Übungen zur Analysis II
Blatt 7

27. Für $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n$ sei definiert

$$||x||_\infty := \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |x_i| \quad , \quad ||x||_2 := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad , \quad ||x||_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Zeige die Normeigenschaften für $||\cdot||_\infty$ und $||\cdot||_1$. Zeige ferner die Ungleichungen

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq ||x||_1, \quad ||x||_1 \leq \sqrt{n}\, ||x||_2, \quad ||x||_2 \leq \sqrt{n}\, ||x||_\infty.$$

Man gebe ferner Vektoren an, für die in den letzten beiden Ungleichungen das Gleichheitszeichen steht.

28. Man bestimme den Konvergenzradius r der Reihe

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{x^n}{n(n-1)} \, .$$

Durch gliedweise Integration einer geeigneten Reihe, deren Summenwert bekannt ist, bestimme man den Wert obiger Summe für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < r$.

29. Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei

$$d_1(x,y) := |x-y| \qquad \text{und} \qquad d_2(x,y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|.$$

Zeige:

(1) $(\mathbb{R}, d_2)$ ist ein metrischer Raum, der nicht vollständig ist.

(2) Die offenen Mengen in $(\mathbb{R}, d_1)$ fallen mit den offenen Mengen in $(\mathbb{R}, d_2)$ zusammen.

30.* Seien (X,d), $(Y d')$ metrische Räume und sei $f : X \to Y$. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

(1) f ist stetig

(2) Das Urbild $f^{-1}(U)$ jeder offenen Menge $U \subset Y$ ist offen in X.

(3) $\forall_{x \in X}\ \forall_{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}} \in X^{\mathbb{N}} \left(x = \lim_{n \to \infty} x_n \ \Rightarrow \ f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) \right)$.

Abgabe der Übungen bis Mittwoch, 29.05.2013, 8:15 Uhr im Schrein.
2-Fach-BA-Studierende *müssen* Aufgabe 30* nicht bearbeiten.