Inhaltsverzeichnis

2 Grenzwerte, Folgen und Reihen

In diesem Kapitel führen wir den zentralen Begriff der Konvergenz einer Folge von Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert x ein. Anschaulich bedeutet dies, dass in jeder noch so kleinen Umgebung von x , etwa im Reellen in einem sehr kleinen Intervall $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, alle Folgenglieder von einem großen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ an liegen, d.h. dass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass $x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ ist. Um dies präzise zu definieren und einen Rahmen abzustecken, der auch für Verallgemeinerungen (im 2. Semester) im $\mathbb{R}^n$ Gültigkeit hat, führen wir zunächst offene und abgeschlossene Intervalle, offene und abgeschlossene Mengen und Umgebungen ein. Dabei ist insbesondere an "Mengen kleinen Durchmessers" gedacht, die einen Grenzwert x enthalten. Wir untersuchen später auch die Konvergenz von Reihen, also unendliche Summen von Folgengliedern, sowie die Phänomene, die dabei auftreten können.

2.1 Intervalle in $\mathbb{R}$

Definition. $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Für $x \in \mathbb{R}$ schreibt man auch $-\infty < x < +\infty$.

Rechenregeln mit $\pm\infty$: $\infty + x = \infty,\ -\infty + x = -\infty,\ \infty \cdot x = \infty$ für $x > 0$, $\infty \cdot x = -\infty$ für $x < 0,\ \frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0,\ \infty + \infty = \infty \cdot \infty = \infty,\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty = (-\infty) \cdot (\infty)$.
Nicht definiert sind $\infty - \infty,\ 0 \cdot \infty$ ($\overline{\mathbb{R}}$ hat **keine** Körperstruktur).

Schreibweise: Für $M \subseteq \mathbb{R}$ sei $\sup M = \infty$ ($\inf M = -\infty$), wenn M nicht nach oben (nach unten) beschränkt ist.

Definition. $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt **Intervall** $:\Leftrightarrow\ \forall x_1, x_2 \in I,\ y \in \mathbb{R}\ (x_1 < y < x_2 \Rightarrow y \in I)$.

Bemerkung. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann hat I eine der folgenden vier Formen

$$
\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}\ , \\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}\ , \\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}\ , \\
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}\ ,
\end{aligned}
$$

wobei a oder b auch $-\infty$ oder $+\infty$ sein können. Wir nennen a den **linken** und b den **rechten Eckpunkt** von I ,

Definition. $I = [a,b]$ heißt **abgeschlossenes** Intervall, $I = (a,b)$ **offenes Intervall.** I heißt **halboffen** in den beiden anderen Fällen. Die **Länge** von I ist $b - a$.

2.2 Umgebungen (in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$)

Definition. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$: Standardnotation im Folgenden.
Sei $a \in \mathbb{K}, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann heißt $U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{K} \mid |x-a| < \varepsilon\}$ **offene ε-Umgebung** von a und $\overline{U}_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{K} \mid |x-a| \leq \varepsilon\}$ **abgeschlossene ε-Umgebung** von a .

Bemerkung.
Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ das offene Intervall der Länge 2ε um a.
Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist $U_\varepsilon(a)$ der offene Kreis um $a \in \mathbb{C}$ vom Radius ε .

Definition.

i) $U \subseteq \mathbb{K}$ heißt **Umgebung von** $a :\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(a) \subseteq U$.

ii) $U \subseteq \mathbb{K}$ heißt **offen** $:\Leftrightarrow \forall x \in U : U$ ist Umgebung von x ($\emptyset, \mathbb{K}$ offen).

iii) $U \subseteq \mathbb{K}$ heißt **abgeschlossen** $: \Leftrightarrow \mathbb{K} \setminus U$ ist offen.

Bemerkung. Mit $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2),\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ und $c \in \mathbb{K}$ ist $U_{\varepsilon_1}(a) \cap U_{\varepsilon_2}(a) = U_\varepsilon(a)$. Sind also U_1, U_2 Umgebungen von a , so auch $U_1 \cap U_2$.

Satz.

(1) *Offene Intervalle und offene ε-Umgebungen von $a \in \mathbb{K}$ sind offene Mengen. Abgeschlossene Intervalle und abgeschlossene ε-Umgebungen von $a \in \mathbb{K}$ sind abgeschlossene Mengen.*

(2) *Jede offene Menge in $\mathbb{K}$ ist höchstens abzählbare Vereinigung offener ε-Umgebungen.*

(3) *Beliebige Vereinigungen und endliche Schnitte offener Mengen sind offen.*

Beweis.

(1) Sei $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a < b$. Sei $x_0 \in I$ und $\varepsilon := \min(b - x_0, x_0 - a)\ (> 0)$. Dann gilt: $a \leq x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon \leq b$, also $U_\varepsilon(x_0) \subseteq I$.

Sei $U := U_\varepsilon(a) \subseteq \mathbb{K}$ für $\varepsilon > 0, a \in \mathbb{K}$. Sei $z_0 \in U$. Dann ist $|z_0 - a| < \varepsilon$. Setze $\delta := \varepsilon - |z_0 - a|\ (> 0)$. **Behauptung:** $U_\delta(z_0) \subseteq U_\varepsilon(a)$.

Denn: Sei $z \in U_\delta(z_0)$, d.h. $|z - z_0| < \delta$. Dann ist nach der Dreiecksungleichung $|z - a| = |(z - z_0) + (z_0 - a)| \leq |z - z_0| + |z_0 - a| < \delta + |z_0 - a| = \varepsilon$, also $z \in U_\varepsilon(a)$.
(2. Teil: Übung.)

(2) $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$, also ist auch $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$. Sei $U \subseteq \mathbb{K}$ offen. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sei

$\mathfrak{q} := \{(x, \varepsilon_x) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_{>0} \mid U_{\varepsilon_x}(x) = (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subseteq U\}$, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sei

$\mathfrak{q} := \{(x, \varepsilon_x) \in (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \times \mathbb{Q}_{>0} \mid U_{\varepsilon_x}(x) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - x| < \varepsilon_x\} \subseteq U\}$.

Da $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_{>0}$ und $\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}_{>0}$ abzählbar sind, ist in beiden Fällen $\mathfrak{q}$ abzählbar.

Behauptung. $U = \bigcup\limits_{(x,\varepsilon_x) \in \mathfrak{q}} U_{\varepsilon_x}(x)$.

Denn: "$\supseteq$" ist nach Konstruktion klar.

"$\subseteq$" Sei $y \in U$. Da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ / von $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$ dicht und U offen ist, d.h. U Umgebung von y ist, existiert $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ mit $U_{2\varepsilon}(y) \subseteq U$. Da $\mathbb{Q}/\mathbb{Q} + i\mathbb{R}$ dicht in $\mathbb{K}$ ist, gibt es $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ mit $x \in U_\varepsilon(y)$, also $|x - y| < \varepsilon$. $\Rightarrow\ U_\varepsilon(x) \overset{(*)}{\subseteq} U_{2\varepsilon}(y) \subseteq U$

[Zu $(*)$: $|z-x|<\varepsilon \Rightarrow |z-y| \leq |z-x|+|x-y|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$.]
Da $|x-y|<\varepsilon$, ist $y \in U_\varepsilon(x) \subseteq U,\ (x,\varepsilon) \in \mathfrak{q}$. Also gilt “$\subseteq$”.

