen anderen Weg und zeigen dann, dass geometrisch die aus der Schule bekannte Definition herauskommt.

Definition. *Für* $x \in \mathbb{R}$ *sei* $\cos x := \mathrm{Re}\,(e^{ix})$ *und* $\sin x := \mathrm{Im}\,(e^{ix})$.

Erinnert sei daran, dass $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ (speziell $z = ix, \ x \in \mathbb{R}$) konvergiert.
Nach Definition gilt also die

$$\textbf{Eulersche Formel} \qquad e^{ix} = \cos x + i \ \sin x.$$

Man hat $|e^{ix}|^2 = e^{ix} \ \overline{e^{ix}} = e^{ix} \ e^{-ix} = e^0 = 1$, somit liegt e^{ix} geometrisch auf dem Einheitskreis der Gaußschen Ebene:



Es gilt $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}),\ \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}),\ \cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0,$

$\cos(-x) = \cos x,\ \sin(-x) = -\sin x,\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$

Da $z \mapsto e^z,\ z \mapsto \operatorname{Re} z$ stetig sind, folgt: cos und sin sind auf $\mathbb{R}$ stetig.

Additionstheoreme. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\ ,$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y\ .$$

Beweis. $\cos(x+y) + i\sin(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$

$= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)$

$= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y)$: *Bilde* Re-, Im-*Teile*.

$\square$

Korollar. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}\ ,$$
$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}\ .$$

Beweis. $u = \frac{x+y}{2}, \quad v = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x = u + v,\ y = u - v,$
$\sin x - \sin y = \sin(u+v) - \sin(u-v) = 2 \cos u \sin v$ etc. $\square$

Reihendarstellung. Für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren **absolut**

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots$$

Beweis. Die absolute Konvergenz folgt aus der absoluten Konvergenz von $e^{|z|}$.

Da $\quad i^n = \left\{ \begin{array}{rl} 1 & n = 4m \\ i & n = 4m+1 \\ -1 & n = 4m+2 \\ -i & n = 4m+3 \end{array} \right\}$ ist, folgt

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \, \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} : \textit{Bilde}\ \text{Re-},\ \text{Im-}\textit{Teile}.$$

$\square$

Lemma. $\cos x$ *hat in* $[0,2]$ *genau eine Nullstelle, mit* $x \in [1,4,\ 1,6]$*, und ist in [0,2] streng monoton fallend.* $\sin x$ *hat in* $(0,2]$ *keine Nullstelle, und es gilt* $\sin x > 0$*.*

Beweis. Die cos- und sin-Reihen sind alternierend, und für $k \geq 2,\ 0 < x \leq 3$ gilt $\dfrac{x^k}{k!} > \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$, d.h. die Absolutbeträge nehmen vom 2. Glied an ab. Nach dem Leibniz-Kriterium gilt für alle $0 < x \leq 3$

$$c_2(x) := 1 - x^2/2 < \cos x < 1 - x^2/x + x^4/24 =: c_4(x) \tag{1}$$

$$s_3(x) := x - x^3/6 < \sin x < x - x^3/6 + x^5/120 =: s_5(x). \tag{2}$$

$\alpha = \sqrt{2}$ ist die erste positive Nullstelle von c_2, $\beta = \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}$ die erste positive Nullstelle von c_4; somit hat $\cos x$ eine (erste) positive Nullstelle x für $1,4 < \alpha < x < \beta < 1,6$. Für $0 < x < \sqrt{6}$ ist $s_3(x) > 0$, also $\sin x > 0$. Für $0 \leq x < y \leq 2$ ist

$$\cos y - \cos x = -2 \, \sin \frac{x+y}{2} \, \sin \frac{y-x}{2} < 0,$$

d.h. $\cos x$ ist auf $[0,2]$ streng monoton fallend: $\cos x$ hat dort genau 1 Nullstelle. $\square$

