Prof. Dr. H. König SS 2013

Übungen zur Analysis II
Blatt 8

31. Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und sei $f : X \to X$.
Es existiere $k \in (0,1)$, so dass für alle $x, y \in X$ gilt:
$$d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y).$$
Zeige: f besitzt *genau* einen *Fixpunkt* $\hat{x}$, d. h. $f(\hat{x}) = \hat{x}$.
Tip: Wähle $x_1 \in X$ beliebig und zeige, dass die durch $x_{n+1} := f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist.

32. Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein Banachraum.
Auf $L(X,Y) := \{T : X \to Y \mid T \text{ stetig, linear}\}$ sei die *Operatornorm*
$$\|T\|_{\mathrm{op}} := \sup\left\{\|Tx\|_Y \;\middle|\; \|x\|_X = 1\right\}$$
gegeben. Zeige:
(a) $\|T\|_{\mathrm{op}} = \sup\{\|Tx\|_Y \mid \|x\|_X \leq 1\} = \sup\left\{\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \;\middle|\; x \neq 0\right\}$.
(b) $(L(X,Y), \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$ ist ein Banachraum.
(c) Ist $(Z, \|\cdot\|_Z)$ ein weiterer normierter Raum und $T \in L(X,Y)$, $S \in L(Y,Z)$, gilt $\|ST\|_{\mathrm{op}} \leq \|S\|_{\mathrm{op}}\, \|T\|_{\mathrm{op}}$.

33. Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, die durch die Matrix $(a_{jk})_{j\leq m,\, k\leq n}$ gegeben wird, d.h. für $x = (x_k)_{k=1}^n$ gelte
$$(Ax)_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k, \quad j = 1, \ldots, m.$$
Zeige: Versieht man den $\mathbb{R}^n$ und den $\mathbb{R}^m$ jeweils mit der $\|\cdot\|_1$–Norm (bzw. der $\|\cdot\|_\infty$–Norm), berechnet sich die zugehörige Operatornorm durch
$$\|A\|_{\mathrm{op}} = \max_{k=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{m} |a_{jk}| \qquad \textit{Spaltensummennorm}$$
$$\text{(bzw.} \quad \|A\|_{\mathrm{op}} = \max_{j=1,\ldots,m} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}| \qquad \textit{Zeilensummennorm}\text{).}$$

34.* Auf $C^1[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{K} \mid f \text{ stetig differenzierbar}\}$ seien zwei Normen gegeben: für $f \in C^1[a,b]$ setze
$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$
$\|f\|'_\infty := \max\{\|f\|_\infty,\ \|f'\|_\infty\}$. Zeige:
(a) $(C^1[a,b], \|\cdot\|'_\infty)$ ist vollständig.
(b) $(C^1[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ ist nicht vollständig.

Abgabe der Übungen bis Mittwoch, 05.06.2013, 8:15 Uhr im Schrein.
2-Fach-BA-Studierende *müssen* Aufgabe 34* nicht bearbeiten.