(3) Übung. $\square$

2.3 Grenzwert von Folgen

Definition. $x : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ heißt **Folge** (in $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$). Identifikation von x mit Bild x , $x \equiv (x(n))_{n\in\mathbb{N}}$. **Notation**: x_n statt $x(n)$, die **Folge** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird durch die **Folgenglieder** $x_n \in \mathbb{K}$ gegeben. Auch $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Die **Anordnung** der Folgenglieder ist wichtig; eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist von der Menge $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ zu unterscheiden. Manchmal benutzen wir statt der Indexmenge $\mathbb{N}$ auch $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Motivation des **Grenzwertes von Folgen**: Kapital y , verzinst mit 100p Prozent pro Jahr, ergibt

- bei jährlicher Zinszahlung $y(1+p)$ nach 1 Jahr,
- bei halbjährlicher Zinszahlung $y(1+\frac{p}{2})^2$ nach 1 Jahr,
- ...
- bei n-maliger Zinszahlung $y(1+\frac{p}{n})^n$ nach 1 Jahr.

Definiere $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ durch die Folgenglieder $x_n := y(1+\frac{p}{n})^n$. Strebt x_n gegen einen Grenzwert für $n \to \infty$, bei kontinuierlicher Zinszahlung, oder wächst x_n über alle Grenzen an? **Antwort:** $x_n \to e^p \cdot y,\ e \simeq 2,71828$ Eulersche Zahl (1736).
(Vgl. $1,01^{12} = 1,1268 > 1,12,\ e^{0,12} \simeq 1,1275$.)

Definition.

i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ sei Folge. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert gegen** $x \in \mathbb{K}$

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0(\varepsilon) \quad x_n \in U_\varepsilon(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0(\varepsilon) \quad x_n \in U_\varepsilon(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0(\varepsilon) \ \ |x - x_n| < \varepsilon.$$

x heißt **Grenzwert der Folge** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder **Limes** von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Notation: $x_n \to x \quad (n \to \infty)$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Für $x = 0 : (x_n)$ **Nullfolge**.

ii) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ heißt **konvergent**: $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} \quad x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Sonst heißt die Folge **divergent**.

Also: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0\ |x_n - x| \geq \varepsilon$.

Beispiele:

(1) $x_n := a,\ x_n \to a$ konstante Folge.

(2) $x_n := (-1)^n$ ist divergent: weder $+1$, noch -1 sind Limites dieser Folge (betrachte $U_{1/2}(\pm 1)$), analog auch $x_n = i^n$ in $\mathbb{C}$.

(3) $x_n := (1 + \frac{1}{n})^n \to e = 2,71828\ldots$ (später zu beweisen),
$x = (2, (3/2)^2, (4/3)^3, \ldots)$: die Folgenglieder wachsen an.

(4) $x_n := 1/n,\ x_n \to 0$: Nach Archimedes gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > 1/\varepsilon$. Für $n \geq n_0$ ist dann $0 < 1/n \leq 1/n_0 < \varepsilon$.

(5) $x_n := n$ ist divergent.

Lemma. *Sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folge in* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

(i) $x_n \to a$ *und* $x_n \to b$*. Dann ist* $a = b$*, der Grenzwert ist* **eindeutig** *bestimmt.*

(ii) (x_n) *konvergiert* $\Rightarrow (x_n)$ *ist* **beschränkt***, d.h.* $\sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\} < \infty$.

(iii) (x_n) *konvergiert gegen* $x \Leftrightarrow$ *In jeder (noch so kleinen) Umgebung von* x *liegen* "**fast alle**" *(alle bis auf endlich viele) Folgenglieder.*

Beweis.

(i) Wäre $a \neq b$, setze $\varepsilon := |a - b|/2 > 0$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$
$|x_n - a| < \varepsilon,\ |x_n - b| < \varepsilon \Rightarrow\ |a - b| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < 2\varepsilon = |a - b|$ ↯.

(ii) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ |x_n - x| < 1;\ \sup\{|x_n| \mid n \geq n_0\} < \infty$.

(iii) "$\Leftarrow$" $U_\varepsilon(x)$ ist Umgebung.

"$\Rightarrow$" Sei U Umgebung von x , $x \in U_\varepsilon(x) \subset U$ für $\varepsilon > 0$ geeignet. $\Rightarrow$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$ $x_n \in U_\varepsilon(x) \subseteq U$. Nur $x_1, \ldots, x_{n_0-1}$ können außerhalb von U liegen.

□

Bemerkung. Das Verhalten der "ersten" x_n spielt für die Konvergenz oder Divergenz keine Rolle ($x_n = \frac{10^n}{n!}$: $\lim_n x_n = 0$, obwohl $x_{10} > 2750$ "groß" ist).

Definition. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ eine wachsende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ **Teilfolge** von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (Man geht an der Folge entlang und wählt immer wieder einmal ein Folgeglied aus.)

Lemma. *Jede Teilfolge einer gegen x konvergenten Folge konvergiert gegen x .*

Beweis. Sei (x_{n_k}) eine Teilfolge von (x_n), $\varepsilon > 0$. Es gibt n_0 : $\forall n \geq n_0$ $x_n \in U_\varepsilon(x)$. Aber $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ $n_{k_o} \geq n_0$. Dann $\forall_{k\geq k_0}$ $n_k \geq n_{k_0} \geq n_0,$ $x_{n_k} \in U_\varepsilon(x)$.

□

Beispiele:

a) $x_n = (-1)^n$ ist divergent, $n_k := 2k \Rightarrow x_{n_k} = +1,$ (x_{n_k}) ist konvergente Teilfolge der divergenten Folge (x_n) .

b) Die Folge der Primzahlen ist eine Teilfolge der Folge aller natürlichen Zahlen.

c) $x_n = 1/n^p,$ $p \in \mathbb{N}$ ist Teilfolge von $y_m = 1/m,$ $x_n \to 0$.

d) $x_n = q^n$ mit $|q| < 1$. Dann gilt $x_n \to 0$: Da $\frac{1}{|q|} = 1 + h$ mit $h > 0$, folgt $|q|^{-n} = (1+h)^n > 1 + nh > nh > 1/\varepsilon$, sofern $n > 1/(\varepsilon h)$ ist. Also: $|q|^n < \varepsilon$ für $n \geq n_0 \geq 1/(\varepsilon h)$.

e) $x_n := \sqrt[n]{n}$. **Behauptung.** $x_n \to 1$: Mit der Ungleichung vom arithmetisch-geometrischen Mittel ergibt sich

$$1 \leq \sqrt[n]{n} = (\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdots 1)^{1/n} < \frac{2\sqrt{n} + (n-2)\cdot 1}{n} < 1 + 2/\sqrt{n} \ ,$$

d.h.

