ANALYSIS I

Prof. König, WS 2012/13

Literatur

[1] Ch. Blatter; Analysis I, Springer HTB

[2] O. Forster; Analysis I, Vieweg

[3] W. Kaballo; Einführung in die Analysis I, Spektrum

[4] H. Amann, J. Escher; Analysis I, Birkhäuser

[5] W. Walter; Analysis I, Springer HTB

[6] H. Heuser; Lehrbuch der Analysis I, Teubner

[7] M. Barner, M. Flohr; Analysis I, de Gruyter

[8] S. Lang; Analysis, Addison Wesley

[9] J. Dieudonné; Foundations of Modern Analysis, Academic Press

[10] W. Rudin; Principles of Mathematical Analysis, Mc Graw Hill

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Gegenstand der Grundvorlesungen

Die **Mathematik** macht Aussagen über Mengen und abstrakte Strukturen (wie Zahlen, Abbildungen und Räume), die durch logische Schlüsse aus wenigen Axiomen (grundlegenden Aussagen) abgeleitet („bewiesen") werden. Grundlegend sind folgende zentrale Begriffe:

ANALYSIS	LINEARE ALGEBRA
Reelle Funktionen	Vektorräume, lineare Abbildungen
Grenzwert, Stetigkeit	Gleichungssysteme
Ableitung und Integral	Eigenwerttheorie

Die Mathematik arbeitet mit abstrakten Begriffsbildungen, die auf Grund ihrer Allgemeinheit vielseitig anwendbar sind, etwa:
Ableitung einer Funktion = qualitative Beschreibung des Änderungsverhaltens einer Funktion, z.B.

Funktion	Ableitung
Ort eines Körpers zur Zeit t	Geschwindigkeit
Temperatur als Funktion der Zeit	Abkühlung oder Erwärmung
Masse als Funktion des Ortes	Massendichte

Naturgesetze sind oft Gesetze über die örtliche oder zeitliche Änderung bestimmter Funktionen: Differentialgleichungen. Etwa: Die Abkühlung einer Flüssigkeit ist proportional zur Temperaturdifferenz zur Umgebung: $T'(t) = -c(T(t) - T_0)$.

1.2 Mengen

Die Umgangssprache ist oft ungenau. Zur genauen Formulierung von Ergebnissen bedient sich die Mathematik der **Mengenlehre**.
Eine **Menge** ist eine „Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Objekten (den **Elementen**) zu einer Gesamtheit" (Cantor, 1895).
Bezeichnung: $x \in M$ für „x ist Element der Menge M"; $x \notin M$: „x ist **nicht** Element in M".
Zwei Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Die Reihenfolge der Elemente spielt dabei keine Rolle. Enthält eine Menge M nur endlich viele Elemente $x_1, \cdots, x_n$, schreibt man $M = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Ferner:
$\emptyset$ bezeichne die **leere Menge**, also die Menge **ohne** Elemente, die von **Null** zu unterscheiden ist.
Eine Menge kann wieder Element einer anderen Menge sein, zu unterscheiden sind:

$$x, \quad \{x\}, \quad \{\{x\}\}.$$

Analoge Mengenschreibweise bei **unendlichen** Mengen, wenn das Bildungsgesetz klar ist:

$$\begin{aligned} &\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\} \qquad \textbf{natürliche}\text{ Zahlen},\\ &\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, \cdots\} \qquad \textbf{ganze}\text{ Zahlen},\\ &\mathbb{Q} = \textbf{rationale}\text{ Zahlen}, \quad \mathbb{R} = \textbf{reelle}\text{ Zahlen}. \end{aligned}$$

Obige Definition der Menge ist eine „naive", sie kann bei extensiver Auslegung zu *Antinomien* führen.

Beispiel. Russellsche Antinomie:
M = **Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.** Dies ist widersprüchlich in sich, denn gilt $M \in M$?
Wenn ja, $M \notin M$, Widerspruch. Wenn nein, $M \in M$, Widerspruch.

Dies Problem tritt nur auf bei der Bildung von Mengen von Mengen „verschiedener Stufe". Unproblematisch ist die Bildung von Teilmengen einer von vornherein bekannten Grundmenge (wie $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$) durch **Aussonderung**.
Mathematische Aussagen über Elemente von Mengen sind **entweder** wahr (w) **oder** falsch (f). Dies ist ein ausschließliches **oder**, tertium non datur. Man hat etwa

$$A_1 : 2 \cdot 2 = 5 \quad \text{f}, \qquad A_2 : 4 > 0 \quad \text{w}.$$

Ist $A(x)$ eine Aussage über die Elemente x einer Menge M, bezeichnet

$$\{x \,|\, x \in M \ A(x) \text{ gilt}\} = \{x \in M \mid A(x) \text{ gilt}\} = \{x \in M \mid A(x)\}$$

die **Teilmenge** von M derjenigen x, für die die Aussage $A(x)$ **wahr** ist. Etwa $N_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist Quadratzahl}\}$, $N_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\} = \emptyset$.
Teilmengen: $N \subset M$ bedeutet: Aus $x \in N$ folgt $x \in M$, d.h. alle Elemente von N liegen in M.
$N = M$ bedeutet $N \subset M$ und $M \subset N$. Um die potentielle Gleichheit zu betonen, wird $N \subset M$ auch als $N \subseteq M$ geschrieben. Man hat $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ **und** $\emptyset \subset M$.
Sind M und N Mengen, heißt

$$
\begin{aligned}
M \cap N &\overset{1}{:=} \{x \mid x \in M \textbf{ und } x \in N\} \qquad \textbf{Durchschnitt} \text{ von } M \text{ und } N\,, \\
M \cup N &:= \{x \mid x \in M \textbf{ oder}^2\ x \in N\} \quad \textbf{Vereinigung} \text{ von } M \text{ und } N\,.
\end{aligned}
$$

M und N sind **disjunkt**, wenn $M \cap N = \emptyset$.
Das Komplement von M in N ist $N \setminus M := \{x \in N \mid x \notin M\}$; falls $M \subset N$ und N bekannt ist, schreibt man oft auch $C\,M = C_N\,M = N \setminus M$ für das Komplement von M (in N).

Lemma. *Seien M_1, M_2, N Mengen. Dann gilt:*

(1) $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1, \quad M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$ *Kommutativität .*

(2) $\left.\begin{aligned} N \cap (M_1 \cup M_2) &= (N \cap M_1) \cup (N \cap M_2) \\ N \cup (M_1 \cap M_2) &= (N \cup M_1) \cap (N \cup M_2) \end{aligned}\right\}$ *Distributivität .*

Beweis von (2), 1. Zeile:

$$
\begin{aligned}
x \in N \cap (M_1 \cup M_2) &\Leftrightarrow x \in N \text{ und } x \in M_1 \cup M_2 \\
&\Leftrightarrow x \in N \text{ und } (x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2).
\end{aligned}
$$

2 Fälle: $x \in M_1,\ x \in M_2$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (x \in N \text{ und } x \in M_1) \text{ oder } (x \in N \text{ und } x \in M_2) \\
&\Leftrightarrow x \in N \cap M_1 \text{ oder } x \in N \cap M_2 \\
&\Leftrightarrow x \in (N \cap M_1) \cup (N \cap M_2).
\end{aligned}
$$

□

Ist M eine Menge, nennt man $\mathcal{P}(M) := \{N \mid N \subseteq M\}$ die Potenzmenge von M. Ist $x \in M$, so gilt $\{x\} \in \mathcal{P}(M)$.

[1]:= bedeutet: definitionsgemäß gleich
[2]beides ist auch zugelassen

1.3 Funktionen

Der Begriff der **Abbildung** oder **Funktion** ist erst vor 150 Jahren klar formuliert worden, nachdem in der Theorie der Fourierreihen Probleme mit der herkömmlichen vagen Vorstellung entstanden waren.

Definition. *Seien X, Y Mengen. Eine **Abbildung** oder **Funktion** f **von** X **nach** Y, Schreibweise $f : X \to Y$, ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$, $y = f(x)$, **das Bild von** x unter f, zuordnet. X heißt **Definitionsbereich** von f, Y **Wertebereich**.*

Bemerkung. (1) Die Definition ist unsymmetrisch, sie beinhaltet **nicht**, dass auch jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ zugeordnet wäre.

(2) Es ist wichtig, zwischen der Abbildung f und dem Bildelement $f(x) \in Y$ zu unterscheiden.

(3) Zwei Abbildungen $f_1, f_2 : X \to Y$ sind gleich, wenn sie überall gleiche Bilder haben.

Eine konkrete Beschreibung von $f : X \to Y$ wird durch eine präzise Vorschrift gegeben; meist nach dem folgenden Schema:

$$\left.\begin{array}{ll} f : X \to Y, & x \mapsto \dots \\ f : X \to Y, & f(x) := \dots \end{array}\right\}$$

Die Vorschrift **allein** reicht nicht, zu f gehört auch die Angabe von **Definitionsbereich** und **Wertebereich**!

Etwa:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

(c) M Menge, $\quad C : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M), \quad N \mapsto CN = M \setminus N$

(d) M Menge, $\quad \mathrm{Id}_M : M \to M, \quad x \mapsto x \qquad$ Identische Abbildung.

Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung und $A \subset X$, $B \subset Y$, heißen

$$\begin{array}{rll} f(A) & := \{f(x) \mid x \in A\} & \textbf{Bild von } \text{A unter } f, \\ f^{-1}(B) & := \{x \mid x \in X,\ f(x) \in B\} & \textbf{Urbild von } \text{B unter } f. \end{array}$$

In 2. etwa $g^{-1}(\{0\}) = \mathbb{Q}$, $g(\mathbb{Q}) = \{0\}$, Schreibweise: $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\})$.

Definition. ***Kompositionen*** *von Abbildungen sind Zusammensetzungen solcher: Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen, erhält man durch*

$$g \circ f : X \to Z, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad \textit{für } x \in X$$

die Komposition $h := g \circ f$.

Beispiel.

$$\left.\begin{array}{ll} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, & x\mapsto x^2 \\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, & x\mapsto x+5 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} (g\circ f)(x)=x^2+5 \\ (f\circ g)(x)=(x+5)^2 \end{array}$$

Also $f\circ g\neq g\circ f$ (i.a.), d.h. die Komposition $\circ$ ist **nicht** kommutativ.

Aber $\circ$ ist assoziativ: $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$ (wenn dies wohldefiniert ist, d.h. das Bild der Abbildung f bzw. g im Definitionsbereich von g bzw. h liegt).

1.4 Mathematische Aussagen

Die Formulierung von mathematischen Ergebnissen geschieht in **Sätzen**, **Theoremen** (wichtigen Ergebnissen), **Korollaren** (einfachen Folgerungen) und **Lemmata** (Hilfssätzen) unter **genauer** Angabe der **Voraussetzungen**.
Beweise sind die Herleitung der **Behauptung** von Sätzen etc. aus bekannten Tatsachen durch logische Schlüsse.
Definitionen sind Festlegungen neuer Begriffe, oft mittels logischer Symbole.
Notationen sind Bezeichnungen für Objekte durch Symbole, etwa $\mathbb{N}$ für die natürlichen Zahlen.
Die Einführung „guter" Definitionen und sinnfälliger Notationen ist in der Praxis wichtig, etwa für die Entstehung neuer Vermutungen durch Analogien. So war etwa die römische Zahldarstellung sehr umständlich (Rechnungen behindert, schlechte Notation); die Notation $f'(x)=\frac{df}{dx}$ für die Ableitung einer Funktion ist sehr sinnfällig (wegen der Analogie zum Differenzenquotienten).
Bei Beweisen unterscheidet man zwischen **direkten** und **indirekten**; der direkte führt durch eine Folge von logischen Schlüssen zur Behauptung. Beim indirekten Beweis nimmt man an, die Behauptung sei **falsch** und konstruiert dann einen Widerspruch zur Voraussetzung.

Beispiel. für letzteres: Es gibt unendlich viele Primzahlen (Euklid).

Beweis. Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen, ordne sie der Größe nach, $p_1\leq\cdots\leq p_n$. Bilde $p_{n+1}:=p_1\cdots p_n+1$. Dann ist p_{n+1} Primzahl, da Division durch $p_1,\cdots,p_n$ stets Rest 1 ergibt. Widerspruch zur Annahme, dass p_n die größte Primzahl war. $\square$

1.5 Aussagenlogik

Die Prädikatenlogik befasst sich mit **Aussagen** und ihren Verknüpfungen. Mathematisches Schließen besteht formal im einwandfreien Umgang mit Aussagen über mathematische Gegenstände.
Zweiwertige Logik: Jede (mathematische) Aussage hat einen **Wahrheitswert** (WW): sie ist entweder **wahr** (w) *oder* **falsch** (f) – ausschließliches *oder* hier.

Eine mathematische Aussage darf also auch falsch sein (uninteressanter Fall), mitunter ist auch nicht bekannt, ob sie wahr ist.

$$A_1 : 2 \cdot 2 = 5 \qquad \text{(f)}$$
$$A_2 : \text{Für alle } 0 \neq x \in \mathbb{Q} \ \text{ gilt } \ x^2 > 0 \qquad \text{(w)}$$
$$A_3 : n \in 2 \cdot \mathbb{N} \Rightarrow \ \text{n ist Summe zweier Primzahlen .}$$

A_3 ist die Goldbachsche Vermutung, von der man nicht weiss, ob sie wahr oder falsch ist.

Logische Verknüpfungen von Aussagen A, B:

$\neg A$	**nicht** A, **Negation:**	entgegengesetzter WW wie A
$A \wedge B$	A **und** B**, Konjunktion:**	genau dann wahr, wenn **sowohl** A **als auch** B wahr sind.
$A \vee B$	A **oder** B**, Disjunktion:**	genau dann wahr, wenn **mindestens** eine der Aussagen A oder B wahr ist.
$A \Rightarrow B$	**„aus** A **folgt** B**”, Implikation:**	**nur** dann falsch, wenn A wahr ist und B falsch ist.
$A \Leftrightarrow B$	**„**A **ist äquivalent zu** B**”:**	$A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$.

Wahrheitstabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$(\neg A) \vee B$	$A \Leftrightarrow B$	$(\neg A) \Rightarrow (\neg B)$
w	w	f	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f	f	w
f	w	w	f	w	w	w	f	f
f	f	w	f	f	w	w	w	w

Mathematische Sätze haben meist die Form „Aussage $A \Rightarrow B$ ist wahr”, d.h. falls die Voraussetzung „Aussage A ist richtig” gilt, folgt die Behauptung „B ist wahr”. Falls A falsch ist, wird **keine** Aussage gemacht, ob B gilt oder nicht gilt!
$A \Rightarrow B$ hat den gleichen WW wie $(\neg A) \vee B$ und wie $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$: **Kontraposition** von $A \Rightarrow B$.
Dies ist die schon illustrierte Technik des indirekten Beweises: statt „$A \Rightarrow B$” zu beweisen („$A \Rightarrow B$ ist wahr”), zeigt man $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$. Dazu Annahme, B sei falsch. Leite „A falsch” her (dann $(\neg A) \vee B$ wahr).

Gilt „$A \Rightarrow B$”, sagt man, A sei **hinreichende Bedingung** für B,
und B sei **notwendige Bedingung** für A.

In der Praxis: Bevorzugung wahrer Aussagen; man schreibt nur Aussagen nieder, die wahr sind oder deren Wahrheit man behauptet. Interpretation von $A \Rightarrow B$ als „B wahr, sofern A wahr”.

De Morgansche Negationsregeln: Es haben gleiche Wahrheitswerte:

(1) $\neg(A \vee B)$ und $(\neg A) \wedge (\neg B)$

(2) $\neg(A \wedge B)$ und $(\neg A) \vee (\neg B)$

(3) $\neg(A \Rightarrow B)$ und $A \wedge (\neg B)$.

1.6 Quantoren

Häufig kommen Aussagen vor, in denen eine „freie” Variable x auftritt, etwa

$$A(x) : x \text{ ist Primzahl.}$$

Das wird erst sinnvoll, wenn die Grundmenge derjenigen x spezifiziert wird, für die die Aussage gemacht wird (oben etwa für $x \in \mathbb{N}$).
Aus der **Aussageform** $A(x)$ kann man vermittels der **Quantoren**

$\exists$ „**es gibt**” und $\forall$ „**für alle**”

Aussagen bilden: M sei Menge, $A(.)$ Aussage mit einer Variablen .

$\forall_{x\in M}:$	$A(x)$	„Für alle $x \in M$ ist $A(x)$ wahr”: $M = \{x \in M \mid A(x)\}$.
$\exists_{x\in M}:$	$A(x)$	„Es gibt $x \in M$, für das $A(x)$ wahr ist”: $\emptyset \neq \{x \in M \mid A(x)\}$.
$\exists^1_{x\in M}:$	$A(x)$	„Es gibt genau ein $x \in M$, für das $A(x)$ gilt”: $\{x \in M \mid A(x)\}$ hat genau 1 Element.

Negation von Quantorenaussagen
(Wichtig für indirekte Beweise von Aussagen wie $\forall_{x\in M}:\ A(x)$)

$$\boxed{\begin{aligned} \neg(\forall_{x\in M}:\ A(x)) &\Leftrightarrow \exists_{x\in M}:\ \neg A(x) \\ \neg(\exists_{x\in M}:\ A(x)) &\Leftrightarrow \forall_{x\in M}:\ \neg A(x) \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} \text{Denn: } \neg\ &(\forall_{x\in M}:\ A(x)) \Leftrightarrow M \neq \{x \in M \mid A(x)\} \\ &\Leftrightarrow M \setminus \{x \in M \mid A(x)\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{x \in M \mid \neg A(x)\} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \exists_{x\in M}:\ \neg A(x). \end{aligned}$$

Bei **Negation Quantoren vertauschen, Aussage negieren**.

