Name: ______________________ Matrikel-Nr.: ______________

2. Klausur zur Vorlesung „Analysis I”
im Studiengang 1-Fach-Bachelor Mathematik
03. April 2013, 8:00 - 10:40 Uhr

Formulieren Sie Ihre Lösungen bzw. Antworten zu jeder Aufgabe direkt auf dem Aufgabenblatt und versehen Sie dieses mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Matrikelnummer**. Kreuzen Sie die richtige Lösung der Multiple-Choice-Aufgaben direkt unter B (ohne Begründung) an.
Punkteaufteilung: Jede Aufgabe unter A: 2 Punkte, unter B: 1 Punkt und unter C: 10 Punkte.

A 1. Definieren Sie die Stetigkeit von $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ in einem Punkt $x_0 \in [a, b]$.

2. Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung unter genauer Angabe der Voraussetzungen.

Bitte wenden!

Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: ______________

3. Formulieren Sie präzise die Bernoulli-Ungleichung.

4. Wie lautet das Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen und wie ist das Supremum einer beschränkten Menge $A \subset \mathbb{R}$ definiert?

B 1. Ist $\sin x =$

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ☐ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ☐

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n}}{n!}$ ☐ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ☐ ?

2. Ist $\binom{n}{2} =$

(a) $\frac{n(n+1)}{2}$ ☐ (b) $\frac{n^2}{2}$ ☐ (c) $\frac{n(n-1)}{2}$ ☐ (d) $\frac{(n-1)(n+1)}{2}$ ☐ ?

Weiter auf Seite 3

Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: ______________

C 1. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sei durch

$$x_n := \frac{(2+3n^2)(1+2n)^2}{\left(3+\frac{n}{2}\right)^4}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}$$

gegeben. Man untersuche mittels der Rechenregeln für Konvergenz, ob $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und berechne ggf. den Grenzwert.

Weiter auf Seite 4

Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: ______________

2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \exp(x^2)$. Zeigen Sie, dass f beliebig oft differenzierbar ist und es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Polynom p_n n-ten Grades gibt, so dass gilt:

$$f^{(n)}(x) = p_n(x) f(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Weiter auf Seite 5

Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: ______________

3. Weisen Sie unter Benutzung der Konvergenzkriterien aus der Vorlesung die Konvergenz bzw. Divergenz der folgenden beiden Reihen nach:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k^2}.$$

Weiter auf Seite 6

4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 4\sin^2 x - 4\sin^4 x$. Bestimmen Sie die Extrema und Wendepunkte von f in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Welche der Extrema sind Maxima bzw. Minima?

Weiter auf Seite 7

5. Zeigen Sie, dass $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ nicht gleichmäßig stetig ist.

Weiter auf Seite 8

6. Man beweise, dass der Grenzwert

$$A := \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

existiert und bestimme A.

Weiter auf Seite 9

7. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar. Zeige unter direkter Benutzung der Definitionen von Stetigkeit und Differenzierbarkeit, dass f in x_0 stetig ist.

Viel Erfolg! ☺