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < 2/\sqrt{n} \ . \text{ Aber } 2/\sqrt{n} \leq 2/\sqrt{n_0} < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0 > (2/\varepsilon)^2 \ .$$

f) $(z_n), z$ in $\mathbb{C} \Rightarrow (z_n \to z \Leftrightarrow (\mathrm{Re} z_n \to \mathrm{Re} z) \wedge (\mathrm{Im} z_n \to \mathrm{Im} z))$

" $\Rightarrow$ " $|x - x_n| = |\mathrm{Re}(z - z_n)| \leq |z - z_n| < \varepsilon$.

" $\Leftarrow$ " $|x - x_n| < \varepsilon/2,$ $|y - y_n| < \varepsilon/2 \Rightarrow |z - z_n| \leq |x - x_n| + |y - y_n| < \varepsilon$ $(z_n = x_n + y_n, z = x + y)$.

2.4 Rechenregeln für Grenzwerte

Satz.

a) *In* $\mathbb{R} : x_n \to x,\ y_n \to y$ *und* $x_n \leq y_n$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \leq y$ (Vergleichssatz).

b) *In* $\mathbb{R} : x_n \to x,\ y_n \to x,\ x_n \leq z_n \leq y_n \Rightarrow z_n \to x$ (Sandwich Theorem).

c) *In* $\mathbb{K} : x_n \to x,\ y_n \to y,\ \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha x_n \to \alpha x,\ x_n \pm y_n \to x \pm y,\ x_n \cdot y_n \to x \cdot y$.

d) *In* $\mathbb{K}$*: Für* $x_n \to x,\ y_n \to y$ *und* $y \neq 0,\ y_n \neq 0$ *für* $n \geq n_0 \Rightarrow x_n/y_n \to x/y$.

Beweise.

a) Wäre $y < x$, setze $\varepsilon := (x-y)/2 > 0$. Es gäbe n_0, n_1 mit:
$|x_n - x| < \varepsilon,\ n \geq n_0$ und $|y_n - y| < \varepsilon,\ n \geq n_1$. Für $n \geq n_2 := \max(n_0, n_1)$ folgte $y_n < y + \varepsilon = x - \varepsilon < x_n$. ↯

b) Zu $\varepsilon > 0$ liegen fast alle x_n und y_n in $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, also auch fast alle z_n .

c) Sei $\varepsilon > 0$. $\exists n_0, n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |x_n - x| < \varepsilon/2$, $\quad \forall n \geq n_1 \quad |y_n - y| < \varepsilon/2$.
Dann gilt für $n \geq n_2 := \max(n_0, n_1)$

$$|(x_n + y_n) - (x+y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ .$$

□

Bemerkung zu Beweisen. Es reicht für Konvergenz zu zeigen: Für ein **festes** c (> 1) gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ |x_n - x| < c\,\varepsilon \ .$$

Beispiel. $x_n = 1 + 1/n$. Dann $1 \to 1,\ 1/n \to 0,\ x_n \to 1 + 0 = 1$.

Korollar.

a) $x_n \to x,\ a \leq x_n \leq b \Rightarrow a \leq x \leq b \quad$ (in $\mathbb{R}$).

b) $|y_n| \leq \alpha_n,\ \alpha_n \to 0 \Rightarrow y_n \to 0 \quad$ (in $\mathbb{K}$).

Beispiele.

(1) $x_n \to x \Rightarrow |x_n| \to |x|$, da $||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| =: \alpha_n \to 0$: *b*) anwenden.

(2) $x_n := \frac{(n+2)(2n^2-3)}{(n-4)^3} = \frac{(1+2/n)(2-3/n^2)}{(1-4/n)^3} \to 2$, da $2/n, 3/n^2, 4/n \to 0$, also $1 + 2/n \to 1,\ 2 - 3/n^2 \to 2,\ (1-4/n)^3 \to 1$ konvergieren.

(3) $x_n \to 0,\ (y_n)$ beschränkt $\Rightarrow x_n y_n \to 0$. Denn $|y_n| \leq M \Rightarrow |x_n y_n| \leq M|x_n| \to 0$.
Übung: $\frac{a_0 + \cdots + a_p n^p}{b_0 + \cdots + b_p n^p} \to \frac{a_p}{b_p}$ $(b_p \neq 0)$.

(4) Seien $y_1, \dots, y_p \in \mathbb{R}_+$, $x_n := (y_1^n + \dots + y_p^n)^{1/n}$.

Behauptung. $x_n \to \max\limits_{1\le j\le p} y_j$. Denn $\max\limits_{1\le j\le p} y_j \le x_n \le \sqrt[n]{n} \max\limits_{1\le j\le p} y_j \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \max\limits_{1\le j\le p} y_j$.

(5) $m \in \mathbb{N},\ x_n \to x \Rightarrow x_n^m \to x^m$. **Denn:**

$$|x_n^m - x^m| = |x_n - x| \ |\sum_{j=0}^{m-1} x^j \ x_n^{m-1-j}| \le |x_n - x| \ m \ M^{m-1} \text{ mit } M = \sup(|x|, |x_n|) \ .$$

2.5 Konvergenz monotoner Folgen

Definition.
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann heißt (x_n) **monoton wachsend** (**fallend**) $:\Leftrightarrow$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \le x_{n+1} \ (x_n \ge x_{n+1}) \ .$$

(x_n) heißt **streng monoton wachsend** (**fallend**) $:\Leftrightarrow\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n < x_{n+1} \ \ (x_n > x_{n+1})$.
(x_n) ist **monoton** $:\Leftrightarrow\ (x_n)$ monoton fallend oder monoton wachsend.

Bisher haben wir nur Konvergenzen bei bekanntem Grenzwert gezeigt. Jetzt werden Kriterien gesucht, um die Konvergenz auf Grund "innerer" Eigenschaften der Folge nachzuweisen.

Satz. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monotone, beschränkte Folge in* $\mathbb{R}$*. Dann ist* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent. Genauer: Ist* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton wachsend und nach oben beschränkt, setze* $s := \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$*. Dann konvergiert* $x_n \to s$ *.*

Beweis. Sei (x_n) beschränkt. Dann ist das Supremum s endlich und es folgt:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad s - \varepsilon < x_{n_0}$.
Somit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $s - \varepsilon < x_{n_0} \le x_n \le s$, sofern $n \ge n_0$.

□

Beispiele:

(1) $x_1 := 1,\ x_n := \frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)^2} x_{n-1},\ n \ge 2$.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend, da $0 < \frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)^2} < 1$, und beschränkt.

Das allgemeine Folgeglied ist $x_n = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\ \frac{3\cdot 5}{4\cdot 4} \cdots \frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)(2n-2)}$ $\quad (\to \frac{2}{\pi}$: später).

