Übungen zur Analysis II
Blatt 9

35. Sei $(X, ||\cdot||)$ ein Banachraum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ eine Folge in X.
Es sei $q := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{||x_n||} < 1$.
Zeige: $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konvergiert in X und $\sum_{n\in\mathbb{N}} ||x_n||$ konvergiert in $\mathbb{R}$.
(Wurzelkriterium in Banachräumen.)

36. Sei $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $r(x) := ||x||_2$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = ||x||_2^\alpha$. Zeige: r und f sind für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ differenzierbar. Berechne die partiellen Ableitungen $\frac{\partial r}{\partial x_j}(x)$ und $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ für $j \in \{1, \cdots, n\}$. Berechne ferner für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ den Wert des *Laplace-Operators* $\triangle$ angewandt auf f,
$$\triangle f(x) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x).$$
Was ergibt sich für $\alpha = 2 - n$?

37. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{array} \right\}.$$
Zeige: f ist unstetig in $(0,0)$, aber für jede Gerade L durch $(0,0)$ gilt: $f|_L$ ist stetig (als Funktion einer Variablen). Ist f in $(0,0)$ partiell nach x und y differenzierbar?

38.* Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar und *homogen vom Grad* α, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gelte $f(tx) = t^\alpha f(x)$. Man beweise: $Df(x)(x) = \alpha f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige aber, dass i.a. $Df(x)(y) \neq \alpha f(y)$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Abgabe der Übungen bis Mittwoch, 12.06.2013, 8:15 Uhr im Schrein.
2-Fach-BA-Studierende *müssen* Aufgabe 38* nicht beantworten.