Beispiel. Sei $p \in \mathbb{N}$. p **prim** $:\Leftrightarrow \forall_{n\in\mathbb{N}}\ [n \text{ teilt } p \Rightarrow (n = 1 \vee n = p)]$

$$\begin{aligned} p \text{ nicht prim } &\Leftrightarrow \exists_{n\in\mathbb{N}}\ \neg(n \text{ teilt } p \Rightarrow (n = 1 \vee n = p)) \\ &\Leftrightarrow \exists_{n\in\mathbb{N}}\ (n \text{ teilt } p) \wedge \neg(n = 1 \vee n = p) \\ &\Leftrightarrow \exists_{n\in\mathbb{N}}\ (n \text{ teilt } p) \wedge (n \neq 1) \wedge (n \neq p). \end{aligned}$$

Beispiel. Beliebige Durchschnitte und Vereinigungen

Sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Mengen.

$$\textbf{Durchschnittsmenge} \quad \bigcap_{M\in\mathcal{M}} M := \{x \mid \forall_{M\in\mathcal{M}} : x \in M\}\ ,$$

$$\textbf{Vereinigungsmenge} \quad \bigcup_{M\in\mathcal{M}} M := \{x \mid \exists_{M\in\mathcal{M}} : x \in M\}\ .$$

Satz (**de Morgansche Regeln**). *Seien X eine Menge und $\mathcal{M}$ eine Menge von Teilmengen von X. Dann gilt*

(1) $C_X\left(\bigcup_{M\in\mathcal{M}} M\right) = \bigcap_{M\in\mathcal{M}} C_X M.$

(2) $C_X\left(\bigcap_{M\in\mathcal{M}} M\right) = \bigcup_{M\in\mathcal{M}} C_X M.$

Beweis von (1):

$$\begin{aligned} x \in C_X\left(\bigcup_{M\in\mathcal{M}} M\right) &\Leftrightarrow x \in X \wedge \neg\left(x \in \bigcup_{M\in\mathcal{M}} M\right) \\ &\Leftrightarrow x \in X \wedge \neg\left(\exists_{M\in\mathcal{M}}\, x \in M\right) \\ &\Leftrightarrow x \in X \wedge \left(\forall_{M\in\mathcal{M}}\, x \notin M\right) \\ &\Leftrightarrow \forall_{M\in\mathcal{M}}(x \in X \wedge x \notin M) \\ &\Leftrightarrow \forall_{M\in\mathcal{M}}\, x \in C_X M \Leftrightarrow x \in \bigcap_{M\in\mathcal{M}} C_X M. \end{aligned}$$

□

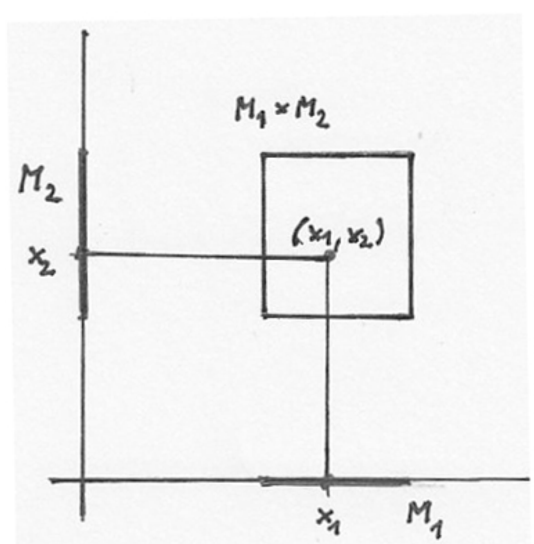
1.7 Kartesisches Produkt

Bei einem **geordneten Paar** (a_1, a_2) von 2 Objekten a_1, a_2 ist die **Reihenfolge** wichtig; a_1 (a_2) ist die **1. (2.) Komponente** von (a_1, a_2).
[$a_1 = a_2$ möglich; $(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \Leftrightarrow (a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2)$.]
I.A. $(a_1, a_2) \neq (a_2, a_1)$, im Unterschied zur Menge $\{a_1, a_2\} = \{a_2, a_1\}$.

Definition. *Seien M_1, M_2 Mengen.* ***Das Kartesische Produkt*** $M_1 \times M_2$ *von M_1 und M_2 ist gegeben durch*

$$M_1 \times M_2 := \{(x_1, x_2) | x_1 \in M_1 \wedge x_2 \in M_2\}.$$

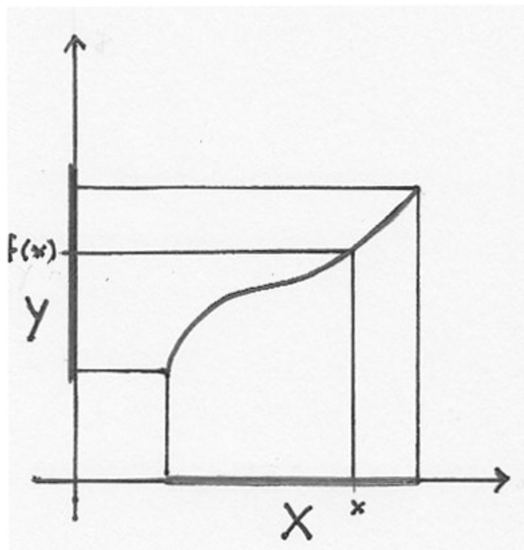
Speziell ist für uns wichtig: $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Anschauliche Vorstellung:



Analoges Vorgehen bei n Mengen $M_1, \cdots, M_n$ führt zu $M_1 \times \cdots \times M_n$, der Menge aller (geordneten) **n-Tupel** $(x_1, \cdots, x_n)$ mit $x_1 \in M_1, \cdots, x_n \in M_n$; x_i = **i-te Komponente** von $(x_1, \cdots, x_n)$. Etwa: $\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dreidimensionaler Anschauungsraum.

Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung, so ist **der Graph von** f eine Teilmenge von $X \times Y$, nämlich

$$\Gamma(f) := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}.$$



$\Gamma := \Gamma(f)$ hat die charakteristische Eigenschaft

$$\forall_{x \in X} \quad \exists^1_{y \in Y} \quad (x, y) \in \Gamma \qquad (f \text{ ist hieraus rekonstruierbar}).$$

1.8 Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Definition. *$f : X \to Y$ ist **surjektiv** oder **auf** Y $:\Leftrightarrow f(X) = Y$,*
d.h. $\forall_{y \in Y} \quad \exists_{x \in X} \quad f(x) = y$, *oder auch:* $\forall_{y \in Y} \quad f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$.
Man hat stets: $\bar{f} : \underset{x \,\mapsto\, f(x)}{X \to f(X)}$ *ist surjektiv (Einschränkung des Wertebereiches).*

Definition. *$f : X \to Y$ ist **injektiv** oder **eineindeutig*** $:\Leftrightarrow$

$$\boxed{\forall_{x_1, x_2 \in X} \quad (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)),}$$

d.h. verschiedene Punkte in X haben verschiedene Bildpunkte in Y.

Gleichwertig: $\forall_{x_1, x_2 \in X} \qquad (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$

$\forall_{y \in Y} \qquad (f^{-1}(\{y\}) = \emptyset \vee f^{-1}(\{y\})$ einelementig$)$

Beispiele. (1) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$ ist **nicht** injektiv $\quad (1^2 = (-1)^2)$,

(2) $\mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto x^2$ ist injektiv,

(3) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x^3$ ist injektiv, nicht surjektiv.

Definition. *$f : X \to Y$ ist* ***bijektiv*** *$:\Leftrightarrow f$ ist injektiv $\wedge$ f ist surjektiv.*

$$\Leftrightarrow \forall_{y \in Y} \quad f^{-1}(\{y\}) \text{ ist einelementig.}$$

$$\Leftrightarrow \forall_{y \in Y} \quad \exists^1_{x \in X} \quad y = f(x).$$

Dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : \underset{y=f(x)\mapsto x}{Y \to X}$ wohldefiniert.

Man hat: $\forall_{x \in X} \quad x = f^{-1}(f(x)), \quad \forall_{y \in Y} \quad y = f(f^{-1}(y))$.

Vorsicht: Mehrdeutigkeit in der Bezeichnung f^{-1}: Umkehrabbildung und Urbild. Das Urbild ist stets definiert, die Umkehrabbildung nur für bijektive Abbildungen f.

Satz. *Sei $f : X \to Y$ Abbildung $\Rightarrow$ (f bijektiv $\Leftrightarrow$ $\exists_{g:Y \to X} \quad (g \circ f) = \mathrm{id_X} \wedge (\mathrm{f} \circ \mathrm{g}) = \mathrm{id_Y}$).*

Beweis. "$\Rightarrow$:" $\quad g = f^{-1}$ Umkehrabbildung.
"$\Leftarrow$:" $\quad f$ ist injektiv: $\quad \forall_{x_1, x_2 \in X} : \ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow g(f(x_1)) = x_1 \neq x_2 = g(f(x_2))$
$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
f ist surjektiv: $\quad f(X) \supseteq f(g(Y)) \ = (f \circ g)(Y) = \mathrm{Id}_Y(Y) = Y, \ f(X) = Y. \quad \square$

Satz (Rechenregeln). *Für $f : X \to Y, A_1, A_2 \subset X$ und $B_1, B_2 \subset Y$ gilt*

(1) $f(A_1 \cap A_2) \overset{(*)}{\subseteq} f(A_1) \cap (A_2)$,

(2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$,

(3) $f^{-1}\left(B_1 \overset{\cap}{\cup} B_2\right) = f^{-1}(B_1) \overset{\cap}{\cup} f^{-1}(B_2)$,

(4) $f^{-1}(B_2 \setminus B_1) = f^{-1}(B_2) \setminus f^{-1}(B_1)$,

(5) $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$

(6) $f(f^{-1}(B_1)) = B_1 \cap f(x)$.

Beweis: Übung, $\subsetneq$ in $(*) : A = \mathbb{R}_+, \quad B = \mathbb{R}_-, \quad f(x) = x^2, \quad f(A) \cap f(B) = A$, $f(A \cap B) = \{0\}$.

