Name: ______________________ Matrikel-Nr.: ______________

Klausur zur Vorlesung „Analysis I"
im Studiengang 1-Fach-Bachelor Mathematik
13. Februar 2013, 8:00 - 10:40 Uhr

Geben Sie bitte Ihre Lösung jeder der Aufgaben unter C auf **separaten** Blättern ab, **sortiert** in der Reihenfolge der Aufgabenstellung und jeweils versehen mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Matrikelnummer**. Beantworten Sie die Fragen unter A **direkt** auf diesem Blatt und kreuzen Sie die richtige Lösung der Multiple-Choice-Aufgaben unter B an; unter B ist keine Begründung erforderlich. Punkteaufteilung: Jede Aufgabe unter A: 2 Punkte, unter B: 1 Punkt und unter C: 10 Punkte.

A 1. Geben Sie die Definition für die Konvergenz einer Folge, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2. Formulieren Sie die Kettenregel der Differentialrechnung mit genauer Angabe der Voraussetzungen.

3. Sei $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$. Wie lautet die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$?

4. Geben Sie eine genaue Formulierung des Quotientenkriteriums für Reihen $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ in $\mathbb{K}$.

B 1. Ist $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ gleich

(a) $\frac{1}{2}$ ☐ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ (d) 1 ☐ ?

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert für $\alpha \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn gilt

(a) $\alpha > 1$ ☐ (b) $\alpha > 0$ ☐ (c) $\alpha > 2$ ☐ (d) $\alpha > -1$ ☐ ?

C 1. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sei durch

$$x_n := \frac{(1+2n)(3+4n^2)^3}{(1+n)^7} \cdot \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^j$$

gegeben. Man untersuche mittels der Rechenregeln für Konvergenz, ob $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und berechne ggf. den Grenzwert.

2. Man beweise, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $2^{n-2} \leq \sqrt{n!}$.

3. Seien $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g : [-1,\infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := x^{2x^2}, \quad g(x) := \sin(\pi\sqrt{x+1}),$$

gegeben. Man begründe, warum f und g differenzierbar sind, berechne f' und g' und speziell $f'(1)$, $g'(0)$.

4. Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{K}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =: x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Zeige mittels der Definition der Konvergenz, dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = 0$ ist.

5. Man finde alle Lösungen $x \in [0, 2\pi)$ der Gleichung $\sin^4(x) - \cos^2(x) + \frac{1}{4} = 0$.

6. Seien $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(0) = g(1)$. Sei f streng monoton wachsend und g streng monoton fallend.

Zeige, dass es genau eine Zahl $\hat{x} \in (0,1)$ mit $f(\hat{x}) = g(\hat{x})$ gibt.

7. Man zeige unter Angabe der Rechenregeln für Konvergenz, dass der Grenzwert

$$A := \lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x} \cdot \frac{\sin(4-x)}{4-x}$$

existiert. Bestimme A.

(Für 2-Fach Bachelor- Studierende entfallen die Aufgaben 6 und 7.)