(2) $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ist monoton wachsend und $y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ monoton fallend:

[Mit $x_n < y_n,\ y_n - x_n \to 0$ also $x_n \to: e :\leftarrow y$]

Mit der Bernoulli-Ungleichung für $n \ge 2$ gilt nämlich

$$(1 + \frac{1}{n})^n (1 - \frac{1}{n})^n = (1 - \frac{1}{n^2})^n > 1 - n\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} \tag{1}$$

$$\frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n (1 - \frac{1}{n})^n} = (1 + \frac{1}{n^2 - 1})^n > (1 + \frac{1}{n^2})^n > 1 + n\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} \tag{2}$$

(1) : $(1+\frac{1}{n})^n\ (1-\frac{1}{n})^{n-1} > 1$, $x_n > x_{n-1}$ $\qquad (n \geq 2)$.

(2) : $(1+\frac{1}{n})^{n+1} < (1-\frac{1}{n})^{-n} = (1+\frac{1}{n-1})^n$: $y_n < y_{n-1}$ $\qquad (n \geq 2)$.

Ferner: $y_n - x_n = \frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})^n \to 0$. Man hat $e = 2,71828$. Die Folgen $(x_n), (y_n)$ konvergieren "sehr langsam" gegen e .

2.6 Bolzano-Weierstraß und Konvergenzkriterium von Cauchy

Satz von Bolzano-Weierstraß. *Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.*

Beweis.

(i) Jede Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ enthält eine monotone Teilfolge:

Sei $A := \{n \in \mathbb{N} \mid \forall \ell > n\ x_n \geq x_\ell\}$ (die n, für die x_n alle späteren x_ℓ übertrifft). Falls $|A| = \aleph_0$, ist die zugehörige Teilfolge $(x_n)_{n\in A}$ monoton fallend. Falls $|A|$ endlich ist, $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ n \notin A$, d.h. $\forall n \geq n_0\ \exists \ell > n \quad x_n < x_\ell$. Daraus konstruiert man induktiv eine monoton wachsende Folge: $y_1 := x_{n_0},\ y_2 := x_{\ell(n_0)},\ y_3 := x_{\ell(n_0))} \ldots$.

(ii) Ist (x_n) beschränkt, ist die monotone Teilfolge aus (i) auch beschränkt und nach 2.5 konvergent.

(iii) Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wende 2.3 f) an.

□

Ziel: Wir wollen die Konvergenz durch (innere) Untersuchung der Folgeglieder klären, ohne den Grenzwert zu kennen.

Definition. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{K}$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Cauchyfolge** : $\Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq n_0\ |x_n - x_m| < \varepsilon\ [x_n - x_m \in U_\varepsilon(0)]$.

Lemma. *Jede konvergente Folge ist Cauchyfolge.*

Beweis. $x_n \to x,\ \varepsilon > 0$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ |x_n - x| < \varepsilon/2$. Für $n, m \geq n_0$ gilt

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \varepsilon\ .$$

□

Konvergenzkriterium von Cauchy: *Für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sind äquivalent:*

(1) *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.*

(2) *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Lemma .
(2) $\Rightarrow$ (1). (x_n) ist beschränkt: $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0\ |x_m - x_n| < 1 (= \varepsilon)$,
also $||x_n| - |x_m|| < 1$. Somit $\sup\limits_{m\geq n_0} |x_m| \leq 1 + |x_{n_0}|$.
Bolzano-Weierstraß: (x_n) hat eine konvergente Teilfolge $(y_k) := (x_{n_k})$, die gegen y konvergiere.
Behauptung: $x_n \to y$.

Sei $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0 \quad |x_m - x_n| < \varepsilon/2$.
Da $x_{n_k} \to y,\ \exists N = n_k \geq n_0 \quad |x_N - y| < \varepsilon/2$.
Für $n \geq n_0 : |x_n - y| \leq |x_n - x_N| + |x_N - y| < 2 \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon$.

$\square$

Korollar. (x_n) *ist divergent* $\Leftrightarrow\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n, m \geq n_0 \quad |x_n - x_m| \geq \varepsilon$.

2.7 Uneigentliche Grenzwerte

Definition. (x_n) in $\mathbb{R}$ **divergiert gegen** $\overset{+}{\underset{(-)}{}}\infty :\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0$
$x_n > 1/\varepsilon\ (x_n < -1/\varepsilon)$.
Man schreibt $x_n \to \overset{+}{\underset{(-)}{}}\infty, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overset{+}{\underset{(-)}{}}\infty$ (obwohl **Divergenz** vorliegt); $\overset{+}{\underset{(-)}{}}\infty$ heißt **uneigentlicher Grenzwert** der Folge (x_n) .

Rechenregeln.

i) $\lim\limits_n x_n = \infty,\ y_n \geq z \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ \lim\limits_n (x_n + y_n) = \infty$
und $z > 0 \ \Rightarrow\ \lim\limits_n x_n y_n = \infty$.

ii) $\lim\limits_n |x_n| = \infty \ \Rightarrow\ \lim\limits_n 1/|x_n| = 0$ (gewöhnlicher Limes) .

iii) $\lim\limits_n x_n = 0,\ x_n > 0 \ \Rightarrow\ \lim\limits_n 1/x_n = \infty$.

2.8 Häufungspunkte, Limes Superior und Limes Inferior

Definition. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$, x heißt **Häufungspunkt** der Folge (x_n) $:\Leftrightarrow$
Für alle Umgebungen U von x gibt es unendlich viele Folgeglieder von (x_n) in U.
(d.h. $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U\}$ ist unendlich.)

Es wird **nicht gefordert**, dass alle $(x_n)_{n\geq n_0}$ in U liegen, **sondern nur**, dass unendlich viele x_n in U sind.

Beispiele:

(1) $x_n = (-1)^n$ hat die Häufungspunkte ± 1 .

(2) $x_n = (-1)^n \sqrt[n]{n} + 1/\sqrt[n]{n}$ hat die Häufungspunkte 0,2.

(3) $x_n = i^n$ hat die Häufungspunkte $+1, -1, +i, -i$.

Satz 1. (1) x *ist Häufungspunkt von* $(x_n) \Leftrightarrow x$ *ist Limes einer Teilfolge von* (x_n) .

(2) *Jede beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt.*

Beweis.

(2) Umformulierung des Satzes von Bolzano-Weierstraß mit (1).

(1) “$\Rightarrow$” x Häufungspunkt von $(x_n) \Rightarrow\ \exists n_1 < n_2 < \ldots$ (sukzessiv bestimmen) $x_{n_k} \in U_{1/k}(x)$. Dann $x_{n_k} \to x$.

“$\Leftarrow$” $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \ \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq k_0\ x_{n_k} \in U_\varepsilon(x)$.

□

Bemerkung. Der einzige Häufungspunkt einer konvergenten Folge ist ihr Limes.

Satz 2. *Jede beschränkte Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ besitzt einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt.*

Definition. Sie heißen **Limes Superior** und **Limes Inferior**, geschrieben

$$\overline{\lim_n}\, x_n\ ,\ \underline{\lim_n}\, x_n\ .$$

Beweis. $H := \{y \mid y$ ist Häufungspunkt von $(x_n)\}$ ist beschränkt, da $\{x_n\} \subseteq [a,b]$ und jeder Häufungspunkt von (x_n) wieder in $[a,b]$ liegt. $\Rightarrow\ \alpha := \inf H \in \mathbb{R}$.