1.9 Zum Zahlbegriff

Grundlegend für die Analysis sind die reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Bisher haben wir ganz unbefangen davon gesprochen. Wie führt man aber etwa $\sqrt{2}$ ein? $\sqrt{2}$ ist nicht rational, d.h. nicht von der Form p/q mit $p, q \in \mathbb{Z}, \ q \neq 0$.
(Wäre $\sqrt{2} = p/q$, o.B.d.A. $(p, q) := ggT(p, q) = 1$ nach Kürzen. Dann $p^2 = 2q^2$, p^2 gerade, d.h. p gerade, $p = 2m$, $p^2 = 4m^2 = 2q^2$, $2m^2 = q^2$, d.h. q^2 gerade, $2|(p, q)$. Widerspruch.)
$\mathbb{R}$ hat also „Lücken" von nicht-rationalen Zahlen.

Obige Schlüsse wie „Kürzen" oder „p^2 gerade $\Rightarrow$ p gerade" sind nicht weiter begründet worden: Sie lassen sich aber aus gewissen **Grundannahmen** und **Grundregeln** (**Axiomen**) herleiten.
Gewisse **exakt formulierte** und bewusst gemachte Grundvoraussetzungen, **Axiome**, benötigt man für den Aufbau jeder Theorie. Aus diesen sollen dann alle Aussagen durch logische Schlüsse abgeleitet werden. An die **Axiome** sind folgende Forderungen zu stellen:

(1) Widerspruchsfreiheit (ein Axiom nicht im Widerspruch zu Folgerung aus anderem),

(2) Einfachheit (sie sollen „einleuchtend" sein),

(3) Minimalität (möglichst wenig Axiome).

Nachteil: Mühsam und umständlich, viele elementare Aussagen sind zunächst zu beweisen, ohne große Ideen. Erfordert eigene Vorlesung „Begründung des Zahlsystems".
Vorteil: Klare Begründung.

Wir werden das Axiomensystem der reellen Zahlen angeben und einige (elementare) Folgerungen beispielhaft ableiten. *Dass* ein (eindeutig bestimmtes) Zahlsystem existiert, das den zu nennenden Axiomen genügt, werden wir nicht beweisen. (Wird in obiger Vorlesung getan.)
Die reellen Zahlen sind ein **vollständiger**, **geordneter Körper**. Demgemäß zerfallen die Axiome von $\mathbb{R}$ in 3 Gruppen

(1) **Körperaxiome**: Additions- und Multiplikationsregeln,

(2) **Ordnungsaxiome**: Körper mit $\leq$ Ordnung (schließt $\mathbb{C}$ aus),

(3) **Vollständigkeit**: $\mathbb{R}$ soll keine Lücken (wie $\sqrt{2}$) haben (schließt $\mathbb{Q}$ aus).

1.10 Körper

Die Axiome formulieren die Grundregeln für Addition und Multiplikation. Subtraktion und Division werden später definiert.

Definition. *Ein **Körper** ist ein Tripel $(K, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge K und zwei **Operatoren** $+, \cdot : K \times K \to K$, so dass folgende Axiome gelten:*

(K1) $\forall_{x,y,z\in K}\ (x+y)+z = x+(y+z), \quad (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$ ***Assoziativgesetze***

(K2) $\forall_{x,y\in K}\ x+y = y+x, \quad x\cdot y = y\cdot x$ ***Kommutativgesetze***

(K3) $\exists_{0,1\in K} \quad \forall_{x\in K} \quad x+0 = x,\ x\cdot 1 = x$ *Existenz **neutraler** Elemente*

(K4) $\forall_{x\in K\ (x\in K\setminus\{0\})} \quad \exists_{(-x)\in K\ (x^{-1}\in K)} \quad x+(-x) = 0\ (x\cdot x^{-1} = 1)$
*Existenz **inverser Elemente***

(K5) $\forall_{x,y,z\in K}\ x(y+z) = xy+xz$ ***Distributivgesetz***.

Hierbei ist natürlich $x + y := +(x, y),\ x \cdot y = \cdot(x, y)$.

Klammerkonvention: Multiplikation bindet stärker als Addition ($\cdot$ vor $+$).
Wird $x \cdot y = y \cdot x$ nicht verlangt, spricht man von Schiefkörpern; dann fordert man auch das 2. Distributivgesetz $(x+y) \cdot z = xz + yz$. Wegen (K1) verwenden wir die Schreibweise $x + y + z,\ x \cdot y \cdot z$ etc.

Definition. *Für* $x, y \in K \quad [y \neq 0]$ *setze* $x - y := x + (-y), \quad [x/y := x \cdot y^{-1}]$.

[Die rationalen Zahlen und die reellen Zahlen mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation erfüllen offenbar (K1)–(K5).]
Folgerungen aus den **Körperaxiomen** sind die üblichen Regeln der „Buchstabenalgebra". Einige Beispiele und ihre Ableitung:

1. Die 0 ist eindeutig bestimmt:
   ($0' \in K$ ist ebenfalls mit $x + 0' = x$; insbesondere $0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$.)

2. Das **Negative** $(-x) \in K$ von $x \in K$ ist eindeutig bestimmt:
   ($x' \in K$ mit $x + x' = 0$. Addition von $(-x)$ ergibt
   $(-x) = (-x) + 0 = (-x) + (x + x') = ((-x) + x) + x' = 0 + x' = x'$.)

3. Die Gleichung $a + x = b$ hat die eindeutig bestimmte Lösung $x = b - a$.
   (i) $a + (b - a) \overset{\text{(Def)}}{=} a + (b + (-a)) = a + (-a) + b = 0 + b = b$.
   ii) Eindeutigkeit: Sei $a + y = b$. Addition von $(-a)$ ergibt
   $y = 0 + y = ((-a) + a) + y = (-a) + (a + y) = (-a) + b = b - a$.)

4. Es ist $-(-x) = x$.
   (Definition von $-(-x) : (-x) + (-(-x)) = 0$. Andererseits ist $(-x) + x = 0$. Die Eindeutigkeit von $-(-x)$ impliziert die Behauptung.)

5. $x \cdot 0 = 0$.
   ($y + 0 = y \Rightarrow xy = x(y + 0) = xy + x \cdot 0$.
   Die Addition von $(-xy)$ ergibt $0 = xy + (-xy) = x \cdot 0$.)

Analog (Übung: $-(x + y) = -x - y$; $1, x^{-1}$ eindeutig bestimmt; x/y eindeutige Lösung von $yz = x$; $(x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0)$; $(-x)y = -(xy)$; $(-1)x = -x$; $(-x)(-y) = xy$; $(x^{-1})^{-1} = x$; $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$; „Bruchrechenregel" $a/b \cdot c/d = a \cdot c/b \cdot d$; $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$; $(x + y)(x + y) = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$ mit $2 := 1 + 1$.

1.11 Ordnungsaxiome

Man kann sich die reellen Zahlen als Punkte auf der **Zahlengeraden** vorstellen. Dort ist eine Ordnung gegeben: $x < y$, das bedeutet: x liegt links von y. Die Axiome der Ordnung sind:

Definition. *$K = (K, +, \cdot)$ sei Körper und $R \subset K \times K$ erfülle, wenn man $x < y :\Leftrightarrow (x, y) \in R$ setzt, die folgenden Axiome: $\forall_{x,y,z\in K}$*

$(O1)$	*Entweder gilt* $x = y$ *oder* $x < y$ *oder* $y < x$	***Trichotomie***
$(O2)$	*Aus* $x < y$ *und* $y < z$ *folgt* $x < z$	***Transitivität***
$(O3)$	*Aus* $x < y$ *folgt* $x + z < y + z$	***Monotonie der Addition***
$(O4)$	*Aus* $x < y$ *und* $z > 0$ *folgt* $xz < yz$	***Monotonie der Multiplikation***

*Dann heißt $(K, +, \cdot, <)$ **ein geordneter Körper**.*

(Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erfüllen offenbar diese Axiome.)
Wir schreiben $x \leq y$, falls ($x < y$ oder $x = y$) gilt; $x \underset{(-)}{>} y$ für $y \underset{(-)}{<} x$.
Gilt $x > 0$, so heißt x **positiv**; gilt $x < 0$, x **negativ**.
Gilt $x \geq 0$, so heißt x **nicht-negativ**; gilt $x \leq 0$, x **nicht-positiv**.

Folgerung (aus **Ordnungsaxiomen**). *(Rechenregeln für Ungleichungen).*

(a) *Aus* $x > 0$ *folgt* $-x < 0$ $(x < 0 \Rightarrow -x > 0)$*:*
$(0 < x \Rightarrow (-x) = (-x) + 0 \underset{(O3)}{<} (-x) + x = 0)$.

(b) *Aus* $x < y$ *und* $z < 0$ *folgt* $yz < xz$
$(x < y$ *und* $0 \overset{(a)}{<} (-z) \underset{(O4)}{\Rightarrow} x(-z) < y(-z), -xz < -yz$*. Addition von* $xz + yz)$.

(c) *Für* $x \neq 0$ *gilt* $x^2 := x \cdot x > 0$ *(also speziell* $1 > 0$*)*
$(x > 0 : (O4), \quad x < 0 : (-x) > 0, \quad (-x)(-x) = x \cdot x > 0)$.

(d) *Aus* $0 < x$ *folgt* $0 < 1/x$
$(x^{-1} = x(x^{-1})^2$*. Aber* $(x^{-1})^2 > 0)$.

