Prof. Dr. H. König SS 2013

Name: ____________________ Matrikel-Nr.: __________

Musterlösung zur 1. Klausur zur Vorlesung „Analysis II"
im Studiengang 1-Fach-Bachelor Mathematik
10. Juli 2013, 8:00 - 10:40 Uhr

C 1. (a) Berechne $\displaystyle\int_1^4 \frac{\ln(x)}{x^2}dx$.

(b) Berechne auch $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2-\cos x}$.

Warum definieren die Integranden integrierbare Funktionen?

Die Werte der Integrale sollen so einfach und explizit wie möglich geschrieben werden. Bei Verwendung der Substitutionsformel soll die Substitutionsfunktion präzise mit Definitions- und Bildbereich angegeben werden und die Voraussetzungen der Substitutionsregel sollen überprüft werden. Gleiches gilt bei partieller Integration.

Lösung:
Die Integranden der Funktionen sind je auf dem Integrationsbereich stetig. Daher sind sie auch integrierbar.

(a) Wir berechnen das Integral mittels partieller Integration. Dazu definieren wir die Funktionen $f : [1,4] \to \mathbb{R}, f(x) = \ln x$ und $g : [1,4] \to \mathbb{R}, g(x) = -\frac{1}{x}$. Beide Funktionen sind stetig differenzierbar. Es gelten $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $g'(x) = \frac{1}{x^2}$. Mit diesen Bezeichnung können wir mittels partieller Integration berechnen:

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{\ln(x)}{x^2}dx &= \int_1^4 f(x)g'(x)dx \\ &\overset{\text{part.Int.}}{=} [f(x)g(x)]_1^4 - \int_1^4 f'(x)g(x)dx \\ &= \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^4 + \int_1^4 \frac{1}{x}\frac{1}{x}dx \\ &= \frac{3}{4} - \frac{\ln 2}{2}\end{aligned}$$

(b) Diese Integral berechnen wir mittels zweifacher Substitution. Wir definieren die Funktionen $g : [0,1] \to [0, \frac{\pi}{2}], g(y) = 2\arctan(y)$. Diese ist stetig differenzierbar, streng monoton wachsend mit $g(0) = 0$, $g(1) = \frac{\pi}{2}$ und somit bijektiv. Es gilt $g'(y) = \frac{2}{1+y^2}$.

Zudem definieren wir $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2-\cos x}$. Diese Funktion ist stetig, also integrierbar über $[0, \pi/2]$. Für $x = g(y)$ ist $\cos x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{1-y^2}{1+y^2}$. Nach diesen Vorbereitungen ergibt sich durch Verwendung der Substitutionsformel :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2-\cos x} &= \int_0^{\pi/2} f(x)dx \\ &\overset{\text{Subst.}}{=} \int_0^1 f(g(y))g'(y)dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2-\frac{1-y^2}{1+y^2}}\frac{2}{1+y^2}dy \\ &= 2\int_0^1 \frac{1}{1+3y^2}dy\end{aligned}$$

Nun substituieren wir ein weiteres Mal: Definiere $h : [0, \sqrt{3}] \to [0, 1], h(z) = \frac{1}{\sqrt{3}}z$, stetig differenzierbar, bijektiv mit $h'(z) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Weiter setze $k : [0, 1] \to \mathbb{R}, k(x) = \frac{1}{1+3x^2}$. Die Funktion k ist stetig. Also gilt

$$\begin{aligned}
2\int_0^1 \frac{1}{1+3y^2}dy &= 2\int_0^1 k(y)dy \\
&\overset{\text{Subst.}}{=} 2\int_0^1 k(h(z))h'(z)dz \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+z^2}dz \\
&\overset{\text{Int.-Tafel}}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}\Big[\arctan z\Big]_0^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}) = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

2. Seien $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\alpha > 0$. Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Beweise durch direkte Anwendung des Riemannschen Integrierbarkeitskriteriums, dass $\alpha f + g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist.