Behauptung. α ist wieder Häufungspunkt von (x_n) . (Analog $\beta = \sup H$.)
Zu $\varepsilon > 0$ existiert $y \in H$ mit $\alpha \leq y < \alpha + \varepsilon$. Falls $\alpha = y$, fertig. Sonst $\alpha < y$ und es gibt $\delta > 0$ mit $\alpha < y - \delta < y + \delta < \alpha + \varepsilon$. Da in $U_\delta(y)$ unendlich viele x_n liegen, gilt dies erst recht für $U_\varepsilon(\alpha)$; α ist Häufungspunkt von (x_n) . □

Offenbar gilt für konvergente Teilfolgen (x_{n_k}) von (x_n)

$$\underline{\lim_n}\, x_n \leq \lim_k\ x_{n_k} \leq \overline{\lim_n}\, x_n\ .$$

Satz 3. (x_n) *beschränkte Folge in* $\mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1) $\alpha = \underline{\lim_n}\ x_n\ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0$ $\begin{array}{ll} x_n < \alpha + \varepsilon & \textit{für unendlich viele } n \in \mathbb{N} \\ x_n < \alpha - \varepsilon & \textit{nur für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N}. \end{array}$

(2) $\alpha = \overline{\lim_n}\ x_n \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0$ $\begin{array}{ll} x_n > \alpha - \varepsilon & \textit{für unendlich viele } n \in \mathbb{N} \\ x_n > \alpha + \varepsilon & \textit{nur für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N}. \end{array}$

Beweis.

(1) “$\Leftarrow$” Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $x_n \in U_\varepsilon(\alpha)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, da in $U_\varepsilon(\alpha) = (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ unendlich viele (minus endlich viele) = unendlich viele x_n liegen.

Es folgt: α ist Häufungspunkt von (x_n) . Sei jetzt $\gamma < \alpha$. Zu $\varepsilon = \frac{\alpha-\gamma}{2}$ gibt es nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n < \alpha - \varepsilon = \gamma + \varepsilon$, somit erst recht $x_n \in U_\varepsilon(\gamma)$ nur für endlich viele $n \in \mathbb{N}$. Also ist γ kein Häufungspunkt von (x_n) .

“$\Rightarrow$” Sei $\alpha = \underline{\lim_n}\, x_n$, $\varepsilon > 0$. α ist Häufungspunkt, somit gilt $x_n < \alpha + \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Die Ungleichung $x_n < \alpha - \varepsilon$ kann nur für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gelten, sonst besäße (x_n) eine Teilfolge (x_n) mit $(x_{n_k}) < \alpha - \varepsilon$ (für alle k), (x_{n_k}) hätte einen Häufungspunkt $\leq \alpha - \varepsilon$, der auch Häufungspunkt von (x_n) wäre, im Widerspruch zur Definition von α = kleinster Häufungspunkt von (x_n) . □

Korollar (in $\mathbb{R}$). (x_n) *konvergent* $\Leftrightarrow$ (x_n) *beschränkt und besitzt genau einen Häufungspunkt.*

$$\Leftrightarrow \underline{\lim_n}\, x_n = \overline{\lim_n}\ x_n \in \mathbb{R} \quad (= \lim_n x_n).$$

2.9 Konvergenz von Reihen

Definition. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ eine Folge. Dann heißt $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ (**unendliche**) **Reihe**, die x_n **Glieder** der Reihe. Die Reihe $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ heißt **konvergent** oder (x_n) **summierbar**, wenn die **Partialsummenfolge** $s_n := \sum\limits_{n=1}^{N} x_n$ konvergent ist: $s_N \to s \in \mathbb{K}$. s heißt **Summe** der Reihe, $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Sonst heißt $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ **divergent**.

Satz (Cauchy-Kriterium für Reihen). *Eine Reihe* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *ist konvergent, genau dann wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m > n \geq n_0 \quad \Big|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\Big| < \varepsilon \; .$$

Beweis. $|s_m - s_n| = |\sum\limits_{k=n+1}^{m} x_n| \quad (m > n)$. □

Korollar. *Wenn* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *konvergiert, gilt* $x_n \to 0$.

Beispiele:

(1) Umgekehrt folgt aus $x_n \to 0$ **nicht**, dass $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konvergiert: $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ ist divergent, da für $n \in \mathbb{N}$ stets das Cauchy-Kriterium verletzt ist:

$$|s_{2n} - s_n| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \; .$$

Man schreibt $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = \infty$, da $s_N \to \infty$ als uneigentlicher Limes.

Die **Harmonische Reihe** $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = \infty$ ist divergent (aber: $\sum\limits_{n=1}^{10000} \frac{1}{n} < 10$).

(2) Dagegen konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$: $s_n - s_{n-1} = \frac{1}{n^2} > 0$, also ist (s_n) monoton wachsend. Ferner ist (s_n) beschränkt, da

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2 \; .$$

Also existiert $\lim\limits_{n} s_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad (= \frac{\pi^2}{6} < 2$, später).

(3) Die **Geometrische Reihe** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^k$ hat für $q \in \mathbb{C},\; q \neq 1$ die Partialsumme

$s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = 1 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Für $|q| < 1$ gilt also $s_n \to \frac{1}{1-q}$, da $q^n \to 0$: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$. Für $|q| \geq 1$ hat man Divergenz, da die Reihenglieder **nicht** gegen 0 konvergieren.

Lösungen von Differentialgleichungen können oft als Funktionenreihen wie

- Potenzreihen $\sum\limits_n a_n x^n$
- trigonometrische Reihen $\sum\limits_n (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$

geschrieben werden: Reihen sind wichtige Hilfmittel der Analysis. Numerisch ist eine beliebig genaue Approximation durch Reihenabbruch möglich (bei Konvergenz).

Rechenregeln.

i) Konvergieren $\sum\limits_n x_n$ und $\sum\limits_n y_n$, so auch $\sum\limits_n (x_n \pm y_n)$ und

$$\sum_n (x_n \pm y_n) = \left(\sum_n x_n\right) \pm \left(\sum_n y_n\right) \; .$$

ii) Konvergiert $\sum\limits_n x_n$ und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so $\sum\limits_n \lambda x_n = \lambda \sum\limits_n x_n$.

iii) $\sum\limits_n x_n$ konvergent $\Rightarrow \sum\limits_{k=n}^{\infty} x_n \to 0 \; (n \to \infty)$.

2.10 Absolute Konvergenz

Definition. Eine Reihe $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ in $\mathbb{K}$ ist **absolut konvergent** $:\Leftrightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ konvergent.

Satz 1. *Ist $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ absolut konvergent, ist $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ (auch) konvergent.*

Beweis. Mit dem Cauchy-Kriterium und der Dreiecksungleichung gilt für $n > m$

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |x_k| \; .$$

□

Die Umkehrung ist i.a. falsch: $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k}$ ist divergent, aber $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k}$ konvergent (s.u.).

Satz 2. *Sei $(x_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. Dann gilt:*
($\sum\limits_n x_n$ ist (absolut) konvergent $\Leftrightarrow$ Die Partialsummen sind beschränkt).

