Musterlösung der Probleklausur

Analysis I WS 2012/13

Aufgabe (A1). *[1 Punkt]*

Wann heißt eine Funktion $f : X \to Y$ injektiv und wann surjektiv?

Lösung:

$$\begin{aligned} f \textit{ injektiv} \quad &\Leftrightarrow \forall_{x_1,x_2 \in X}(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)) \\ &\Leftrightarrow \forall_{x_1,x_2 \in X}(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2) \\ &\Leftrightarrow \forall_{y \in Y}(f^{-1}(\{y\}) = \emptyset \vee f^{-1}(\{y\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \textit{ surjektiv} \quad &\Leftrightarrow f(X) = Y \\ &\Leftrightarrow \forall_{y \in Y}\exists_{x \in X} f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \forall_{y \in Y} f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset \end{aligned}$$

Aufgabe (A2). *[$\frac{1}{2}$ Punkt]*

Wie lautet die Definition der Konvergenz einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ gegen $x \in \mathbb{K}$?

Lösung: *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ Folge.*

$$\begin{aligned} (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ konvergiert gegen } x \in \mathbb{K}: \quad &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0(\varepsilon) \quad x_n \in U_\varepsilon(x) \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0(\varepsilon) \quad x_n \in U_\varepsilon(x) \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0(\varepsilon) \ |x - x_n| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Aufgabe (A3). *[$\frac{1}{2}$ Punkt]*

Formulieren Sie den Satz von Bolzano-Weierstraß.

Lösung: *Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.*

Aufgabe (A4$_1$). *[1 Punkt]*

Wie ist der Limes Superior einer beschränkten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ definiert und wie lautet die ε-Charakterisierung des Limes Superiors als Quantorenaussage?

Lösung: *Sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *Folge.*

Es ist: $a = \limsup_{n\in\mathbb{N}} x_n = \overline{\lim_n}\, x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_n$

$= \max\{x \in \mathbb{R} | x$ *Häufungspunkt von* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$

$= \max\{x \in \mathbb{R} | \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0(\varepsilon) \;\; |x - x_n| < \varepsilon\}.$

Es gilt weiter: $a = \overline{\lim_n}\, x_n \Leftrightarrow \;\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} x_n > \alpha - \varepsilon & \text{für unendlich viele } n \in \mathbb{N} \\ x_n > \alpha + \varepsilon & \text{nur für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Aufgabe (A4$_2$). *[1 Punkt]*

Wie ist das Supremum einer beschränkten Menge $M \subset \mathbb{R}$ *definiert und wie lautet die* ε*-Charakterisierung des Supremums als Quantorenaussage?*

Lösung:

Sei $M \subset \mathbb{R}$ *eine beschränkte Menge. Dann heißt* $c \in \mathbb{R}$ *das Supremum von* M *oder kleinste obere Schranke von* M*, wenn* $M \leq c$ *(*c *ist obere Schranke) und, falls aus* $d \in \mathbb{R}$ *mit* $M \leq d$*, folgt* $c \leq d$ *(*c *ist kleinste obere Schranke).*

Ist c *eine obere Schranke von* M*, d.h.,* $M \leq c$*, so gilt weiter:* $(c = \sup M \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{x\in M} c - \varepsilon < x \leq c)$.

Aufgabe (B1). *[1 Punkt]*

Ist $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) := x^3 + 1$ *injektiv oder surjektiv?*

Lösung:

f *ist injektiv, (*$\frac{1}{2}$ *Punkt) da für* $x, y \in \mathbb{R}$ *mit* $x \neq y$ *gilt:*

$x \neq y \Rightarrow x^3 \neq y^3 \Rightarrow f(x) = x^3 + 1 \neq y^3 + 1 = f(y).$

f *ist nicht surjektiv, (*$\frac{1}{2}$ *Punkt) da* $f^{-1}(0) = \{-1\}$*, aber* $-1 \notin [0, \infty)$.

Aufgabe (B2). *[1 Punkt]*

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch $x_1 := -2$, $x_{2k} := -\frac{1}{3k}$, $x_{2k+1} := \frac{1}{k^2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ definierte Folge. Ist der Limes Inferior von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleich ...?

Lösung:

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0. Dann gilt: $0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

Aufgabe (B3). *[1 Punkt]*

Ist $\sum\limits_{k=0}^{12} (-1)^k \binom{12}{k}$ gleich...?

***Lösung:** Mit dem binomischen Lehrsatz folgt: $\sum\limits_{k=0}^{12} (-1)^k \binom{12}{k} = (1-1)^{12} = 0^{12} = 0$.*

Aufgabe (B4). *[1 Punkt]*

Sei $0 \leq |q| < 1$. Ist die Summe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ gleich...?