Lösung:
Nach dem Riemannschen Integrierbarkeitskriteriums ist eine Funktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ genau dann integrierbar, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von $[a, b]$ existiert, sodass $\overline{S}(Z, h) - \underline{S}(Z, h) < \varepsilon$ gilt.
Sei also $\varepsilon > 0$, dann existieren Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a, b]$ mit

$$\overline{S}(Z_1, f) - \underline{S}(Z_1, f) < \frac{\varepsilon}{2\alpha}, \quad \overline{S}(Z_2, g) - \underline{S}(Z_2, g) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Bilde die gemeinsame Verfeinerung $Z := Z_1 \cup Z_2$. Dann gilt

$$\underline{S}(Z_1, f) \leq \underline{S}(Z, f) \leq \overline{S}(Z, f) \leq \overline{S}(Z_1, f)$$

und

$$\underline{S}(Z_2, g) \leq \underline{S}(Z, g) \leq \overline{S}(Z, g) \leq \overline{S}(Z_2, g).$$

Seien nun $n \in \mathbb{N}$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ mit $Z = \{x_0, ..., x_n\}$. Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir $I_k := [x_{k-1}, x_k]$, $m_k(f) := \inf_{x \in I_k} f(x)$ und $M_k(f) := \sup_{x \in I_k} f(x)$. Analog definieren wir m_k und M_k für g und $\alpha f + g$. Da $\alpha > 0$, gilt dann:

$$\begin{aligned} \alpha m_k(f) + m_k(g) = m_k(\alpha f) + m_k(g) &\leq m_k(\alpha f + g) \\ &\leq M_k(\alpha f + g) \leq M_k(\alpha f) + M_k(g) = \alpha M_k(f) + M_k(g). \end{aligned}$$

Aufsummiert ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 \leq \overline{S}(Z, \alpha f + g) - \underline{S}(Z, \alpha f + g) &= \sum_{k=1}^{n} (M_k(\alpha f + g) - m_k(\alpha f + g)) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} ((\alpha M_k(f) - \alpha m_k(f)) + (M_k(g) - m_k(g))) \\ &= \alpha(\overline{S}(Z, f) - \underline{S}(Z, f)) + (\overline{S}(Z, g) - \underline{S}(Z, g)) < \alpha \frac{\varepsilon}{2\alpha} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

3. Sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum. Seien $a,b \in X$ mit $d(a,b) < 1$ gegeben. Sei $A := \{x \in X \big| \; d(x,a) + d(x,b) \leq 1\}$.

Zeige: A ist nicht-leer und kompakt. Sie dürfen dabei Sätze aus der Vorlesung benutzen.

Zwei Bonuspunkte für: Sei $X \subset \mathbb{R}^2$ und d die durch die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^2$ induzierte Norm. Welches geometrische Objekt stellt A in diesem Fall dar?

Lösung:
A ist eine Ellipse und die obige Beschreibung bedient sich der Gärtnerkonstruktion. Folgendes Bild ist ein Beispiel.