Ferner: $x < y,\ u < v \ \Rightarrow x + u < y + v$; $x < y$ *und* $xy > 0 \Rightarrow x^{-1} > y^{-1}$;

$x < y,\ xy < 0 \Rightarrow x^{-1} < y^{-1}$; $ac < bc$ *und* $c > 0 \Rightarrow a < b$;

$a < b \Rightarrow a < \dfrac{a+b}{2} < b$; $0 < a < b,\ 0 < c < d \Rightarrow 0 < ac < bd$.

Definition. *K geordneter Körper, $x \in K$. **Betrag von** x, sowie **Vorzeichen von** x*

$$|x| := \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}, \quad \operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}.$$

Dann gilt: (a) $|x| \geq 0, \quad x = |x| \operatorname{sgn} x, \quad |x| = |-x|, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

(b) $|xy| = |x|\ |y|, \quad \operatorname{sgn}(x \cdot y) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y,$

(c) $|x + y| \leq |x| + |y|, \quad \big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x - y|.$

Beweis (c).

$$x+y \geq 0 \quad \Rightarrow |x+y| = x+y \leq |x|+|y|, \text{ da } x \leq |x|$$

$$x+y < 0 \quad \Rightarrow (-x)+(-y) > 0, \text{ also } |x+y| = |(-x)+(-y)| \leq |-x|+|-y| = |x|+|y|.$$

$\square$

Übung: $|x| \underset{(-)}{<} \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \underset{(-)}{<} x \underset{(-)}{<} \varepsilon$.

1.12 Die natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen

Geordnete Körper gibt es viele: etwa $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Zwecks Charakterisierung von $\mathbb{R}$ benötigt man noch das „Vollständigkeitsaxiom", dass $\mathbb{R}$ „keine Lücken" hat. Wir verschieben dieses schwierigste Axiom noch etwas.
Zunächst zeigen wir, wie man mittels der Körperaxiome die „natürlichen" Zahlen „einführen" kann. In geordneten Körpern:

$$2 := 1+1; \quad 3 := 2+1 = 1+1+1, \cdots, n := \underbrace{1+\cdots+1}_{n\text{-mal}}.$$

Präzise Definition über „induktive Mengen":

Definition. *Sei K ein geordneter Körper (etwa $\mathbb{R}$). $M \subset K$ heißt **induktive Menge** $:\Leftrightarrow$*
(a) $1 \in M$, (b) wenn $x \in M$ ist, so auch $x+1 \in M$.
(also $1+1$, $1+1+1$ etc. in M.)

Definition. *Der Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von K $(=\mathbb{R})$ heißt Menge der **natürlichen Zahlen** $\mathbb{N}$.*

Offenbar ist das *wieder* eine induktive Menge, und zwar die kleinste solche Menge.

Satz (Induktionsprinzip). *Sei $M \subset \mathbb{N}$ mit (a) $1 \in M$, (b) $(x \in M \Rightarrow x+1 \in M)$. Dann ist $M = \mathbb{N}$.*

Beweis. M ist eine induktive Menge, $\mathbb{N} = \bigcap\limits_{\substack{W \subset K = \mathbb{R} \\ \text{induktiv}}} W \Rightarrow \mathbb{N} \subset M$, also $\mathbb{N} = M$. $\square$

Das Induktionsprinzip ist die Grundlage der Beweismethode der **vollständigen Induktion**:

> Sei $A(n)$ eine Aussage über natürliche Zahlen. Kann man zeigen:
> (1) **Induktionsanfang:** $A(1)$ ist wahr **und**
> (2) **Induktionsschritt:** $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gilt
> (aus der Annahme, $A(n)$ sei wahr, folgt: $A(n+1)$ ist wahr;
> $A(n)$ heißt dabei **Induktionsvoraussetzung** (IV)) ,
>
> so ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig.

Beweis. $M := \{n \in \mathbb{N} |\ A(n) \text{ ist richtig}\} \subset \mathbb{N}$ ist eine induktive Menge. $\square$

Bemerkung. (1) Mit $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ kann man auch mit $A(0)$ anfangen.

(2) $n > 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ induktiv zu zeigen.

Definition. $\mathbb{Z} := \{x \in K = \mathbb{R} | \ x \in \mathbb{N} \ oder \ -x \in \mathbb{N} \ oder \ x = 0\}$ ***ganze Zahlen***,
$\mathbb{Q} := \{x \in K = \mathbb{R} | \ x = p/q \ mit \ p, q \in \mathbb{Z} \ und \ q \neq 0\}$ ***rationale Zahlen***.

Wir identifizieren dabei $p_1/q_1 = p_2/q_2$, wenn $p_1 q_2 = p_2 q_1$ („**Kürzen**").
Man zeigt dann: $\mathbb{Q}$ ist Körper (mit Addition, Multiplikation induziert von $\mathbb{R} = K$); die Anordnung von $\mathbb{R}$ macht $\mathbb{Q}$ zu einem geordneten (Unter-) Körper von $\mathbb{R}$.
Von jetzt an Rechnen in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ wie von der „Buchstabenalgebra" aus der Schule bekannt.

1.13 Beweise durch vollständige Induktion

Einige Beispiele für das Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

Satz. $\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Beweis. „$A(n)$": $1 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
Induktionsanfang: $A(1)$ richtig, da $1 = \dfrac{1 \cdot 2}{2}$
Induktionsschritt: $1 + \cdots + (n+1) \underset{(IV)}{=} \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$, also gilt $A(n+1)$. □

Bemerkung. Der Induktionsschritt würde auch für die falsche Aussage

$$1 + \cdots + n = \frac{(n+1/2)^2}{2}$$

funktionieren; der Induktionsanfang ist aber **falsch**.

Satz. ***(Bernoulli-Ungleichung)****. Für $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$, wobei $a^n, a := 1 + x$ induktiv definiert ist.*

Beweis. $n = 1$ Gleichheit.
Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^n}_{\geq 0}\underbrace{(1+x)}_{>0} &\underset{(IV)}{\geq} (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n+1)x \quad (x^2 \geq 0)\end{aligned}$$

□

Analog: Beweis von Aussagen der Form
„Für festes $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt $A(n)$".
Dann Induktionsanfang bei n_0 ($A(n_0)$ gilt): Anwendung des Prinzips auf
$B(n) = A(n + n_0 - 1)$.

Satz. *Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt $3n < 3^n$.*

Beweis. $n = 2 : 6 < 9$. Induktionsschritt:

$$3(n+1) = 3n + 3 \underset{(IV)}{<} 3^n + 3 < 3^n + 3^n + 3^n = 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}.$$

□

Übung: $\sum_{j=1}^{n} j^2 = n(n+1)(2n+1)/6, \quad \sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2.$

Verschärfung des Prinzips der vollständigen Induktion:
Gilt $A(1)$ und $A(1) \wedge \cdots \wedge A(n) \Rightarrow A(n+1)$, folgt: $\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad A(n)$ gilt.

Beweis. Induktionsprinzip auf $B(n) = A(1) \wedge \cdots \wedge A(n)$ anwenden. □

Induktive Definition oder Konstruktion.

> *Sei X eine Menge, $Y := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n, \quad g : Y \to X$. Dann gibt es zu gegebenem $x_1 \in X$ genau eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to X$ mit*
> *$f(1) = x_1$ **und** $\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad f(n+1) = g((f(1), \cdots, f(n)))$ „**Rekursionsformel**".*

Bemerkung. In Beispielen ist g oft nur von der letzten Komponente $f(n)$ abhängig.

Beispiele. (1) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(1) := 1$, $f(n+1) := 2^{f(n)}$ $[g(f(1), \cdots, f(n)) = 2^{f(n)}]$.
$\Rightarrow f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 4$, $f(4) = 16$, $f(5) = 2^{16} = 65.536$, $f(6)$ hat 19.729 Stellen!

(2) **Fibonacci-Folge** $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(1) := f(2) := 1$, $f(n+1) := f(n) + f(n-1)$.

[mit $g(n) = 1, g(f(1), \cdots, f(n)) = f(n-1) + f(n),\ n > 1$]: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots$ (neugeborene Kaninchenpaare bringen nach dem ersten Monat jeden Monat ein neues Paar zur Welt, $f(n) =$ Kaninchenpaar-Zahl, die zu Beginn des n-ten Monats vorhanden ist).

1.14 Das Vollständigkeitsaxiom

Um $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheiden zu können, müssen wir noch formalisieren, dass $\mathbb{R}$ „keine Löcher hat".

