Name: ______________________ Matrikel-Nr.: ____________

1. Klausur zur Vorlesung „Analysis II"
im Studiengang 1-Fach-Bachelor Mathematik
10. Juli 2013, 8:00 - 10:40 Uhr

Geben Sie bitte Ihre Lösung jeder der Aufgaben unter C auf den Blättern mit der Aufgabenformulierung ab, **sortiert** in der Reihenfolge der Aufgabenstellung und jeweils versehen mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Matrikelnummer**. Beantworten Sie die Fragen unter A **direkt** auf dem Aufgabenblatt und kreuzen Sie die richtige Lösung der Multiple-Choice-Aufgaben unter B an; unter B ist keine Begründung erforderlich. Punkteaufteilung: Jede Aufgabe unter A: 2 Punkte, unter B: 1 Punkt und unter C: 10 Punkte.

A 1. Seien X, Y Banachräume, $x_0 \in X$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wann heißt f in x_0 differenzierbar?

2. Geben Sie die genaue Formulierung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung an (beide Teile, schwächste Voraussetzungen).

Weiter auf Seite 2

3. Wie lautet der Satz über die gliedweise Differentiation einer Reihe von differenzierbaren Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$?

4. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wann heißt X folgenkompakt?

B 1. Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$. Dann ist f genau dann stetig, wenn

(a) das Bild offener Mengen offen ist, ☐

(b) das Urbild abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist, ☐

(c) das Urbild kompakter Mengen kompakt ist. ☐

2. Sei $f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Unter welcher Voraussetzung gilt stets

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} :$$

(a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sind integrierbar, ☐

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sind stetig, ☐

(c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sind beschränkt? ☐

Weiter auf Seite 3

Name: ____________________

C 1. (a) Berechne $\displaystyle\int_1^4 \frac{\ln(x)}{x^2}dx$.

(b) Berechne auch $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2-\cos x}$.

Warum definieren die Integranden integrierbare Funktionen?

Die Werte der Integrale sollen so einfach und explizit wie möglich geschrieben werden. Bei Verwendung der Substitutionsformel soll die Substitutionsfunktion präzise mit Definitions- und Bildbereich angegeben werden und die Voraussetzungen der Substitutionsregel sollen überprüft werden. Gleiches gilt bei partieller Integration.

Weiter auf Seite 4

Name: ______________________________

2. Seien $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\alpha > 0$. Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Beweise durch direkte Anwendung des Riemannschen Integrierbarkeitskriteriums, dass $\alpha f + g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist.

Weiter auf Seite 5

3. Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Seien $a, b \in X$ mit $d(a, b) < 1$ gegeben. Sei $A := \{x \in X \big| \ d(x, a) + d(x, b) \leq 1\}$.

Zeige: A ist nicht-leer und kompakt. Sie dürfen dabei Sätze aus der Vorlesung benutzen.

Zwei Bonuspunkte für: Sei $X \subset \mathbb{R}^2$ und d die durch die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^2$ induzierte Norm. Welches geometrische Objekt stellt A in diesem Fall dar?

Weiter auf Seite 6

Name: ______________________________

4. Seien $U := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0,\pi) \subset \mathbb{R}^2$, $V := \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ und $f : U \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(x) - \sin(y) \\ \sin(x) \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \sqrt{u^2+v^2}; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

gegeben. Zeige:

(a) f und $g|_V$ sind differenzierbar. Ist $h := g \circ f$ auf *ganz* U differenzierbar?

(b) Berechne die partiellen Ableitungen von h in den Differenzierbarkeitspunkten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mittels der Kettenregel.

(c) Sei $v := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Bestimme den Wert der Richtungsableitung $\dfrac{\partial h}{\partial v}\begin{pmatrix} \pi/4 \\ \pi/4 \end{pmatrix}$.

Weiter auf Seite 7

5. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := 6\arctan(x+y) - x^3 - 3y$$

gegeben. Zeige: f ist differenzierbar. Bestimme die kritischen Punkte und die Extrema von f.

Weiter auf Seite 8

Name: ______________________________

6. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeige:

(a) Wenn X kompakt und f bijektiv ist, ist f^{-1} stetig.

(b) Wenn $A \subset X$ totalbeschränkt und f gleichmäßig stetig ist, ist $f(A)$ totalbeschränkt.

Sie dürfen dabei Ergebnisse aus der Vorlesung benutzen.

Weiter auf Seite 9

7. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ gegeben durch $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} e^x \sin y \\ e^x \cos y \end{pmatrix}$. Zeige:

(a) f ist surjektiv, aber nicht injektiv.

(b) f ist lokal invertierbar.

(c) Sei $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Berechne $(f^{-1})' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, wobei f^{-1} die lokale Inverse zu f in der Nähe von $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ bezeichnet.

Viel Erfolg! ☺

ELEMENTARE INTEGRATIONEN

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}) \quad , \quad \int \frac{dx}{x} = \ln\ |x|$$

$$\int \cos x \; dx = \sin x \quad , \quad \int \sin x \; dx = -\cos x$$

$$\int e^x \; dx = e^x \; , \quad \int a^x \; dx = \frac{a^x}{\ln\ a} \quad (a > 0).$$

$$\int \cosh \; dx = \sinh\ x \quad , \quad \int \sinh\ \; dx = \cosh\ x$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan\ x \quad , \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ \ln\ |\frac{1+x}{1-x}|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\,(x + \sqrt{1+x^2}) \quad , \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin\ x \quad (|x| < 1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{ar}\cosh\ x \quad (x > 1)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x \quad , \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$$

$$\int \tan x \; dx = -\ln\,|\cos x| \quad , \quad \int \operatorname{ctg}\ x \; dx = \ln\,|\sin\ x|$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}\,(x - \sin x\ \cos x) \quad , \quad \int \cos^2\ x \; dx = \frac{1}{2}(x + \sin x\ \cos x)$$

$$\int f'(x)/f(x)\,dx = \ln\ f(x) \quad (f > 0)$$

$$y = \tan(\frac{x}{2}) \quad , \quad \sin x = \frac{2y}{1+y^2} \quad , \quad \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2} \; .$$