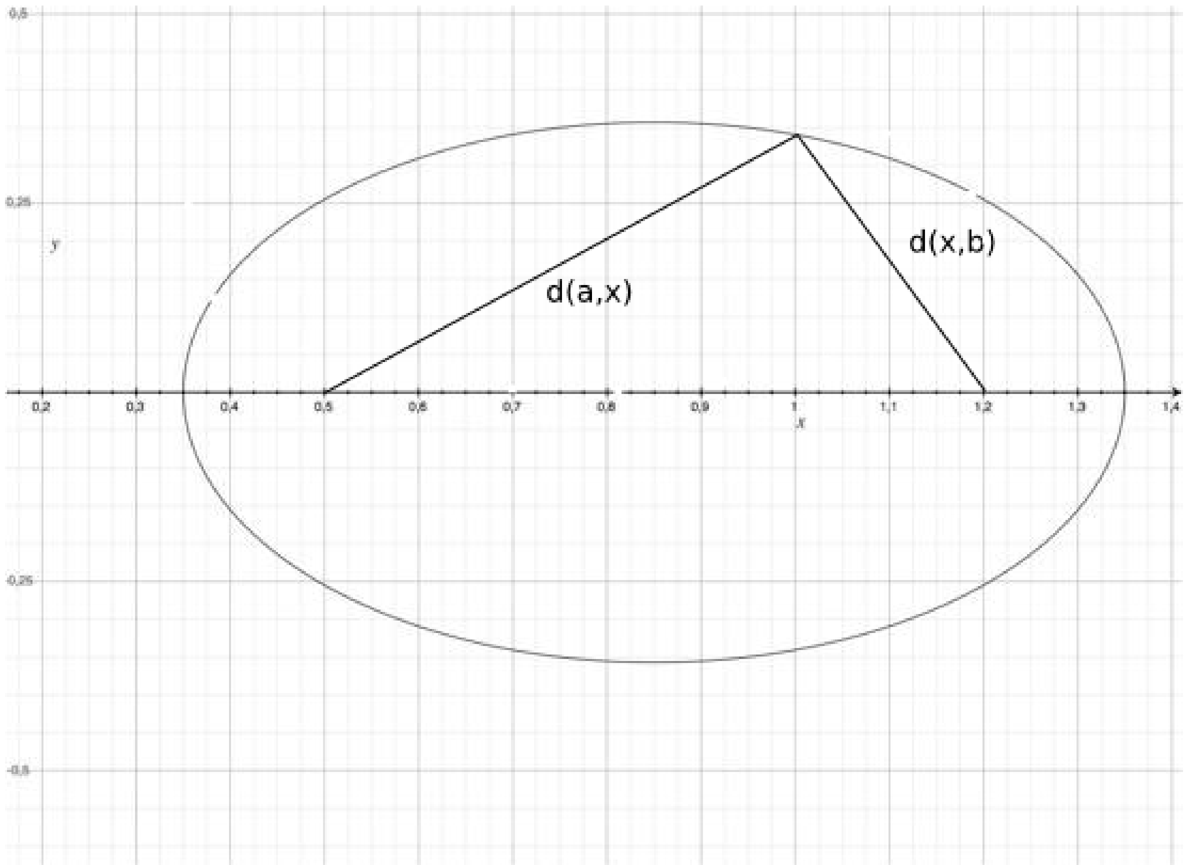

Abbildung 1: A mit $X = \mathbb{R}^2$, $a = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ und $b = \left(\frac{6}{5}, 0\right)$

Zeige zunächst: A ist nicht-leer.
Es ist $d(a,a) + d(a,b) = 0 + d(a,b) = d(b,b) + d(a,b) \overset{Vor}{<} 1$. Also ist $a \in A$ und $b \in A$.

Zeige nun: A ist kompakt.
Variante 1:
Da X kompakt ist, genügt es zu zeigen, dass A abgeschlossen ist.

Metriken sind stetige Funktionen. Als Summe solcher ist dann auch die Funktion
$f : X \to \mathbb{R}, f(x) = d(x,a) + d(x,b)$ stetig.

Denn mit der inversen Dreiecksungleichung und gegebenen $\varepsilon > 0$
folgt für $x, y \in X$ mit $d(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}$:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |d(x,a) + d(x,b) - d(y,a) - d(y,b)| \\ &\leq |d(x,a) - d(y,a)| + |d(x,b) - d(y,b)| \leq 2d(x,y) < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Das Intervall $[0,1]$ ist abgeschlossen und damit ist auch $f^{-1}([0,1])$ als Urbild unter einer stetigen Funktion abgeschlossen.

Variante 2:
Wir zeigen Folgenkompaktheit von A. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $A \subset X$. Da X folgenkompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge in $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, etwa $x_{n_k} \to x \in X$.
Es ist zu zeigen: $x \in A$.
Da $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, konvergiert der Abstand gegen 0, etwa $d(x_{n_k}, x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Mit der inversen Dreiecksungleichung, der erwähnten Konvergenz und in Variante 1 definiertem f folgt für genügend großes $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}&|f(x_{n_k}) - f(x)| \\ &= |d(x_{n_k}, a) + d(x_{n_k}, b) - d(a,x) - d(b,x)| \\ &\leq |d(x_{n_k}, a) - d(a,x)| + |d(x_{n_k}, b) - d(b,x)| \leq 2d(x_{n_k}, x) \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Da nun $f(x_{n_k}) \leq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, folgt auch $f(x) \leq 1$, ergo $x \in A$.

4. Seien $U := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0,\pi) \subset \mathbb{R}^2$, $V := \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ und $f : U \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(x) - \sin(y) \\ \sin(x) \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \sqrt{u^2+v^2}; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U, \ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

gegeben. Zeige:

(a) f und $g|_V$ sind differenzierbar. Ist $h := g \circ f$ auf *ganz* U differenzierbar?

(b) Berechne die partiellen Ableitungen von h in den Differenzierbarkeitspunkten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mittels der Kettenregel.

(c) Sei $v := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Bestimme den Wert der Richtungsableitung $\frac{\partial h}{\partial v}\begin{pmatrix} \pi/4 \\ \pi/4 \end{pmatrix}$.