Definition. *Sei K ein geordneter Körper und $M \subset K$. M ist **nach oben beschränkt** $:\Leftrightarrow \exists_{c\in K} \quad \forall_{m\in M} \quad m \le c$ (Schreibweise $M \le c$). Analog **nach unten beschränkt**.*
*Es kann $c \in M$ oder $c \notin M$ sein. Gilt $c \in M$ und $M \le c$, heißt c **Maximum** von M, $c =: \max M$ (analog $c =: \min M$ **Minimum** von M).*

Definition. *Für $M_1, M_2 \subset K$ sei $M_1 \le M_2 :\Leftrightarrow \forall_{m_1\in M_1,\ m_2\in M_2} : \ m_1 \le m_2$.*

Definition. *Sei K ein geordneter Körper und $\emptyset \ne M \subset K$ nach oben beschränkt. Dann heißt $c \in K$ **Supremum von** M oder **kleinste obere Schranke von** M, $\sup M$, wenn*

1. *$M \leq c$ (c ist obere Schranke),*

2. *Falls $d \in K$ mit $M \leq d$, folgt $c \leq d$ (c ist kleinste obere Schranke).*

*Entsprechend ist das **Infimum von** M, $\inf M$, die **größte untere Schranke von** M: $c \leq M$ und ($d \leq M \Rightarrow d \leq c$). Falls $c \in M$, gilt $\max M = \sup M$ ($\inf M = \min M$).*

Vollständigkeitsaxiom. *(V) Ein geordneter Körper ist vollständig, wenn jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt.*

Theorem. *Bis auf Ordnungsisomorphie gibt es genau einen vollständigen, geordneten Körper, nämlich den der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.[1] (Landau, Grundlagen der Analysis).*
D.h., falls $(R_1, +, \cdot, \leq)$ und $(R_2, +, \cdot, \leq)$ vollständig geordnete Körper sind,

$$\exists_{f: R_1 \to R_2 \text{ bijektiv}}: \quad \forall_{x,y \in R_1} \left\{ \begin{array}{l} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \\ x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y) \end{array} \right\} .$$

Die Existenz eines vollständigen, geordneten Körpers wird durch eine mühsame Konstruktion bewiesen, ausgehend von $\mathbb{N}$ über $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ durch „Vervollständigung".
Wir zeigen unter Benutzung der Axiome jetzt (noch einmal), dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ist:

Satz. *$\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.*

Beweis. Sei $M := \{x \in \mathbb{Q} | \ x \geq 0, \ x^2 < 2\}$. Dann ist $M < 3/2$ (da $9/4 > 2$).
Wäre $\mathbb{Q}$ vollständig, existierte $s_0 := \sup M \in \mathbb{Q}$. Es gilt $1 < s_0 < 3/2$, da $1^2 = 1 < 2$ und $M < 3/2$. **Behauptung:** $s_0^2 = 2$.

(i) $s_0^2 < 2$ ist falsch: sonst sei $h := \frac{2 - s_0^2}{2s_0 + 1}$. Dann ist $0 < h < 1$, da wegen $s_0 > 1$ gilt, dass $s_0^2 + 2s_0 > 1$. Also:

$$2 - s_0^2 = 2hs_0 + h \underset{h<1}{>} 2hs_0 + h^2,$$

d.h. $(s_0 + h)^2 < 2$. Somit wäre $s_0 + h \in M$, $s_0 < s_0 + h$, d.h. $M \not\leq s_0$. $\lightning$

(ii) $s_0^2 > 2$ ist falsch: sonst sei $s := s_0 \ \frac{s_0^2 - 2}{2s_0} < s_0$, denn $s_0^2 - 2s_0 - 2 < 0$ wegen $1 < s_0 < 3/2$. Es folgt

$$s^2 = s_0^2 - 2s_0 \frac{s_0^2 - 2}{2s_0} + \left(\frac{s_0^2 - 2}{2s_0} \right)^2 > s_0^2 - (s_0^2 - 2) = 2.$$

Also gilt für alle $x \in M : x^2 < 2 < s^2$, d.h. $M \leq s : s$ ist obere Schranke von M, und s_0 ist nicht die kleinste obere Schranke. $\lightning$

Aus (i), (ii) folgt zwingend $s_0^2 = 2$. Wäre $s_0 \in \mathbb{Q}$, $s_0 = m/n$ mit m, n teilerfremd in $\mathbb{N}$, $m^2 = 2n^2 \Rightarrow m$ gerade (m ungerade $\Rightarrow m^2$ ungerade), $m = 2\ell$ mit $\ell \in \mathbb{N}$, $m^2 = 4\ell^2 = 2n^2$, $n^2 = 2\ell^2 \Rightarrow n$ gerade $\Rightarrow 2|m, 2|n$. $\lightning$ $\square$

[1] ohne Beweis, wäre eigene Vorlesung

Äquivalent zum Vollständigkeitsaxiom (V) ist
(V') Jede nicht-leere, nach unten beschränkte Menge reeller Zahlen hat ein Infimum, denn:

$$\inf M = -\sup M', \quad M' = \{x|(-x) \in M\}.$$

Definition. ***Intervalle.*** *Seinen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Setze*
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R}|\ a < x < b\}$ ***offenes*** *Intervall,*

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R}|\ a \leq x \leq b\}$ ***abgeschlossenes*** *Intervall,*

$[a, b) := \{x \in \mathbb{R}|\ a \leq x < b\}$, $(a, b] := \{x \in \mathbb{R}|\ a < x \leq b\}$ ***halboffene*** *Intervalle,*

$b - a =:$ ***Länge*** *des Intervalles.*

Unterschied Maximum – Supremum:
$\sup\,(a, b) = b$, $\max\,(a, b)$ existiert nicht, da $b \notin (a, b)$,

$\sup\,[a, b] = b$, $\max\,[a, b] = b$, da $b \in [a, b]$.

Das Maximum *muss* zur Menge gehören, das Supremum *kann* zur Menge gehören, muss es aber nicht.

Satz 1. *Sei K ein geordneter Körper. Dann ist (V) äquivalent zu*
(D) $\forall_{\emptyset \neq A, B \subseteq K}, \quad A \leq B \quad \exists_{c \in K} \quad A \leq c \leq B.$

[(A, B) heißt **Dedekindscher Schnitt**, c die **Schnittzahl** von (A, B).]

Beweis. (V)$\Rightarrow$(D): Seien $\emptyset \neq A, B \subseteq K$ mit $A \leq B$. Dann A nach oben beschränkt und $A \leq \sup A \leq B$ ($\sup A =: c \leq B$, da $\forall_{c' \in B \subseteq K}\ A \leq c'$, also $c \leq c'$).
(D)$\Rightarrow$(V): $B := \{c' \in K|\ A \leq c'\} \neq \emptyset$ nach Voraussetzung. Das c aus (D) mit $A \leq c \leq B$ ist $c = \sup A$. □

Satz 2. *Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$, $M \leq c$. Dann gilt:* $(c = \sup M \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0}\ \exists_{x \in M} \quad c - \varepsilon < x \leq c)$.

Beweis. „$\Rightarrow$:" $\varepsilon > 0 \Rightarrow c - \varepsilon$ ist **keine** obere Schranke, d.h. $\exists_{x \in M}\ c - \varepsilon < x$.
„$\Leftarrow$:" Angenommen, $c \neq \sup M$, also $c > \sup M$. Sei $\varepsilon := c - \sup M$ (> 0). Dann ist $c - \varepsilon = \sup M$ obere Schranke von M, also $\forall_{x \in M}\ c - \varepsilon \geq x$. Das ist die Negation der rechten Seite. □

Satz 3. ***(Archimedes).*** *Für alle $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < x < n$.*

Beweis. $A = \{1/n|\ n \in \mathbb{N}\}$ hat $\inf A \geq 0$, da $1/n > 0$. Wäre $\inf A = c > 0$, so $2c > c$. Mit $c = \varepsilon > 0$ in Satz 2 gäbe es $x = 1/n \in A$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $2c > x = 1/n$, $c > 1/2n$. Widerspruch zur Definition von $c = \inf A$. □

Satz 4. $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \inf M \in M$ *(**Wohlordnung von** $\mathbb{N}$: $\inf$ als $\min$ angenommen).*

Beweis. Wäre $\inf M \notin M$, so $1 \notin M$ (anderenfalls $1 = \inf M \in M$). $\Rightarrow \forall_{m\in M}\ 1 < m$.
$\Rightarrow 1 \in K := \{k \in \mathbb{N} |\ \forall_{m\in M}\ k < m\}$. Für $k \in K$ ist auch $k + 1 \in K$: Wäre dies falsch, gäbe es $m_1 \in M$ mit $k < m_1 \leq k + 1$. Da $\inf M \notin M$, gibt es $m_2 \in M$ mit $m_2 < m_1$. Also $m_2 \leq k$ [2]. Widerspruch zu $k \in K$. Induktionsprinzip $\Rightarrow K = \mathbb{N}$.
Sei $m \in M$ beliebig. Da $m \in M \subseteq \mathbb{N} = K$, gilt $m < m$. ↯ □

Satz 5. $\forall_{x\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0}\quad \exists_{r\in\mathbb{Q}}\quad x - \varepsilon < r < x + \varepsilon$ *($\mathbb{Q}$ liegt* ***dicht*** *in $\mathbb{R}$).*
(„Zwischen je zwei reellen Zahlen liegt eine rationale Zahl, sogar unendlich viele".)

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $1/m < \varepsilon$. Ebenso: Zu $x > 0$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n > mx$ (Satz 3), und die Menge $\{n \in \mathbb{N} |\ n > mx\}$ besitzt ein kleinstes Element $k \in \mathbb{N}$ (Satz 4). Also ist $k - 1 \leq mx < k$. Setze $r := k/m$, d.h. $r - 1/m \leq x < r$,

$$x - \varepsilon < x - 1/m < r < x + 1/m < x + \varepsilon.$$

Implizit wurde gezeigt: $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \exists^1_{n\in\mathbb{Z}}\ n \leq x < n+1$. Setze $[x] := n$, **größte ganze Zahl** $\leq x$. □

Satz 6. *Seien $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Dann gilt:*

(i) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, $\quad(\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$, *wenn* $A, B \subseteq \mathbb{R}_+)$,

(ii) $\sup(A) = -\inf(-A)$,

(iii) $\sup(rA) = r \sup(A)$, *falls* $r > 0$; $\sup(rA) = r \inf(A)$, *falls* $r < 0$,

(iv) $f, g : M \to \mathbb{R}$ *mit* $f(M), g(M) \leq c \Rightarrow \sup(f + g)(M) \leq \sup f(M) + \sup g(M)$.