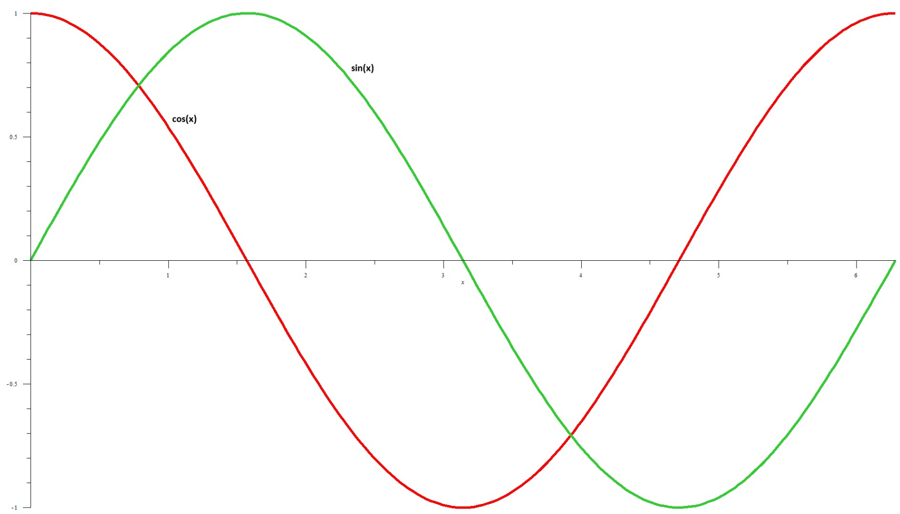
Definition. *Mit* $\dfrac{\pi}{2}$ *bezeichnen wir* ***die*** *Nullstelle von* $\cos x$ *in* $[1,4,\ 1,6]$*. (Dadurch wird* π *definiert.)*

Eine näherungsweise Berechnung von π ist über die cos-Reihe und Intervallhalbierungen möglich, $\pi = 3.141592\ldots$

Mit den Additionstheoremen und $\cos \pi/2 = 0$ sowie durch Iteration folgt

$$(*) \left\{ \begin{array}{lll} \sin(x+\pi/2) & = \cos x, & \cos(x+\pi/2) = -\sin x, \\ \sin(x+\pi) & = -\sin x, & \cos(x+\pi) = -\cos x, \\ \sin(x+2\pi) & = \sin x, & \cos(x+2\pi) = \cos x \qquad \leftarrow 2\pi - \textbf{Periodizität}. \end{array} \right.$$

Zusammen mit $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ ergeben sich die folgenden Graphen von sin, cos:



Spezielle Werte. $\{\text{Nullstellen von } \sin\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},$

$$\{\text{Nullstellen von } \cos\} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

$$e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i3\pi/2} = -i, \quad e^{2\pi i} = 1.$$

Ferner gilt: $e^{ix} = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Aus $(*)$ lassen sich die Intervalle, wo cos bzw. sin wachsend bzw. fallend sind, ableiten. Daraus ergibt sich:

$$\forall_{(\alpha,\beta)\in\,[-1,1]^2} \text{ mit } \alpha^2+\beta^2 = 1 \quad \exists^1_{x\in\,[0,2\pi)} \left\{ \begin{array}{c} \alpha = \cos x \\ \beta = \sin x \end{array} \right\} \quad (+)\ .$$

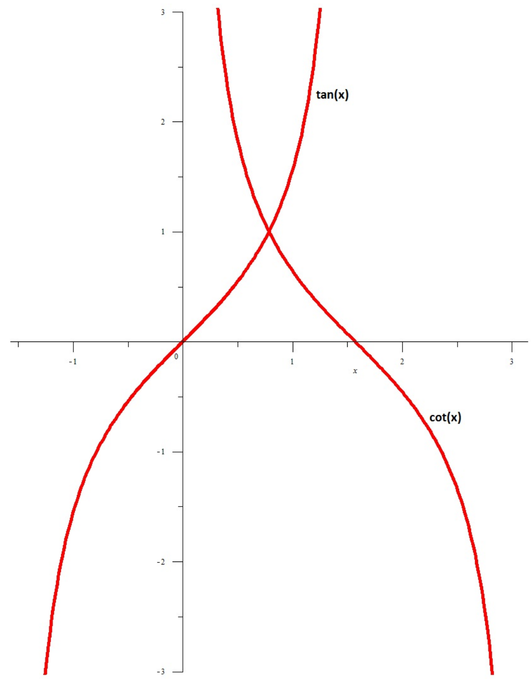
Geometrische Interpretation von $\cos x,\ \sin x$ **über die Bogenlänge** x:

Sind $0 \le t_0 < t_1 \cdots < t_n \le x \le \pi/2$, wandern die Punkte $z_k = e^{it_k}$ auf dem Einheitskreis von (1,0) nach e^{ix}, da $(\cos t_k)$ monoton fallend und $(\sin t_k)$ monoton wachsend ist. Die **Bogenlänge** lässt sich einführen als $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|$, wobei $z_k = e^{it_k}$ mit $t_k = \frac{k}{n}\,x,\ k = 0,\dots n, \quad x > 0$: die Länge L von **Sehnenpolygonen** γ_n ergibt die Bogenlänge im Grenzwert. Wir finden dafür

$$\begin{aligned}\sup_n L(\gamma_n) &= \sup_n \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| = \sup_n \sum_{k=0}^{n-1} \left| e^{i\frac{k+1}{n}x} - e^{i\frac{k}{n}x} \right| \\ &= \sup_n \sum_{k=0}^{n-1} \left| e^{i\frac{x}{n}} - 1 \right| = \sup_n x \left| \frac{e^{i\frac{x}{n}} - 1}{\frac{x}{n}} \right|\end{aligned}$$

Nach 3.10 folgt $L(\gamma_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Somit ist x der Winkel im Bogenmaß. Insbesondere ist der Kreisumfang gleich 2π.

Definition. *Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir definieren* $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$ *und* $\cot x := \frac{\cos x}{\sin x}$.



3.13 Polardarstellung und Multiplikation komplexer Zahlen

Satz. *Jede Zahl $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung*

$$z = r\, e^{it} \quad \text{mit} \quad r > 0 \quad \text{und} \quad t \in [0, 2\pi).$$

Es ist $r = |z|$. Man setzt $t =: \arg(z)$. $z = r\, e^{it}$ heißt ***Polardarstellung von*** *z.*

Beweis. Für $z \neq 0$ ist $|z| \neq 0$; $z = x + iy$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Aus (+) in 3.12 folgt:

$$\exists^1_{t \in [0,2\pi)} \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos t, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin t.$$

Also

$$z = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right) = |z|\, (\cos t + i\, \sin t) = |z|\, e^{it}.$$

Setze $|z| = r$. □

Multiplikation komplexer Zahlen: Geometrische Bedeutung: Rotation und Streckung bzw. Stauchung:
Ist $z_1 = r_1\, e^{it_1}$, $z_2 = r_2\, e^{it_2}$, folgt $z_1 z_2 = r_1 r_2\, e^{i(t_1+t_2)} = r\, e^{it}$ mit $r := r_1 r_2$ und $t := t_1 + t_2$. Da t_i bzw. t die Winkel von $z_i, z_1 z_2$ in der Darstellung als Vektoren in der Gaußschen Zahlenebene mit der x-Achse sind, bedeutet die Multiplikation geometrisch eine Drehstreckung im $\mathbb{R}^2$.

Korollar. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dann hat die Gleichung $z^n = 1$ *genau n komplexe Lösungen, nämlich $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k = 0, \ldots n-1$. Man nennt sie die „n-**ten Einheitswurzeln**“.*

Beweis. Sei z Lösung von $z^n = 1$. Die Polardarstellung $z = r\ e^{it}$ erzwingt $1 = z^n = |z^n| = |z|^n = r^n$, d.h. $r = 1$. Also ist $z = e^{it}$. Aber $z^n = e^{int} = 1$. Somit folgt $nt = 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Nur $k = 0, \ldots n-1$ liefern verschiedene z_k. $\square$

3.14 Trigonometrische Umkehrfunktionen

Satz und Definition. *(1)* $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ *ist streng monoton fallend und bijektiv. Die Umkehrfunktion ist stetig und heißt* $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ ***Arcus-Cosinus***.

(2) $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ *ist streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion ist stetig und heißt* $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ ***Arcus-Sinus***.

(3) $\tan : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion ist stetig und heißt* $\arctan : \mathbb{R} \to [-\pi/2, \pi/2]$ ***Arcus-Tangens***.

(Stetigkeit der Umkehrfunktion nach 3.9.)