Lösung:
(a) Wir bestimmen zunächst die partiellen Ableitungen der Funktionen f und g. Dabei bezeichnen wir die Koordinatenfunktionen von f mit f_1 und f_2. Wir berechnen nach den üblichen Differentiationsregeln

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\sin(x), \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\cos(y)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \cos(x), \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

und

$$\frac{\partial g}{\partial u}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \frac{\partial g}{\partial v}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

wobei die partiellen Ableitungen von f auf ganz U stetig sind. Die partiellen Ableitungen von g sind für $(u,v)^T \in V$ stetig, nicht aber für $(u,v)^T = (0,0)^T$.

Somit sind die Funktionen f und $g\big|_V$ total differnzierbar, da sie stetig partiell differenzierbar sind.

h ist nach der Kettenregel differenzierbar, solange $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dies ist genau für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$ der Fall. Somit ist h eingeschränkt auf $U' := U \setminus \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}\right\}$ gemäß der Kettenregel total differenzierbar.

(b) Die Kettenregel ergibt hier für $(x,y)^T \in U'$:

$$\frac{\partial h}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x}\left(f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{\partial g}{\partial y}\left(f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

sowie

$$\frac{\partial h}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x}\left(f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{\partial g}{\partial y}\left(f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Mit den Ergebnissen aus (a) berechnen wir folglich:

$$\frac{\partial h}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sin x \sin y}{\sqrt{(\cos x - \sin y)^2 + \sin^2 x}}$$

und

$$\frac{\partial h}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\cos y(\sin y - \cos x)}{\sqrt{(\cos x - \sin y)^2 + \sin^2 x}}$$

(c) Da die Funktion h in $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)^T$ total differenzierbar ist und $||v|| = 1$, lässt sich die Richtungsableitung gemäß Vorlesung wie folgt berechnen:

$$\frac{\partial h}{\partial v}\begin{pmatrix} \pi/4 \\ \pi/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\partial h}{\partial x}\begin{pmatrix} \pi/4 \\ \pi/4 \end{pmatrix} + \frac{\partial h}{\partial y}\begin{pmatrix} \pi/4 \\ \pi/4 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}$$

5. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := 6\arctan(x+y) - x^3 - 3y$$

gegeben. Zeige: f ist differenzierbar. Bestimme die kritischen Punkte und die Extrema von f.

Lösung:

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest gewählt. Dann ist die Funktion $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_x(y) := f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ nach eindimensionaler Kettenregel und Additionsregel unendlich oft stetig differenzierbar. Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest gewählt. Dann ist die Funktion $f_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_y(x) := f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ nach eindimensionaler Kettenregel und Additionsregel (unendlich oft) differenzierbar. D. h., die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ existieren und sind als Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ stetig. Somit ist die Funktion f total differenzierbar und das totale Differential wird durch die Jacobimatrix beschrieben. Es gilt somit:

$$\begin{aligned} Df\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = J_f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\ &= \left(\frac{6}{1+(x+y)^2} - 3x^2, \frac{6}{1+(x+y)^2} - 3\right) \end{aligned}$$

Kritische Punkte sind nun diejenigen Punkte, welche $J_f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2}$ erfüllen. Es gilt:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \wedge 0 = \frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow 3 = \frac{6}{1+(x+y)^2} \wedge 3x^2 = \frac{6}{1+(x+y)^2} \\ &\Leftrightarrow 3 = 3x^2 \wedge 3 = \frac{6}{1+(x+y)^2} \Leftrightarrow x = \pm 1 \wedge 1 + (x+y)^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1 \wedge x + y = \pm 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

Zur Klassifikation der Extrema untersuchen wir die Definitheit der Hesse-Matrizen zu den obigen Punkten. Es gilt:

$$\mathrm{Hess}_f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-12(x+y)}{(1+(x+y)^2)^2} - 6x & \frac{-12(x+y)}{(1+(x+y)^2)^2} \\ \frac{-12(x+y)}{(1+(x+y)^2)^2} & \frac{-12(x+y)}{(1+(x+y)^2)^2} \end{pmatrix}$$

Folglich:

$$\mathrm{Hess}_f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ negativ definit, da } -9 < 0 \text{ und } \det\left(\mathrm{Hess}_f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 18 > 0. \Rightarrow \text{Maximum}$$

$$\mathrm{Hess}_f \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ positiv definit, da } 9 > 0 \text{ und } \det\left(\mathrm{Hess}_f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 18 > 0. \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$\mathrm{Hess}_f \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ indefinit, da } \det\left(\mathrm{Hess}_f \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 0 \text{ ist.} \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

$$\mathrm{Hess}_f \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ indefinit, da } \det\left(\mathrm{Hess}_f \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = 0 \text{ ist.} \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

6. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeige:

(a) Wenn X kompakt und f bijektiv ist, ist f^{-1} stetig.