Beweis. (s_N) ist monoton wachsend $\Rightarrow$ ((s_N) ist konvergent $\Leftrightarrow$ (s_N) ist beschränkt). □

Majorantenkriterium. Seien $(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $(y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *mit* $|x_n| \leq y_n$ *für alle* $n \geq n_0$. *Dann folgt:*

a) *Wenn $\sum\limits_n y_n$ konvergiert, ist auch $\sum\limits_n x_n$ (absolut) konvergent.*

b) *Wenn* $\sum\limits_n |x_n|$ *divergiert, ist auch* $\sum\limits_n y_n$ *divergent.*

Beweis.

a) Cauchy-Kriterium und $\sum\limits_{k=m+1}^{n} |x_k| \leq \sum\limits_{k=m+1}^{n} y_k \quad n > m \geq k_0$.

b) Kontraposition.

$\square$

Beispiel. $x_n = \frac{(\sqrt{n}+1)^2}{n^2+n}$, $x_n \geq \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$, $\sum\limits_n \frac{1}{n+1}$ divergent. Somit ist $\sum\limits_n x_n$ divergent.

2.11 Weitere Konvergenzkriterien für Reihen

Satz 1 (Wurzelkriterium). *Sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. *Dann gilt:*

(1) *Ist* $0 < q < 1$ *und* $\sqrt[n]{|x_n|} \leq q$ *für alle* $n \geq n_0$, *konvergiert* $\sum\limits_n x_n$ *absolut.*

(2) *Gilt* $\sqrt[n]{|x_n|} \geq 1$ *für unendlich viele* $n \in \mathbb{N}$, *divergiert* $\sum\limits_n x_n$.

Beweis.

(1) $\forall n \geq n_0 \ |x_n| \leq q^n$: Majorantenkriterium und konvergente geometrische Reihe.

(2) $x_n \not\to 0$, also $\sum\limits_n x_n$ divergent.

$\square$

Satz 2 (Quotientenkriterium). *Sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}_{\neq 0}$. *Dann gilt:*

(1) *Ist* $0 < q < 1$ *und* $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq q$ *für alle* $n \geq n_0$, *konvergiert* $\sum\limits_n x_n$ *absolut.*

(2) *Ist* $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1$ *für alle* $n \geq n_0$, *divergiert* $\sum\limits_n x_n$ $(x_{n_0} \neq 0)$.

Beweis.

(1) $n \geq n_0 : |x_{n+1}| \leq q|x_n| \underset{\textit{Induktion}}{\overset{(n_0=1)}{\Longrightarrow}} |x_n| \leq q^{n-1}|x_1|$, $\sqrt[n]{|x_n|} \leq q \sqrt[n]{\frac{|x_1|}{q}} \leq q' < 1$, da mit $a := \frac{|x_1|}{q}$ gilt: $\sqrt[n]{a} \to 1$ und $q < 1$ ist. Wurzelkriterium anwenden .

(2) $x_n \not\to 0$.

$\square$

Bemerkung.

(i) Das Quotientenkriterium ist schwächer als das Wurzelkriterium, aber einfacher.

(ii) Es reicht für die Konvergenz **nicht**, nur $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$ zu zeigen (etwa $\sum\limits_n \frac{1}{n}$).

(iii) Beide Kriterien können versagen, obwohl Konvergenz vorliegt (etwa $\sum\limits_n \frac{1}{n^2}$).

Beispiele.

(1) $x_n = 2^{(-1)^n - n}$: Mit dem Wurzelkriterium $\sqrt[n]{|x_n|} \le \sqrt[n]{2} \cdot \frac{1}{2} \le \frac{1}{2} + \varepsilon$ für $n \ge n_0(\varepsilon)$ folgt, dass $\sum\limits_n x_n$ konvergiert. Das Quotientenkriterium $\frac{1}{8} \le \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \le 2$ erlaubt **keine** Aussage.

(2) $x \in \mathbb{K}$, $\exp(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ ist konvergent, da mit $z_n := x^n/n!$ gilt

$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \frac{|x|}{n+1} < \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2|x|$.

Satz 3 (Cauchys Verdichtungssatz)**.** *Seien $x_n \ge 0$ und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend in $\mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \text{ konvergent} \iff \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^k x_{2^k} \text{ konvergent}\right) .$$

Beispiel: $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ mit $\alpha > 0 : x_n = \frac{1}{n^\alpha},\ x_{2^k} = \frac{1}{2^{k\alpha}}$
$\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} 2^k x_{2^k} = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{k(\alpha-1)}} = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^q$ geometrische Reihe:
Konvergenz besteht genau für $\alpha > 1$ (nicht für $\alpha = 1$: harmonische Reihe).

2.12 Alternierende Reihen

Definition. Eine Reihe der Form $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} (-1)^n x_n$ mit $x_n \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ heißt **alternierende Reihe**.

Satz (Leibnizsche Regel). *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend mit $\lim\limits_n x_n = 0$.*
Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} (-1)^n x_n$.

Beweis. $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x_k$. Es folgt $s_{2n+2} - s_{2n} = -x_{2n+1} + x_{2n+2} \le 0$, also

$$s_0 \ge s_2 \ge s_4 \ge \cdots \ge s_{2n} \ge \dots$$

Ähnlich hat man

$$s_1 \le s_3 \le s_5 \le \cdots \le s_{2n+1} \le \dots$$

Ferner gilt wegen $s_{2n+1} - s_{2n} = -x_{2n-1} \le 0$, dass $s_{2n+1} \le s_{2n},\ n \in \mathbb{N}$. Somit ist die Folge $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und $(s_{2n} \ge s_1)$ beschränkt, also existiert $s = \lim\limits_n s_{2n}$. Analog ist (s_{2n+1}) monoton wachsend und $(s_{2n+1} \le s_0)$ beschränkt, also existiert $s' = \lim\limits_n s_{2n+1}$. Aber

$$s - s' = \lim_n (s_{2n} - s_{2n+1}) = -\lim_n x_{2n+1} = 0,\ s = s' .$$

Somit konvergiert $s_k \to s,\ (k \to \infty),\ s = \sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k x_k$. □

Beispiel. $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ist alternierend mit $1/k \searrow 0$ (monoton fallend).
Also ist $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ konvergent, aber **nicht** absolut konvergent. (Summe ist $\ln 2$).

2.13 Bedingt und unbedingt konvergente Reihen

Beispiel:

$$\begin{array}{llllllll} 1 & -1/2 & +1/3 & -1/4 & +1/5 & -1/6\ldots & = s \neq 0 & (1) \\ & +1/2 & & -1/4 & & +1/6\ldots & = s/2 \neq 0 & \\ 1 & & +1/3 & -1/2 & +1/5 & +1/7 - 1/4\ldots & = \frac{3}{2}s \neq 0 & (2) \end{array}$$

In (2) steht eine **Umordnung** der Reihe in (1) mit **anderer** Summe!