1.15 Summen, Produkte, Binomischer Lehrsatz

Es folgen einige Konsequenzen aus den Körperaxiomen.
Mit Induktion ergibt sich aus den Assoziativ- und Kommutativgesetzen, dass

$$x_1 + \cdots + x_n, \quad x_1 \cdot \ \cdots\ \cdot x_n \quad \text{für } \ x_1, \cdots, x_n \in K \ \ \text{(Körper)}$$

von der Klammerung und der Reihenfolge unabhängig sind. Setze

$$\sum_{i=1}^{n} x_i := x_1 + \cdots + x_n \ (\textbf{Summe}), \quad \prod_{i=1}^{n} x_i := x_1 \cdot \ \cdots\ \cdot x_n \ (\textbf{Produkt})$$

Speziell $x^n := \prod_{i=1}^{n} x, \quad n! := \prod_{i=1}^{n} i$ (n-Fakultät), $\quad 0! := 1$.
Für $x \in K, x \neq 0$ setze $x^{-n} := (x^{-1})^n,\ n \in \mathbb{N}$. Ferner $x^0 := 1$. $\to (x^m)_{m\in\mathbb{Z}}$ definiert.

[2] aus Axiomen zu zeigen!

Satz 1. *Sei K ein Körper und $x \in K$. Seien $m,n \in \mathbb{N}$ bzw. $m,n \in \mathbb{Z}$, falls $x \neq 0$. Dann gilt:*

$$x^n x^m = x^{n+m}; \quad (x^n)^m = x^{nm}; \quad \sum_{i=0}^{n} x^i = (1-x^{n+1})/(1-x),\ x \neq 1.$$

Beweis. Übung, Induktion.

Binomialkoeffizienten. $\binom{n}{k} := \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ für $k,n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \le k \le n$. Dann gilt:

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \in \mathbb{N}, \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ (**Pascal-Dreieck**).

$$\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k+1)!}\,(k+(n-k+1)) = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.\right]$$

Satz 2 (**Binomischer Lehrsatz**)**.** *Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $x,y \in K$. Dann gilt:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Beweis. durch Induktion über $n : n = 1$ klar.

$$\begin{aligned} n \Rightarrow n+1: \quad (x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \overset{\text{Ind.}}{\underset{\text{Vor.}}{=}} (x+y)\left(\textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right) \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k}}_{=I} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}}_{=II}. \end{aligned}$$

Substitutiere $\ell = k+1$ in I : $I = \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} x^\ell y^{n+1-\ell}$, also $(\ell \to k)$

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right\} x^k y^{n+1-k} + x^{n+1} + y^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}. \end{aligned}$$

$\square$

Satz 3. *Sei $0 \le k \le n$. Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist $\binom{n}{k}$, die Zahl aller Teilmengen ist 2^n. Also $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.*

Beweis. Induktion über n: $n = 1$ ist klar.
$n \Rightarrow (n+1)$: O.B.d.A. sei $1 \le k \le n$. Die k-elementigen Teilmengen von $\{x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$ zerfallen in

– die, K_0, die x_{n+1} **nicht** enthalten,
– die, K_1, die x_{n+1} enthalten.

Die Zahl der Mengen in K_0 ist nach Induktionsvoraussetzung $\binom{n}{k}$. Da alle Mengen aus K_1 das Element x_{n+1} enthalten, enthalten sie genau $(k-1)$ Elemente von $\{x_1, \cdots, x_n\}$; die Zahl der Mengen in K_1 ist also nach Induktionsvoraussetzung also $\binom{n}{k-1}$ (Verschärfung des Induktionsprinzips!). Aber $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.
Analog für die Zahl aller Teilmengen von $\{x_1, \cdots, x_n\} : 2^n + 2^n = 2^{n+1}$. □

Beispiel. $\exists \begin{pmatrix} 49 \\ 6 \end{pmatrix} = 13.983.816$ 6-elementige Teilmengen einer Menge von 49 Kugeln.
Die Chance, beim Lotto „6 aus 49" richtig zu haben, ist $1 : \begin{pmatrix} 49 \\ 6 \end{pmatrix}$.

1.16 Existenz von Wurzeln

Satz. *Seien $a \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert genau eine Zahl $x \in \mathbb{R}^+$ mit $x^n = a$.*
Bezeichnung: *$x =: \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ **n-te Wurzel aus** a.*

Beweis. Für $x > 0$ gilt : $x < y \Leftrightarrow x^n < y^n$. Daraus folgt die Eindeutigkeit der n-ten Wurzel. Zur **Existenz**:
$M := \{y \in \mathbb{R} | \; y \geq 0, \; y^n < a\} \neq \emptyset$, da $0 \in M$. M ist nach oben beschränkt, da $y \in M \Rightarrow y^n < a < 1 + na \underset{\text{Bernoulli}}{\leq} (1+a)^n, \quad y < 1 + a$.
Also existiert $\xi = \sup M \in \mathbb{R}$. **Indirekte** Annahme: $\xi^n \neq a$. **2 Fälle:**

(i) $\xi^n < a$. Sei $\alpha := \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \xi^{n-1} + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$. Es gibt $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\dfrac{1}{\ell} < \underbrace{\dfrac{a - \xi^n}{\alpha}}_{>0}$.

$$\begin{aligned} (\xi + \frac{1}{\ell})^n &= \xi^n + \frac{1}{\ell} \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \xi^{n-1} + \cdots + \frac{1}{\ell^n} \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \\ &\leq \xi^n + \frac{1}{\ell} \; \alpha < a. \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zur Definition von ξ .

(ii) $\xi^n > a$. Sei $\alpha := n\xi^n / [\xi(\xi^n - a)]$. Wähle $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell > \max \left(\dfrac{1}{\xi}, \alpha \right)$. Dann folgt

$$(\xi - \frac{1}{\ell})^n = \xi^n (1 - \frac{1}{\ell \xi})^n \underset{\text{Bernoulli}}{>} \xi^n (1 - \frac{n}{\ell \xi}) > a,$$

unter Benutzung von $\ell > \alpha$ und $\ell > 1/\xi$. Da $\xi = \sup M$ ist, existiert ein $y_0 \in M$, so dass $y_0 > \xi - 1/\ell, \quad y_0^n > (\xi - 1/\ell)^n > a, \quad y_0 \neq M$. ↯

Also ist nur $\xi^n = a$ möglich, $\xi = \sqrt[n]{a}$. □

Definition. $a > 0$, $p = m/n \in \mathbb{Q}$, $a^p := (a^{1/n})^m$ [*ist eindeutig definiert*].

Daraus folgt:
$$\begin{cases} \textit{Für } a, b > 0;\ p, q \in \mathbb{Q} \textit{ ist } a^p a^q = a^{p+q},\ (ab)^p = a^p b^p,\ a^p/b^p = (a/b)^p. \\ \textit{Für } 0 < a < b \textit{ folgt: } a^r < b^r\ (r > 0),\ a^r > b^r\ (r < 0). \\ \textit{Für } a > 0,\ r < s \textit{ gilt: } (a^r < a^s \Leftrightarrow a > 1),\ (a^r > a^s \Leftrightarrow a < 1). \end{cases}$$

Ungleichung vom arithmetisch-geometrischen Mittel:
Seien $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt:

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n).$$

Beweis. Wir zeigen die folgende Aussage $A(n)$ durch Induktion über n.
$A(n) : \forall_{x_1,\cdots,x_n} (\ (x_1 + \cdots + x_n = n)\ \wedge\ (\exists_k\ x_k \neq 1) \Rightarrow (x_1 \cdots x_n < 1)\ ).$

$n = 1$: dieser Fall tritt nicht auf, $n = 2 : x_1 = 1 - \varepsilon,\ x_2 = 1 + \varepsilon,\ x_1 x_2 = 1 - \varepsilon^2 < 1$.
$n \to (n+1)$**:** Sei $x_1 + \cdots + x_{n+1} = n + 1$. Sei etwa $x_1 < 1$ und $x_2 > 1$, $x_1 = 1 - \alpha$, $x_2 = 1 + \beta$, mit $\alpha, \beta > 0$. Für $x_2' := x_1 + x_2 - 1 = 1 - \alpha + \beta$ gilt $x_2' + x_3 + \cdots + x_n = n$, also nach Voraussetzung $x_2' x_3 \cdots x_n \leq 1$. Wegen $x_1 x_2 = 1 - \alpha + \beta - \alpha\beta < x_2'$ ist also

$$x_1 x_2 \cdots x_n < x_2' \cdots x_n \leq 1.$$

$\square$

Anwendung. Seien $a \neq 1,\ n \geq 2,\ 1 \leq p < n$. Dann ist $\sqrt[n]{a^p} < 1 + \frac{p}{n}(a-1)$.

$$\left(\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^p \cdot 1 \cdots 1} < \frac{pa + (n-p)}{n} = 1 + \frac{p}{n}(a-1). \right)$$

1.17 Abzählbare Mengen

Definition. *Sei M eine Menge.*

*i) M ist endlich $:\Leftrightarrow \exists_{n \in \mathbb{N}_0}, \varphi : \{1, \cdots, n\} \to M$ **Bijektion (Abzählung)**.*
*Daraus folgt: n ist eindeutig bestimmt, $n = |M|$ **Kardinalität** von M*

*ii) M ist abzählbar $:\Leftrightarrow \exists_{\varphi : \mathbb{N} \to M}$ Bijektion, $\aleph_0 = |M|$ **Kardinalität** von M.*

iii) M ist höchstens abzählbar $:\Leftrightarrow$ M ist endlich oder abzählbar.