(b) Wenn $A \subset X$ totalbeschränkt und f gleichmäßig stetig ist, ist $f(A)$ totalbeschränkt.

Sie dürfen dabei Ergebnisse aus der Vorlesung benutzen.

Lösung:

(a) Wir zeigen, dass Urbilder abgeschlossener Mengen unter f^{-1} wieder abgeschlossen sind. (Das ist eine mögliche Charakterisierung der Stetigkeit). Sei also $A \subset X$ abgeschlossen. Dann gilt: $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$, weil f bijektiv ist. Da A abgeschlossen und X kompakt ist, ist A kompakt nach Satz aus der Vorlesung. Das Bild kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen ist selber wieder kompakt, also ist $f(A)$ kompakt, da f stetig ist. Als kompakte Menge ist damit $f(A)$ abgeschlossen in Y.

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Da f gleichmäßig stetig ist, gilt:

$$\exists \delta > 0 \; \forall x_1, x_2 \in X : (d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon).$$

Wähle ein solches $\delta > 0$. Da A total beschränkt ist, gilt:

$$\exists x_1, ..., x_N \in A : A \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_X(x_j, \delta).$$

Damit ist

$$f(A) \subset f\left(\bigcup_{j=1}^{N} B_X(x_j, \delta)\right) \subset \bigcup_{j=1}^{N} f(B_X(x_j, \delta)).$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f ist $f(B_X(x_j, \delta)) \subset B_Y(f(x_j), \varepsilon)$, und damit $f(A) \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_Y(y_j, \varepsilon)$, wobei $y_j := f(x_j) \in f(A)$. Damit ist $f(A)$ total beschränkt.

7. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \backslash \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ gegeben durch $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} e^x \sin y \\ e^x \cos y \end{pmatrix}$. Zeige:

(a) f ist surjektiv, aber nicht injektiv.

(b) f ist lokal invertierbar.

(c) Sei $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \backslash \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Berechne $(f^{-1})' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, wobei f^{-1} die lokale Inverse zu f in der Nähe von $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ bezeichnet.

Lösung:

(a) Sei $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
Wähle $y = \arctan\left(\frac{u}{v}\right)$ und $x = \frac{1}{2} \ln\left(u^2 + v^2\right)$. Dann gilt:

$$e^x = e^{\frac{1}{2}\ln\left(u^2+v^2\right)} = (e^{\ln\left(u^2+v^2\right)})^{\frac{1}{2}} = \left(u^2+v^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sin(y) = \sin\left(\arctan\left(\frac{u}{v}\right)\right) = \frac{\frac{u}{v}}{\sqrt{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}} = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

$$\cos(y) = \cos\left(\arctan\left(\frac{u}{v}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

$$\Rightarrow f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \sin y \\ e^x \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ (u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Also ist f surjektiv.
Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \sin y \\ e^x \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \sin(y+2n\pi) \\ e^x \cos(y+2n\pi) \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y+2n\pi \end{pmatrix}$$

Also ist f nicht injektiv.

(b) Die partiellen Ableitungen von f existieren und sind stetig. Also ist f total differenzierbar. Die totale Ableitung ist durch die Jacobimatrix gegeben und es gilt:

$$Df \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \\ e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \end{pmatrix}.$$

Nun gilt

$$\det\left(Df \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} f\right) = -e^{2x}(\sin^2(y) + \cos^2(y)) = -e^{2x} \neq 0.$$

Da die Funktionaldeterminante ungleich Null ist, folgt nach dem Umkehrsatz, dass die Funktion f lokal invertierbar ist.

(c) Nach Aufgabenteil (b) ist die Funktion f lokal invertierbar. Nach dem Umkehrsatz folgt: $Df^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \left(Df\left(f^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)\right)^{-1}$.
Es gilt für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad \neq cb$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Es folgt insgesamt mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
&Df^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \left(Df\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \\ e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \end{pmatrix}^{-1} \\
&= -e^{-2x}\begin{pmatrix} -e^x \sin(y) & -e^x \cos(y) \\ -e^x \cos(y) & e^x \sin(y) \end{pmatrix} = e^{-2x}\begin{pmatrix} e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \\ e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{u^2 + v^2}\begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$