Definition. $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei Bijektion ("**Permutation von** $\mathbb{N}$"). Dann heißt $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\pi(n)}$ eine **Umordnung** der Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

Definition. Eine konvergente Reihe $s = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ heißt **unbedingt konvergent** $:\Leftrightarrow$
Jede Umordnung von $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konvergiert, und zwar wieder gegen s (letzteres folgt!).
Eine konvergente, nicht unbedingt konvergente Reihe heißt **bedingt konvergent**.

Beispiel: Die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ist bedingt konvergent. Sie ist nicht absolut konvergent.

Satz. *Äquivalent:*

(1) $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *ist absolut konvergent.*

(2) $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *ist unbedingt konvergent.*

Beweis. Wir zeigen nur (1) $\Rightarrow$ (2): absolut konvergente Reihen darf man beliebig umordnen: Sei dazu $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Permutation und $y_n := x_{\pi(n)},\ s_N = \sum_{n=1}^{N} x_n,\ t_N := \sum_{n=1}^{N} y_n$.
Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $M \in \mathbb{N}$, so dass für alle $p \in \mathbb{N}$ gilt: $|x_{M+1}| + \cdots + |x_{M+p}| < \varepsilon$.
Da π eine Bijektion ist, gibt es $k_0 \in \mathbb{N}$ (i.a. $>> M$) mit $\{1, \ldots, M\} \subset \{\pi(1) \ldots \pi(k_0)\}$, mit $k_0 \geq M$. Für $m \geq k_0$ treten $x_1 \ldots x_M$ sowohl in s_m als auch in t_m auf und kommen daher in $s_m - t_m$ nicht mehr vor. Damit folgt

$$s_m - t_m = \delta_{M+1}x_{M+1} + \cdots + \delta_{M+p}x_{M+p} \text{ mit geeigneten Werten } p \in \mathbb{N}\ , \delta_j \in \{\pm 1, 0\}\ ,$$

$$|s_m - t_m| \leq |x_{M+1}| + \cdots + |x_{M+p}| < \varepsilon\ .$$

Also ist $(s_m - t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Nullfolge; $s_m \to s \Rightarrow t_m \to s$: die umgeordnete Reihe hat den gleichen Grenzwert. □

Riemannscher Ordnungssatz. *Eine bedingt konvergente Reihe* $\sum\limits_n x_n$ *in* $\mathbb{R}$ *besitzt eine Umordnung, die gegen eine beliebig vorgegebene Zahl* $s \in \mathbb{R}$ *konvergiert.*

Beweisidee dazu:

$R_+ = \{n \mid x_n \geq 0\}$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{R}_+} x_n = \infty$ verwenden, um über s hinauszukommen und
$R_- = \{n \mid x_n < 0\}$, $\sum_{n\in\mathbb{R}_-} x_n = -\infty$ um unterhalb von s zu kommen etc. ($x_n \to 0$).

2.14 Der große Umordnungssatz

Definition. Sei M eine abzählbar unendliche Menge, $(x_\alpha)_{\alpha\in M}$ eine "**Folge**" in $\mathbb{K}$ und $\Phi : \mathbb{N} \to M$ Bijektion. Wir definieren $\sum\limits_{\alpha\in M} x_\alpha := \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} x_{\phi(n)}$.
Dies hängt **dann** nicht von der speziellen Wahl von Φ ab, wenn die Reihe absolut konvergent ist (wie gerade bewiesen, 2.13).

Großer Umordnungssatz. *Sei* M *eine abzählbare Menge,* $M = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ *eine Zerlegung in paarweise disjunkte Teilmengen* I_n , *und* $\sum\limits_{\alpha\in M} x_\alpha$ *sei absolut konvergent. Dann gilt:*

$$\sum_{\alpha\in M} x_\alpha = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{\alpha\in I_n} x_\alpha) \ .$$

Absolute Konvergenz bedeutet hier das Vorliegen einer (und damit aller) der 3 Bedingungen.

(1) $\exists \Phi : \mathbb{N} \to M \ : \ \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_{\Phi(n)}| < \infty$.

(2) $\exists \mathbb{K} < \infty \ \forall E \subset M$ endlich $\sum\limits_{\alpha\in E} |x_\alpha| \leq K$.

(3) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{\alpha\in I_n} |x_\alpha| < \infty$ (bei irgendeiner Realisierung der Summen).

Beweis. (Walter) Für $I \subset M$ benutzen wir die Bezeichnung $S(I) = \sum\limits_{\alpha\in I} x_\alpha$; dies ist unabhängig von $\Phi : \mathbb{N} \to I$ wegen der absoluten Konvergenz.

i) $S(I) + S(M \setminus I) = S(M)$: Ist $|I| = p + 1 < \infty$, finde eine Bijektion $\Phi : \{0, \dots p\} \to I, \ \Phi : \{n \mid n > p\} \to M \setminus I$. Sei $y_n := x_{\Phi(n)}$. Dann ist $S(I) = \sum\limits_{n=0}^{p} y_n, \ S(M \setminus I) = \sum\limits_{n>p} y_n, \ S(M) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$. Ist $|I| = \aleph_0$ und $|M \setminus I| = \aleph_0$, sei $\Phi : \mathbb{N} \to M$ Bijektion mit $\Phi : 2\mathbb{N} \to I$ und $\Phi : 2\mathbb{N}+1 \to M \setminus I$ bijektiv. Ebenfalls gilt mit $y_n := x_{\Phi(n)}$, dass $\sum\limits_n |y_n| < \infty$ ist. Also ist $\sum\limits_n |y_{2n}| < \infty, \ \sum\limits_n |y_{2n+1}| < \infty$. Die Behauptung folgt dann aus $\sum\limits_n y_n = \sum\limits_n y_{2n} + \sum y_{2n+1}$. Insbesondere ist

$$\sum_{\alpha\in I} |x_\alpha| \leq \sum_{\alpha\in M} |x_\alpha|. \quad (*)$$

ii) Wende i) auf disjunkte Teilmengen I, J von M an: $S(I) + S(J) = S(I \cup J)$. Dies gilt sogar analog für eine Zerlegung von M in abzählbar viele disjunkte Teilmengen I_n von M :

$S(M) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} S(I_n)$, da für alle $p \in \mathbb{N}$

$S(M) = \sum\limits_{n=1}^{p} S(I_n) + S(M_p)$, $M_p = M \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{p} I_n$ gilt, und $S(M_p) \to 0$ geht $(p \to \infty)$:

Ist nämlich $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} x_{\Phi(n)}$ eine Realisierung von $S(M)$, geht $\sum\limits_{n=N}^{\infty} |x_{\Phi(n)}| \to 0 \quad (N \to \infty)$, wegen der absoluten Konvergenz der Reihe. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also $n \in \mathbb{N}$ mit $\sum\limits_{n=N}^{\infty} |x_{\Phi(n)}| < \varepsilon$. Dies gilt auch für endliche oder unendliche Summen $\sum^N |x_{\Phi(n)}| < \varepsilon$, bei welcher alle Indizes n größer als N sind, wegen $(*)$.