Bemerkung. $M \subset \mathbb{N} \Rightarrow M$ höchstens abzählbar (hier ohne Beweis).

Beispiel. $\{0, 2, 4, 6, \cdots\}$, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ sind abzählbar, $\varphi : \underset{k \mapsto \frac{1}{4}((-1)^{k+1}(2k-1)-1) = n}{\mathbb{N} \to \mathbb{Z}}$ ist bijektiv.[3]

[3] $\begin{bmatrix} k \text{ ungerade } = 2n+1 \\ k \text{ gerade } = 2(-n) \end{bmatrix}$

Satz 1. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *ist abzählbar.*

Beweis. Das Durchlaufen der Schrägreihen in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ generiert über die Formel

$$\varphi(k, \ell) = \frac{1}{2}(k + \ell - 2)(k + \ell - 1) + k.$$

eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. (Das Durchlaufen der ersten $(k + \ell - 2)$ Diagonalen verbraucht $(k+\ell-2)(k+\ell-1)/2$ Elemente, da die j-te Diagonale j Elemente hat; (k, ℓ) ist k-tes Element auf der $(k + \ell - 1)$-ten Diagonale). $\square$

Korollar. $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar.*

Beweis. $\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha = p/q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ **minimal**. Mit einer Bijektion $\psi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ erhält man eine injektive Abbildung $\psi \circ \varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$,
$\mathbb{Q} \overset{\varphi}{\to} \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \overset{\psi}{\to} \mathbb{N}$, also „$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{N}$”. Mit der Bemerkung folgt, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist.
$p/q \mapsto (p, q)$

$\square$

Bemerkung. Eine abzählbare Vereinigung abzählbar unendlicher Mengen ist abzählbar.

Gibt es nicht-abzählbare Mengen? JA

Satz 2. $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

Beweis. „Cantorsches Diagonalverfahren”. Wir verwenden dabei (im Vorgriff auf den späteren Beweis) die Bijektion $\varphi : \mathbb{R} \to$ unendliche Dezimalziffernfolge $= \tilde{\mathbb{R}}$,
$x \mapsto x = a_n \cdots a_1, b_1 b_2 \cdots, \quad a_i, b_i \in \{0, \cdots, 9\}$
Angenommen, $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sei eine Bijektion. Schreibe

$$\begin{aligned} \psi(1) &= a_{1m_1} \cdots a_{11}, b_{11} b_{12} \cdots b_{1l} \cdots \\ &\cdots \\ \psi(n) &= a_{nm_n} \cdots a_{n1}, b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nl} \cdots \end{aligned}$$

Bilde $\gamma = \quad 0, c_1 c_2 \cdots c_l \cdots$ mit $c_l := \begin{cases} 1 & b_{ll} = 0, \\ 0 & b_{ll} \neq 0. \end{cases}$

Dann ist die n-te Stelle von $\psi(n)$ hinter dem Komma von der von γ verschieden: γ kommt nicht in der Abzählung vor und ψ ist **nicht** surjektiv. $\square$

Satz 3. *Sei $\emptyset \neq A$. Dann gibt es **keine** Bijektion $\varphi : A \to \mathcal{P}(A)$.*

Beweis. Ist A endlich, gilt $|A| = n < |\mathcal{P}(A)| = 2^n$.
Ist A unendlich, gibt es eine Injektion $\varphi : A \to \mathcal{P}(A),\ a \mapsto \{a\}$.
Modifikation des Diagonalverfahrens: Sei $\varphi : A \to \mathcal{P}(A),\ x \mapsto U_x$ beliebig.
Bilde $Y := \{x \in A | \ x \notin U_x\}$. Dann ist φ nicht surjektiv, denn $Y \notin \varphi(A)$:
Es gibt nämlich kein $y \in A$ mit $U_y = Y$. Sonst frage man: ist $y \in Y$?
Wenn ja, $\quad y \notin U_y = Y, \quad$ Widerspruch.
Wenn nein, $\quad \neg(y \notin U_y)$, d.h. $y \in U_y = Y, \quad$ Widerspruch. $\square$

1.18 Komplexe Zahlen

Die Gleichung $x^2 = -1$ ist für $x \in \mathbb{R}$ nicht lösbar, da dann $x^2 \geq 0$ ist. Um algebraische Gleichungen $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ lösen zu können, muss man (zumindest) Wurzeln aus negativen Zahlen ziehen können. Den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen muss man durch $i = \sqrt{-1}$ erweitern. Der so entstehende Bereich der **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$ soll wieder ein Körper werden, um „vernünftig" rechnen zu können. Es zeigt sich, dass sich viele Rechnungen der Analysis und der Geometrie eleganter in $\mathbb{C}$ fassen lassen, etwa die Additionstheoreme des cos und des sin (im Reellen) als „Realteil" eines komplexen Additionstheorems für die exp-Funktion. Geometrische Deutung der komplexen Zahlen in der „Gaußschen Zahlenebene" $\mathbb{R} + i\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$.
Seien $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ll} \textbf{Addition im } \mathbb{R}^2: & (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1, y_2) \\ \textbf{Multiplikation im } \mathbb{R}^2: & (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{array}$$

Sei $1 := (1, 0)$ und $i := (0, 1)$. Dann ist $i^2 = -1$ und $z = (x, y)$ lässt sich schreiben als $z = x(0,1) + y(0,1) = x + iy$. Man verifiziert für $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$ durch Nachrechnen, dass

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3, \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \quad z_1 \cdot 1 = 1 \cdot z_1 = z_1,$$

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3, \quad z_1 \cdot z = z_2 \text{ hat für } z_1 \neq 0 \text{ genau eine Lösung } z.$$

Dann ist $(\mathbb{R}^2, +, \cdot) =: \mathbb{C}$ ein Körper: der Körper der **komplexen Zahlen**,

$$\mathbb{C} := (\{z = x + iy | \ x, y \in \mathbb{R}\}, +, \cdot).$$

$\mathbb{R}$ wird durch die Einbettung $\underset{x \mapsto (x,0)}{\mathbb{R} \to \mathbb{C}}$ als Unterkörper in $\mathbb{C}$ eingebettet.

Man hat $(x_1, 0) \underset{\mathbb{C}}{\cdot} (x_2, 0) = (x_1 \underset{\mathbb{R}}{\cdot} x_2, 0) \equiv x_1 \underset{\mathbb{R}}{\cdot} x_2$.

In Termen von $1, i$ gilt

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

(formales Ausmultiplizieren unter Benutzung von $i^2 = -1$)

Definition. *Ist $z = x + iy \in \mathbb{C}$, heißt $x =: \mathrm{Re}(z)$ der **Realteil** von z und $y =: \mathrm{Im}(z)$ der **Imaginärteil** von z. Punkte $(0, y) = iy$ mit $y \in \mathbb{R}$ heißen **rein imaginär**.*

Darstellung von $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$ durch die Gaußsche Zahlenebene, mit Addition=Vektoraddition.

Die Folgerungen aus den Körperaxiomen gelten, etwa die Binomische Formel

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z_1^j \, z_2^{n-j}; \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

$\bar{z} := x - iy$ ist die **komplexe konjugierte Zahl** von $z = x + iy \in \mathbb{C}$;
$z \mapsto \bar{z}$ ist die Spiegelung an der reellen Achse. Es gilt

$$(z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}), \quad \text{Re } z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \text{Im } z = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad \bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}.$$

Definition. *Der **Betrag** von $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist gegeben durch $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$.
(Länge des Vektors z in der Gaußschen Zahlenebene.)*

Es gilt $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$, $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. *Also* $|\bar{z}| = |z|$, $\quad |\text{Re } z| \leq |z|$, $\quad |\text{Im } z| \leq |z|$.

Satz. $\forall_{z_1, z_2, z \in \mathbb{C}}$

(1) $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(2) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ***Dreiecksungleichung***.

Also: Der Betrag in $\mathbb{C}$ hat die gleichen fundamentalen Eigenschaften wie der Betrag in $\mathbb{R}$.

Beweis. (2) $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)} = z_1 \overline{z_1}\, z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2 \quad (\sqrt{\cdot}$ in $\mathbb{R}^+$ ziehen).

(3) Re $(z_1 \overline{z_2}) \underset{\text{in } \mathbb{R}}{\leq} |z_1 \overline{z_2}| = |z_1||\overline{z_2}| = |z_1||z_2| \Rightarrow$

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\text{Re } (z_1\overline{z_2}) \underset{\text{in } \mathbb{R}}{\leq} |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 : \quad \sqrt{\cdot} \text{ in } \mathbb{R}^+ \text{ ziehen.} \end{aligned}$$

□

Die geometrische Deutung der Multiplikation behandeln wir später.

Beispiel. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Dann ist $U_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} |\ |z - z_0| < r\}$ der (offene) Kreis vom Radius r um z_0 und $V_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} |\ |z - z_0| \leq r\}$ der (abgeschlossene) Kreis vom Radius r um z_0.