***Lösung:** Es gilt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. Dies ist die geometrische Reihe.*

Aufgabe (C1). *[5 Punkte]*

***Voraussetzung:** Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiert durch $x_n := \frac{(n+2)^2(n^2-3)(1+\frac{1}{n})^n}{n^4+4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

***Behauptung:** Es gilt: $\lim_{n\to\infty} x_n = \mathrm{e}$.*

Beweis Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$x_n = \frac{(n+2)^2(n^2-3)(1+\frac{1}{n})^n}{n^4+4} = \frac{n^2(1+\frac{2}{n^2})n^2(1-\frac{3}{n^2})(1+\frac{1}{n})^n}{n^4(1+\frac{4}{n^4})}$$

$$= \frac{(1+\frac{2}{n^2})(1-\frac{3}{n^2})(1+\frac{1}{n})^n}{1+\frac{4}{n^4}}. \quad (1 Punkt)$$

Nun folgt aus den Grenzwertsätzen für $n \to \infty$:

$1+\frac{2}{n^2} \to 1, 1-\frac{3}{n^2} \to 1, 1+\frac{4}{n^4} \to 1$ (1 Punkt) und $(1+\frac{1}{n})^n \to \mathrm{e}$ (1 Punkt).

Nach den Grenzwertsätzen ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Produkt und Quotient konvergenter Folgen konvergent (1 Punkt). Beachte hier, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $0 \neq 1+\frac{4}{n^4} \to 1 \neq 0$ für $n \to \infty$ (1 Punkt) und es folgt für $n \to \infty$:

$$x_n = \frac{(1+\frac{2}{n^2})(1-\frac{3}{n^2})(1+\frac{1}{n})^n}{1+\frac{4}{n^4}} \to \frac{1 \cdot 1 \cdot \mathrm{e}}{1} = \mathrm{e}.$$

$\square$

Aufgabe (C2). *[4 Punkte]*

Voraussetzung: *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $\mathbb{K}$ gegen $x \in \mathbb{K}$ konvergente Folge . (1 Punkt)*

Behauptung: *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis Sei $\varepsilon > 0$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, existiert zu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. (1 Punkt)

Seien $n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$. (1 Punkt) Dann gilt:

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |x_n - x + x - x_m| \\ &\leq |x_n - x| + |x - x_m| \\ &= |x_n - x| + |x_m - x| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \text{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

□

Aufgabe (C3$_1$). *[4 Punkte]*

Behauptung: *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n^n \leq (n!)^2$.*

Beweis Es gilt: $1^1 = 1 \leq 1 = (1!)^2$ und $2^2 = 4 = (2!)^2$.

Für $n \geq 3$ zeigen wir die Behauptung mit vollständiger Induktion nach n.

Induktionsanfang:

Es gilt: $3^3 = 27 < 36 = (3 \cdot 2 \cdot 1)^2 = (3!)^2$.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ mit $n^n \leq (n!)^2$. (I.V.)

Nach Vorlesung ist $(1 + \frac{1}{k})^k \leq 4$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und damit ist

$$\begin{aligned} (n+1)^{(n+1)} &= (n+1)(n+1)^n \\ &= (n+1)n^n(1 + \frac{1}{n})^n \\ &\leq (n+1)(n!)^2(1 + \frac{1}{n})^n \\ &\leq (n+1)(n!)^2 \cdot 4 \\ &\leq (n+1)^2(n!)^2 = ((n+1)!)^2. \end{aligned}$$

Man kann auch Aufgabe 24, Teil 2 verwenden, also $(1+\frac{1}{n})^n \leq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ausnutzen und den Induktionsanfang für $n = 2$ zeigen, oder mit binomischem Lehrsatz und dem ersten Teil von Aufgabe 24 mit Induktionsanfang $n = 1$ die Aussage beweisen. Also:

$$
\begin{aligned}
(n+1)^{(n+1)} &= (n+1)n^n(1+\frac{1}{n})^n \\
&= (n+1)n^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&\leq (n+1)n^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\
&\leq (n+1)n^n \sum_{k=0}^{n} 1 \\
&\leq (n+1)^2 n^n \\
&\leq (n+1)^2 (n!)^2 = ((n+1)!)^2.
\end{aligned}
$$

□

<u>Aufgabe</u> ($\mathbf{C3_2}$). *[4 Punkte]*

Behauptung: *Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ gilt: $n^3 \leq 3^n$.*

Beweis Zeige die Behauptung über vollständige Induktion nach n.

Induktionsanfang:

Es gilt: $1^3 = 1 < 3 = 3^1$.

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ gelte $n^3 \leq 3^n$.

Induktionsschritt: Es gilt:

$(n+1)^3 = n^3(1+\frac{1}{n})^3 \leq 3^n(1+\frac{1}{n})^3 \leq 3^n(1+\frac{1}{3})^3 = 3^n \cdot \frac{64}{27} < 3^{n+1}$.

Alternativ multipliziert man aus und schätzt die einzelnen Summanden ab. □