Sei jetzt $r > N$ so gewählt, dass $I_1 \cup \dots \cup I_r \supseteq \{\Phi(0), \dots, \Phi(N)\}$. Für $p > r$ kommen diese Indizes $(\Phi(j))_{j \le N}$ nicht in M_p vor; $S(M_p)$ ist eine Summe vom Typ $\sum^N |x_{\Phi(n)}| < \varepsilon$. Daraus folgt die Behauptung. □

Korollar (Doppelreihensatz). *Sei* $(x_{nm})_{n,m \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$ *gegeben mit* $\sup\limits_{N \in \mathbb{N}} \sum\limits_{n,m=0}^{N} |x_{nm}| \le K < \infty$. *Dann konvergieren alle folgenden Reihen und sind gleich:*

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} x_{nm} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} x_{nm} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_{nm} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} x_{i,k-i} \right) .$$

Beweis. $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ Indexmenge. Zerlegungen von M in disjunkte
- Zeilen $Z_n = \{n\} \times \mathbb{N}$
- Spalten $S_m = \mathbb{N} \times \{m\}$ □
- Diagonalen $D_k = \{(i,j) \mid i + j = k\}$.

Produkt endlicher Summen: $\left(\sum\limits_{k=0}^{N} x_n \right) \left(\sum\limits_{m=0}^{M} y_m \right) = \sum\limits_{n=0,m=0}^{N,M} x_n y_m$.

Korollar (Cauchy-Produkt).
Seien $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}_0} x_n$ *und* $\sum\limits_{m \in \mathbb{N}_0} y_m$ *absolut konvergent. Dann gilt*

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} x_n \right) \left(\sum_{m \in \mathbb{N}_0} y_m \right) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} z_k \ , \ z_k := \sum_{n=0}^{k} x_n y_{k-n} \ .$$

(Anordnung nach Schrägreihen; es reicht hier, die Konvergenz von $\sum\limits_n x_n$ *und die absolute Konvergenz von* $\sum\limits_n y_n$ *zu fordern.)*

Beispiele:

(1) Wir wissen bereits, dass die Reihe $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ für alle $x \in \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ absolut konvergiert (Quotientenkriterium).

Behauptung. $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ für $x, y \in \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Denn mit $x_n := x^n/n!$ und $y_m := y^m/m!$ und $z_k = \sum_{n=0}^{k} x_n y_{k-n}$ gilt unter Benutzung des Binomischen Lehrsatzes

$$\begin{aligned} \exp(x) \cdot \exp(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} z_k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} \frac{y^{k-n}}{(k-n)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} x^n y^{k-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \exp(x+y) \ . \end{aligned}$$

Mit $\exp(0) = 1$ folgt also $\exp(-x) = 1/\exp(x)$. **Insbesondere**: $\exp(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{K}$. □

(2) Sei $x_n = y_n = (-1)^n/\sqrt{n+1}$. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ **bedingt** konvergent. Der Satz ist **nicht** anwendbar; man hat

$$z_k = \sum_{n=0}^{k} x_n y_{k-n} = (-1)^k \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \frac{1}{\sqrt{k-n+1}} \ , \ |z_k| \geq \sum_{n=0}^{k} \frac{2}{k+2} = 2\frac{k+1}{k+2} \to 2 \ ,$$

da $\sqrt{n+1}\sqrt{k-n+1} \leq \frac{n+1+k-n+1}{2} = \frac{k+2}{2}$. Also ist $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ divergent!

2.15 Dezimaldarstellung reeller Zahlen

(Stand bisher noch aus!)

Definition. Sei $b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ (etwa $b = 10$) . Seien $y_i \in \{0, \ldots, b-1\}$. Dann heißt $y_{-m} \ldots y_0, y_1 y_2 \ldots$ die b**-adische (Dezimal-)Darstellung** der Zahl $x = \sum_{i=-m}^{\infty} y_i/b^i, \ x \in \mathbb{R}$. Wir setzen weiterhin voraus: $(*)$ $\forall_n \ \exists m \geq n \quad y_m \neq (b-1)$ (für $b = 10 : \ y_m \neq 9$) .

Bemerkung. Die absolute Konvergenz ist gesichert, da $|y_i/b^i| \leq \frac{b-1}{b^i}$, also $(b-1) \sum_{i=0}^{\infty} b^{-i} = \frac{b-1}{1-1/b} = b$.

Satz. *Jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ hat eine eindeutig bestimmte b-adische Darstellung, bei festem $b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.*

Beweis. Existenz. O.B.d.A. sei $x \in [0,1)$. Zerlege $I_0 := [0,1) = \bigcup_{i=0}^{b-1} \left[\frac{i}{b}, \frac{i+1}{b}\right)$ disjunkt.

$\exists^1 y_1 \in \{0,\dots,b-1\} \quad x \in I_1 := \left[\frac{y_1}{b}, \frac{y_1+1}{b}\right),\ I_1 = \bigcup_{i=0}^{b-1} \left[\frac{y_1}{b} + \frac{i}{b^2}, \frac{y_1}{b} + \frac{i+1}{b^2}\right)$ disjunkt.
$\exists^1 y_2 \in \{0,\dots,b-1\} \quad x \in I_2 := \left[\frac{y_1}{b} + \frac{y_2}{b^2}, \frac{y_1}{b} + \frac{y_2+1}{b^2}\right)$ etc.
Induktiv findet man eine Folge von $(y_i), y_i \in \{0,\dots,b-1\}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{y_1}{b} + \dots + \frac{y_n}{b^n} \le x < \frac{y_1}{b} + \dots + \frac{y_n}{b^n} + \frac{1}{b^n} \ .$$

Da $\frac{1}{b^n} \to 0$, konvergieren beide Seiten gegen x . Die Bedingung $(*)$ ist erfüllt, da sonst

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0\ y_n = b-1 \ , \ \text{also} \ \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{y_n}{b^n} = (b-1)\frac{b^{-n_0}}{1-1/b} = b^{1-n_0} \ .$$

Dies würde aber durch eine um 1 höhere Ziffer an der Stelle $x_0 - 1$ berücksichtigt.

Eindeutigkeit. Stellt auch $0, z_1 z_2 z_3 \dots$ die Zahl $x \in [0,1]$ dar, folgt $z_i = y_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$: Wäre dies falsch, gibt es einen minimalen Index $m \in \mathbb{N}$ mit (etwa) $z_m < y_m$, d.h. $z_m + 1 \le y_m$. Somit folgt

$$\begin{aligned} x &= 0, z_1 \dots z_m z_{m+1} \dots < 0, z_1 \dots z_m (b-1)(b-1) \dots \\ &= 0, z_1 \dots z_m + \frac{z_m + 1}{b^m} \le 0, y_1 \dots y_m \le 0, y_1 \dots y_m y_{m+1} \dots = x \end{aligned}$$

Dabei gilt $<$, da mindestens eine Zahl ab z_{m-1} kleiner als $(b-1)$ ist. Widerspruch. □

Bemerkung. Die Grundrechenoperationen $(+,\cdot)$ wären, ausgehend von b-adischen Darstellungen, sehr viel mühsamer einzuführen als über die benutzte Axiomatik. Für Computer-Darstellungen der Zahlen sind speziell auch $b = 2$, 8 oder 16 von Interesse.