Prof. Dr. H. König WS 2012/13

Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: ______________

Probeklausur zur Vorlesung „Analysis I"
12. Dezember 2012, 18.00 - 19.30 Uhr

Geben Sie bitte Ihre Lösung jeder der Aufgaben unter C auf **separaten** Blättern ab, **sortiert** in der Reihenfolge der Aufgabenstellung und jeweils versehen mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Matrikelnummer**. Beantworten Sie die Fragen unter A direkt auf diesem Blatt und kreuzen Sie die richtige Lösung der Multiple-Choice-Aufgaben unter B an; unter B ist keine Begründung erforderlich. Die Aufgaben **A4** und **C3** sind je nach Studiengang (1-BA bzw. 2-BA) **unterschiedlich**.

A 1. Wann heißt eine Funktion $f : X \to Y$ injektiv und wann surjektiv?

f injektiv $:\Longleftrightarrow$

f surjektiv $:\Longleftrightarrow$

(1 P)

2. Wie lautet die Definition der Konvergenz einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ gegen $x \in \mathbb{K}$?

$x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \ :\Longleftrightarrow$

$\left(\frac{1}{2}\text{ P}\right)$

3. Formulieren Sie den Satz von Bolzano-Weierstraß.

$\left(\frac{1}{2}\text{ P}\right)$

4_1. 1-BA: Wie ist der Limes Superior einer beschränkten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ definiert und wie lautet die ε-Charakterisierung des Limes Superiors als Quantorenaussage?

Bitte nutzen Sie den Platz unter Aufgabe 4_2 für Ihre Antwort! (1 P)

4_2. 2-BA: Wie ist das Supremum einer beschränkten Menge $M \subset \mathbb{R}$ definiert und wie lautet die ε-Charakterisierung des Supremums als Quantorenaussage?

(1 P)

Bitte wenden!

B 1. Ist $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3 + 1$ (1 P)

injektiv: a) JA $\square$, b) NEIN $\square$,

surjektiv: a) JA $\square$, b) NEIN $\square$?

2. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch $x_1 := -2$, $x_{2k} := -\frac{1}{3k}$, $x_{2k+1} := \frac{1}{k^2}$ für $k \in \mathbb{N}$ definierte Folge. Ist der Limes Inferior von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleich

a) -2 $\square$, b) $-\frac{1}{3}$ $\square$, c) 0 $\square$? (1 P)

3. Ist $\displaystyle\sum_{k=0}^{12} (-1)^k \binom{12}{k}$ gleich

a) 0 $\square$, b) 1 $\square$, c) 2^{12} $\square$? $\left(\frac{1}{2}\text{ P}\right)$

4. Sei $0 \leq |q| < 1$. Ist die Summe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ gleich

a) $\dfrac{q}{1-q}$ $\square$, b) $\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $\square$, c) $\dfrac{1}{1-q}$ $\square$? $\left(\frac{1}{2}\text{ P}\right)$

C 1. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sei durch

$$x_n := \frac{(n+2)^2(n^2-3)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^4+4}$$

gegeben. Untersuche mittels der Rechenregeln für Konvergenz, ob der Grenzwert $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existiert und – wenn ja – berechne x. (5 P)

2. Beweise durch direkte Benutzung der Definitionen, dass konvergente Folgen Cauchyfolgen sind. (4 P)

3_1. 1-BA: Man zeige mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n^n \leq (n!)^2.$$

(4 P)

3_2. 2-BA: Man zeige mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ gilt:

$$n^3 \leq 3^n.$$

(4 P)

Viel Erfolg!