Musterlösung der Klausur

Analysis I WS 2012/13

Aufgabe **(C 1).**

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *sei durch*

$$x_n := \frac{(1+2n)(3+4n^2)^3}{(1+n)^7} \cdot \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^j$$

gegeben. Man untersuche mittels der Rechenregeln für Konvergenz, ob $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert und berechne ggf. den Grenzwert.*

Behauptung: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen* 384.

Beweis Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{(1+2n)(3+4n^2)^3}{(1+n)^7} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^j \\ &= \frac{n\left(\frac{1}{n}+2\right)\left(n^2\left(\frac{3}{n^2}+4\right)\right)^3}{n^7\left(\frac{1}{n}+1\right)} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^j \\ &= \frac{\left(\frac{1}{n}+2\right)\left(\frac{3}{n^2}+4\right)^3}{\frac{1}{n}+1} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^j. \end{aligned}$$

Nun gilt nach Grenzwertsätzen für $n \to \infty$:

$\frac{1}{n} + 1 \to 1 \neq 0$,

$\frac{1}{n} + 2 \to 2$,

$\frac{3}{n^2} + 4 \to 4$, also nach Grenzwertsätzen $\left(\frac{3}{n^2}+4\right)^3 \to 4^3 = 64$,

und $\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^j \to \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$, da $\frac{2}{3} < 1$ (geometrische Reihe).

Nun folgt mit den Grenzwertsätzen: $x_n \to \frac{2\cdot 64}{1} \cdot 3 = 384$ für $n \to \infty$. $\square$

Aufgabe (**C 2**).

Man beweise, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ *gilt:* $\quad 2^{n-2} \leq \sqrt{n!}$.

Behauptung: *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt:* $\quad 2^{n-2} \leq \sqrt{n!}$.

Beweis Für $n = 1$ gilt: $2^{n-2} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \leq 1 = \sqrt{n!}$.

Für $n = 2$ gilt: $2^{n-2} = 2^0 = 1 < \sqrt{2} = \sqrt{n!}$.

Wir zeigen die Behauptung für $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ per vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Für $n = 3$ gilt: $2^{n-2} = 2^1 = \sqrt{4} < \sqrt{6} = \sqrt{n!}$ (Wurzelfunktion ist monoton).

Induktionsschluss: Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ gelte: $2^{n-2} \leq \sqrt{n!}$ (Induktionsvoraussetzung).

Dann folgt:

$$2^{(n+1)-2} = 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-2} \overset{I.V.}{\leq} 2 \cdot \sqrt{n!} = \sqrt{4n!} \leq \sqrt{(n+1)n!} = \sqrt{(n+1)!},$$

da $4 \leq n+1$ und die Wurzelfunktion monoton wächst. $\square$

Aufgabe (**C 3**).

Seien $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad g : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ *durch*

$$f(x) := x^{2x^2}, \quad g(x) := \sin(\pi\sqrt{x+1}),$$

gegeben. Man begründe, warum f *und* g *differenzierbar sind, berechne* f' *und* g' *und speziell* $f'(1)$, $g'(0)$.

Behauptung: f *ist differenzierbar mit Ableitung* $f' : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2xe^{2x^2 \log x}(2 \log x + 1)$, $f'(1) = 2$, g *ist differenzierbar mit Ableitung* $g' : (-1, \infty)$, $x \mapsto \cos(\pi\sqrt{x+1}) \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{x+1}}$, $g'(0) = -\frac{\pi}{2}$.

Beweis Für $x \in (0, \infty)$ gilt: $f(x) = x^{2x^2} = e^{2x^2 \log x}$.

Definiere $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x^2$. Da h, exp auf $\mathbb{R}$ und log auf $(0, \infty)$ differenzierbar sind, ist f als Hintereinanderausführung und Produkt differenzierbarer Funktionen differenzierbar nach Ketten- und Produktregel und es gilt für $x \in (0, \infty)$:

$$f'(x) = e^{2x^2 \log x} \cdot (4x \log x + \frac{2x^2}{x}) = 2x \cdot e^{2x^2 \log x}(2 \log x + 1).$$

Also ist $f'(1) = 2 \cdot e^{2 \cdot 0}(2 \cdot 0 + 1) = 2$.

Definiere $w : (-1, \infty)$, $x \mapsto \sqrt{x+1}$. Dann ist w differenzierbar und, da sin auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, ist g als Hintereinanderausführung differenzierbarer Funktionen nach Kettenregel differenzierbar und es gilt für $x \in (-1, \infty)$:

$$g'(x) = \cos(\pi\sqrt{x+1}) \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{x+1}},$$

also $g'(0) = \cos(\pi) \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$. $\square$

Aufgabe (C 4).

Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{K}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n =: x$ und $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = 0$. Zeige mittels der Definition der Konvergenz, dass $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \cdot y_n = 0$ ist.

Behauptung: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \cdot y_n = 0$

Beweis Sei $\varepsilon > 0$. Da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, das heißt es existiert $K \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|x_n| \leq K$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$|x_n y_n - 0| = |x_n y_n| = |x_n||y_n| \leq K \cdot |y_n|$.

Da $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen Null konvergiert, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|y_n| < \frac{\varepsilon}{K}$ für alle $n \geq n_0$.

Für $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ gilt also:

$|x_n y_n - 0| \leq K \cdot |y_n| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$. $\square$

Aufgabe (C 5).

Man finde alle Lösungen $x \in [0, 2\pi)$ der Gleichung $\sin^4(x) - \cos^2(x) + \frac{1}{4} = 0$.

Behauptung: *$L := \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$ ist für $x \in [0, 2\pi)$ genau die Lösungsmenge der Gleichung*

$\sin^4(x) - \cos^2(x) + \frac{1}{4} = 0$.

Beweis Sei $x \in [0, 2\pi)$. Dann gilt mit $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$:

$$\begin{aligned}
\sin^4(x) - \cos(x) + \frac{1}{4} = 0 &\iff \sin^4(x) + 1 - \cos^2(x) - \frac{3}{4} = 0 \\
&\overset{Add.-Thm.}{\iff} \sin^4(x) + \sin^2(x) - \frac{3}{4} = 0 \\
&\iff \left(\sin^2(x) + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \\
&\iff \sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee \sin(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\iff x \in L.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe (**C 6**).

Seien $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(0) = g(1)$. Sei f streng monoton wachsend und g streng monoton fallend. Zeige, dass es genau eine Zahl $\hat{x} \in (0,1)$ mit $f(\hat{x}) = g(\hat{x})$ gibt.

Behauptung: *Es gibt genau eine Zahl $\hat{x} \in (0,1)$ mit $f(\hat{x}) = g(\hat{x})$.*

Beweis Betrachte $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - g(x)$. Dann gilt:

h ist streng monoton wachsend, da f streng monoton wachsend ist und $-g$ streng monoton wachsend ist.

Wir suchen eine Nullstelle von h. Da h streng wächst und damit injektiv ist, gibt es höchstens eine Nullstelle. Nun gilt:

$h(0) = f(0) - g(0) = g(1) - g(0) < 0$, da g streng fällt.

$h(1) = f(1) - g(1) = f(1) - f(0) > 0$, da f streng wächst.

h ist stetig als Summe stetiger Funktionen.

Nach dem Zwischenwertsatz existiert $\hat{x} \in [0,1]$ mit $h(\hat{x}) = 0$, also $f(\hat{x}) = g(\hat{x})$.

Mit $h(0) \neq 0$ und $h(1) \neq 0$ folgt: $\hat{x} \in (0,1)$. □

Aufgabe (C 7).

Man zeige unter Angabe der Rechenregeln für Konvergenz, dass der Grenzwert

$$A := \lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x} \cdot \frac{\sin(4-x)}{4-x}$$

existiert. Bestimme A.

Behauptung: $\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x} \cdot \frac{\sin(4-x)}{4-x} = \frac{1}{4}$.

Beweis Definiere $f : [2,6] \setminus \{4\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{2-\sqrt{x}}{4-x} \cdot \frac{\sin(4-x)}{4-x}$.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in ([2,6] \setminus \{4\})^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \to 4$ für $n \to \infty$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f(x_n) &= \frac{2-\sqrt{x_n}}{4-x_n} \cdot \frac{\sin(4-x_n)}{4-x_n} \\ &= \frac{(2-\sqrt{x_n})(2+\sqrt{x_n})}{(4-x_n)(2+\sqrt{x_n})} \cdot \frac{\sin(4-x_n)}{4-x_n} \\ &= \frac{1}{2+\sqrt{x_n}} \cdot \frac{\sin(4-x_n)}{4-x_n}. \end{aligned}$$

Da die Wurzelfunktion stetig ist, gilt nun für $n \to \infty$:

$2+\sqrt{x_n} \to 4 \neq 0$, also nach Grenzwertsätzen $\frac{1}{2+\sqrt{x_n}} \to \frac{1}{4}$.

Definiere die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $y_n = 4 - x_n$. Dann gilt $y_n \to 0$ für $n \to \infty$ und damit $\frac{\sin(4-x_n)}{4-x_n} = \frac{\sin(y_n)}{y_n} \to 1$ für $n \to \infty$ nach Vorlesung.

Nach Grenzwertsätzen gilt: $f(x_n) \to \frac{1}{4}$ für $n \to \infty$, also

$$\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x} \cdot \frac{\sin(4-x)}{4-x} = \frac{1}{4}.$$

□